

Вывод параметрических функций активации нейронной сети для эффективной аппроксимации решений краевых задач дифференциальных уравнений параболического типа

Роман Юрьевич Пономарев 

Тюменский нефтяной научный центр, Тюмень, Россия
Тюменский государственный университет
Контакт для переписки: gyonomarev@tnnc.rosneft.ru 

Аннотация. В последнее время приобретает популярность применение нейронных сетей для аппроксимации решений краевых задач дифференциальных уравнений. Метод позволяет получить бессеточную аппроксимацию решения при заранее заданных начально-краевых условиях. Однако для обучения нейронной сети, при произвольной функции активации, требуется использование контрольных точек в области решения, в которых производится проверка выполнения дифференциального уравнения и заданных начально-краевых условий. Качество итоговой нейросетевой аппроксимации складывается из двух факторов: точности выполнения начально-краевых условий и точности аппроксимации дифференциального уравнения. У данного подхода есть ограничения: выполнение дифференциального уравнения в контрольных точках не гарантирует выполнения дифференциального уравнения в произвольных точках решения, отличных от контрольных. Ограничение можно нивелировать за счет проведения перекрестной проверки качества сходимости нейронной сети на тестовых точках, не входящих в обучающий набор, но полностью исключить данный эффект таким методом невозможно.

В работе предложен новый подход с использованием параметрических функций активаций, позволяющих эффективно аппроксимировать решения краевых задач линейных дифференциальных уравнений параболического типа. Подход рассмотрен на примере аппроксимации решений краевой задачи уравнения пьезопроводности.

Ключевые слова: машинное обучение, физико-информированные нейронные сети, PINN, искусственная нейронная сеть, функции активации

Цитирование: Пономарев Р. Ю. 2025. Вывод параметрических функций активации нейронной сети для эффективной аппроксимации решений краевых задач дифференциальных уравнений параболического типа // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 11. № 2 (42). С. 141–157. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2025-11-2-141-157>

Поступила 23.02.2025; одобрена 15.05.2025; принята 17.06.2025

Derivation of parametric activation functions of a neural network for effective approximation of solutions to boundary value problems of differential equations of parabolic type

Roman Yu. Ponomarev✉

Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russia

University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: ryponomarev@tnnc.rosneft.ru✉

Abstract. Recently, the use of neural networks for approximating solutions to boundary value problems of differential equations has become popular. The method allows to obtain a grid-free approximation of the solution under predefined initial boundary conditions. However, for training a neural network with an arbitrary activation function, it is necessary to use control points in the solution area, where the fulfillment of the differential equation and the specified initial boundary conditions is checked. The quality of the final neural network approximation consists of two factors: the accuracy of the initial boundary conditions and the accuracy of the approximation of the differential equation. This approach has limitations: performing the differential equation at control points does not guarantee performing the differential equation at arbitrary solution points other than the control points. The limitation can be offset by cross-checking the quality of convergence of the neural network on test points that are not included in the training set, but it is impossible to completely eliminate this effect using this method.

A new approach using parametric activation functions is proposed, which makes it possible to efficiently approximate solutions to boundary value problems of linear

differential equations of parabolic type. The approach is described on the example of approximation of solutions to the boundary value problem of the diffusivity equation.

Keywords: machine learning, physically informed neural networks, PINN, artificial neural network, activation functions

Citation: Ponomarev, R. Yu. (2025). Derivation of parametric activation functions of a neural network for effective approximation of solutions to boundary value problems of differential equations of parabolic type. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 11(2), 141–157. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2025-11-2-141-157>

Received Feb. 23, 2025; Reviewed May 15, 2025; Accepted Jun. 17, 2025

Введение

В настоящее время приобретает популярность применение нейронных сетей для аппроксимации решений краевых задач дифференциальных уравнений. Методика позволяет получить бескеточную аппроксимацию решения краевой задачи при заранее заданных начально-краевых условиях [Вершинин, Пономарев, 2023; Васильев и др., 2016; Васильев и др., 2015; Зрелова, Ульянов, 2022; Коваленко и др., 2017; Fraces, Tchelepi, 2021; Fraces, Tchelepi, 2022; Fuks, Tchelepi, 2020]. Аппроксимация формируется в процессе обучения нейронной сети: для этого требуется выделение в области решения контрольных точек, в которых производится аналитическое вычисление слагаемых дифференциального уравнения с последующей проверкой выполнения дифференциального уравнения совместно с начально-краевыми условиями [Васильев и др., 2015]. Основным преимуществом такого подхода является универсальность: нейронная сеть, с наперед заданной точностью сможет аппроксимировать любое решение краевой задачи. Последнее утверждение основывается на ряде теорем, таких как:

- Теорема Колмогорова–Арнольда, утверждающая, что любая многомерная непрерывная функция может быть представлена в виде суперпозиции одномерных функций [Бутырский и др., 2010; Колмогоров, 1957].
- Теорема Цыбенко, утверждающая, что любая непрерывная функция может быть аппроксимирована с любой заданной точностью многослойным перцептроном с одним скрытым слоем, если использовать сигмоидную функцию активации [Cybenko, 1989].
- Теоремы об аппроксимации непрерывных функций многих переменных нейронными сетями с использованием произвольной непрерывной функции одного переменного [Горбань, 1998].

Но у такого подхода есть ряд ограничений. Первое ограничение — выполнение дифференциального уравнения в контрольных точках не гарантирует сходимость нейронной сети в произвольных точках решения, отличных от контрольных. Второе ограни-

чение — качество итоговой аппроксимации складывается из двух параметров: точности выполнения начально-краевых условий и точности аппроксимации дифференциального уравнения. И третье ограничение — точность аппроксимации зависит от количества нейронов, и на данный момент нет явной зависимости точности аппроксимации от количества нейронов. Поэтому требуется подбор числа нейронов при обучении модели для получения желаемой точности аппроксимации.

Одним из элементов нейронной сети является функция активации, позволяющая задать нелинейную связь между слоями в нейронную сеть и ограничить диапазон вычисляемых значений сети. На практике функции активации подбираются экспериментально для каждой задачи. Основным критерием отбора является скорость сходимости процесса обучения нейронной сети и итоговая точность аппроксимации.

В работе предложен новый подход с использованием параметрических функций активаций, позволяющих эффективно аппроксимировать решения краевых задач линейных дифференциальных уравнений параболического типа в декартовой системе координат.

Моделирование фильтрации однофазной жидкости в пористой среде

Рассмотрим задачу однофазной фильтрации, которая описывается дифференциальным уравнением движения упругой жидкости в упругой пористой среде — уравнением пьезопроводности [Басниев и др., 1993; Баренблатт и др., 1984; Бутырский и др., 2010].

$$\frac{\partial P}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right). \quad (1)$$

В дальнейшем будет рассмотрено 2 варианта фильтрации:

- Прямолинейный параллельный поток жидкости в одномерном стержне. Распространение давления описывается уравнением (2):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = a \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (2)$$

- Трехмерная фильтрация в единичном кубе с непроницаемыми стенками. Распространение давления описывается уравнением (1).

Прямолинейный параллельный поток

Для аппроксимации решения уравнения (2) используется модель многослойного персептрона с одним промежуточным слоем, содержащем N нейронов, и произвольной функцией активации f [Хайкин, 2019]. Тогда искомую функцию $P(t, x)$ можно представить в виде:

$$P(t, x) = W_2 \cdot f(W_1 \cdot (t, x) + b_1) + b_2, \quad (3)$$

где W_1 , W_2 , b_1 , b_2 — векторы настроечных коэффициентов (веса модели), операция « $\cdot$ » — матричное умножение.

Найдем общий вид функции f , при которой обеспечивается выполнение уравнения (2) при подстановке выражения (3) в каждой точке пространства. Для этого подставим выражение (3) в уравнение (2) и воспользуемся правилом расчета производных сложных функций:

$$W_2 \cdot f'(W_1 \cdot (t, x) + b_1) \cdot W_1[0] = a \cdot W_2 \cdot f''(W_1 \cdot (t, x) + b_1) \cdot W_1[1]^2, \quad (4)$$

где $[0], [1]$ обозначают индексы строки матрицы W_1 .

Выражение (4) можно упростить, сократив на W_2 .

$$f'(W_1 \cdot (t, x) + b_1) \cdot W_1[0] = a \cdot f''(W_1 \cdot (t, x) + b_1) \cdot W_1[1]^2. \quad (5)$$

Выражение $W_1 \cdot (t, x) + b_1$ обозначим за переменную s и запишем получившееся обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной s :

$$f'(s) \cdot W_1[0] = a \cdot f''(s) \cdot W_1[1]^2. \quad (6)$$

Уравнение (6) можно решить аналитически и найти общий вид функции f . Вводим замену $f'(s) = V(s)$, тогда уравнение (6) можно записать как

$$V(s) W_1[0] = a \cdot \frac{dV}{ds} W_1[1]^2. \quad (7)$$

Уравнение (7) решается с помощью метода разделения переменных и интегрирования каждой из частей уравнения.

$$\int \frac{dV}{V(s)} = \int \frac{W_1[0]}{a \cdot W_1[1]^2} ds. \quad (8)$$

Решение относительно V имеет вид:

$$\ln(V) + C_1 = \frac{W_1[0]}{a \cdot W_1[1]^2} s + C_2, \quad (9)$$

где C_1 и C_2 — произвольные коэффициенты.

Выразим V из выражения (9):

$$V = \exp\left(\frac{W_1[0]}{a \cdot W_1[1]^2} s + C_2 - C_1\right). \quad (10)$$

Проведем обратную замену $f'(s) = V(s)$ и получим выражение:

$$\frac{df(s)}{ds} = \exp\left(\frac{W_1[0]}{a \cdot W_1[1]^2} s + C_2 - C_1\right), \quad (11)$$

$$f(s) = \int \exp\left(\frac{W_1[0]}{a \cdot W_1[1]^2} s + C_2 - C_1\right) ds. \quad (12)$$

Искомую функцию $f(s)$ можно получить, интегрируя выражение (12):

$$f(s) = \frac{a \cdot w_1[1]^2}{w_1[0]} \exp\left(\frac{w_1[0]}{a \cdot w_1[1]^2} s + C_2 - C_1\right). \quad (13)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 могут быть произвольными и не влияют на общее решение уравнения (5). Для упрощения вида функции положим, что $C_1 = C_2 = 0$.

Запишем итоговый вид нейронной сети для аппроксимации уравнения (2):

$$P(t, x) = W_2 \cdot \frac{a \cdot w_1[1]^2}{w_1[0]} \exp \left(\frac{w_1[0]}{a \cdot w_1[1]^2} (W_1 \cdot (t, x) + b_1) \right) + b_2. \quad (14)$$

Применение параметрической функции активации вида (13) позволяет не вычислять производные от t и x в контрольных точках пространства, поскольку дифференциальное уравнение (2) автоматически выполняется в каждой точке пространства при произвольных весовых коэффициентах нейронной сети. Таким образом, задача аппроксимации сводится к задаче обучения нейронной сети для выполнения начально-краевых условий, т. е. только в начальный момент времени и на границах области (рис. 1). Данный подход позволяет сократить количество вычислений при обучении нейронной сети. Точность итоговой аппроксимации решения зависит только от точности воспроизведения начально-краевых условий.

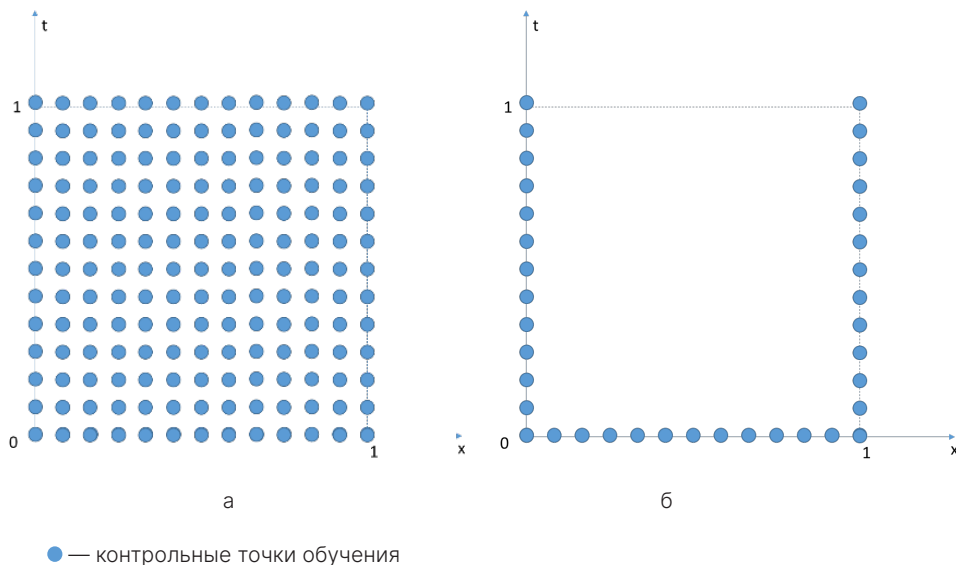


Рис. 1. Область обучения: а) при использовании произвольной функции активации; б) при использовании параметрической функции активации

Fig. 1. Training area: a) using an arbitrary activation function; б) using a parametric activation function

Вычислительные эксперименты проводились при начальных и граничных условиях различного типа.

Первый эксперимент — пуск скважины с постоянным забойным давлением (граничное условие 1 рода — (15), (16), (17)).

$$p(x, 0) = 1, \text{ при } 0 \leq x \leq 1; \quad (15)$$

$$p(0, t) = 0, \text{ при } 0 < t \leq 1; \quad (16)$$

$$p(1, t) = 1, \text{ при } 0 < t \leq 1. \quad (17)$$

Сравнения численного решения, полученного с помощью применения неявной схемы и итерационного метода Якоби, и нейросетевой аппроксимации представлены на рис. 2.

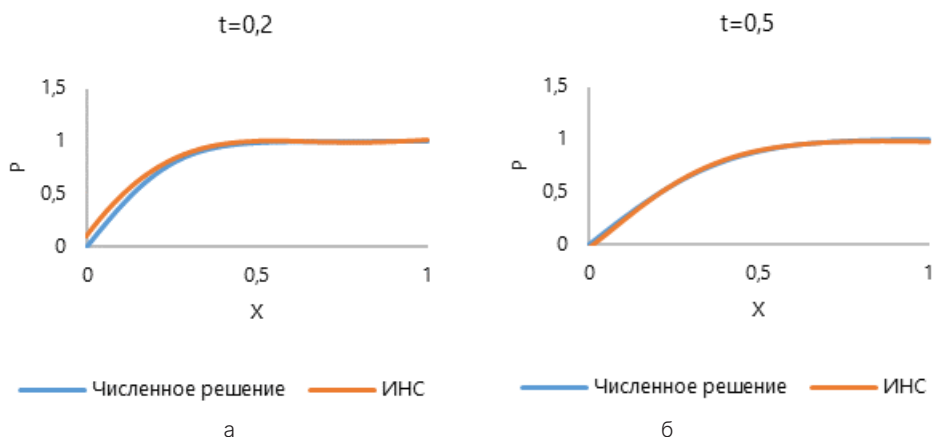


Рис. 2. Распределение давления в пласте при запуске скважины в режиме постоянного забойного давления. а) Распределение давления в момент времени $t = 0,2$; б) распределение давления в момент времени $t = 0,5$

Fig. 2. Distribution of pressure in the reservoir on a well startup in the constant downhole pressure mode. а) Pressure distribution at $t = 0.2$; б) pressure distribution $t = 0.5$

Второй вычислительный эксперимент — запуск скважины с постоянным дебитом жидкости (граничное условие 2 рода — (18), (19), (20)).

$$p(x, 0) = 1, \text{ при } 0 \leq x \leq 1; \quad (18)$$

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = 1, \text{ при } x = 0, 0 < t \leq 1; \quad (19)$$

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = 0, \text{ при } x = 1, 0 < t \leq 1. \quad (20)$$

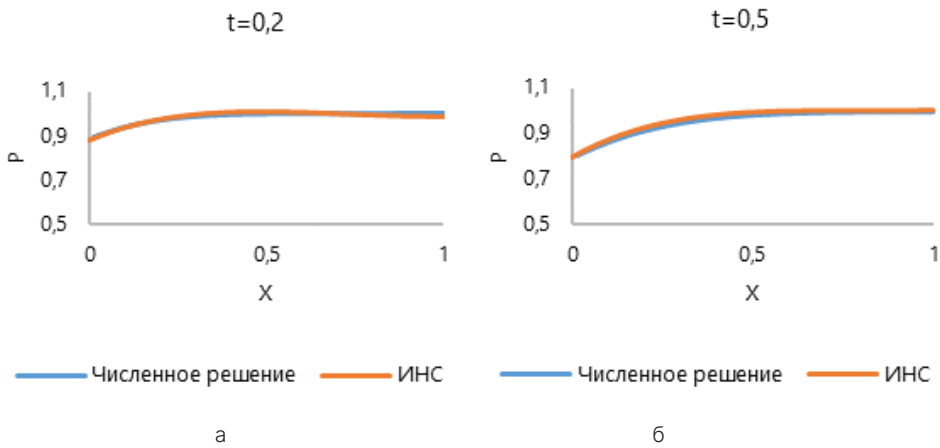


Рис. 3. Распределение давления в пласте при запуске скважины в режиме постоянного дебита жидкости. а) Распределение давления в момент времени $t = 0,2$; б) распределение давления в момент времени $t = 0,5$

Fig. 3. Pressure distribution in the reservoir on a well startup in a constant flow rate mode. а) Pressure distribution at $t = 0.2$; б) pressure distribution at $t = 0.5$

Третий вычислительный эксперимент — запуск скважины с линейным снижением забойного давления до постоянного значения (с динамическими граничными условиями 1 типа — (21), (22), (23)) (рис. 4).

$$p(x, 0) = 1, \text{ при } 0 \leq x \leq 1; \quad (21)$$

$$p(0, t) = p_3(t), \text{ при } 0 < t \leq 1; \quad (22)$$

$$p(1, t) = 1, \text{ при } 0 < t \leq 1. \quad (23)$$

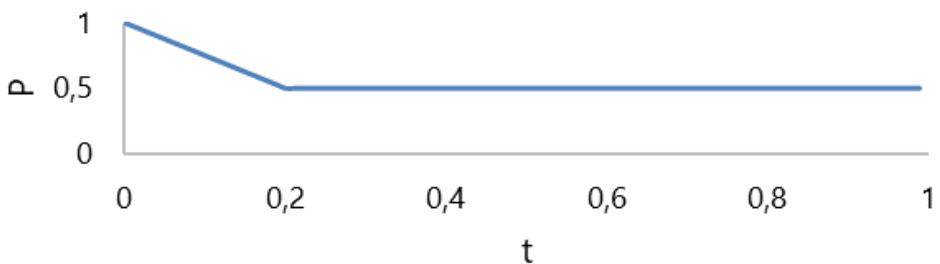


Рис. 4. Динамика изменения забойного давления на скважине $p_3(t)$

Fig. 4. Dynamics of bottom-hole pressure change at the well $p_3(t)$

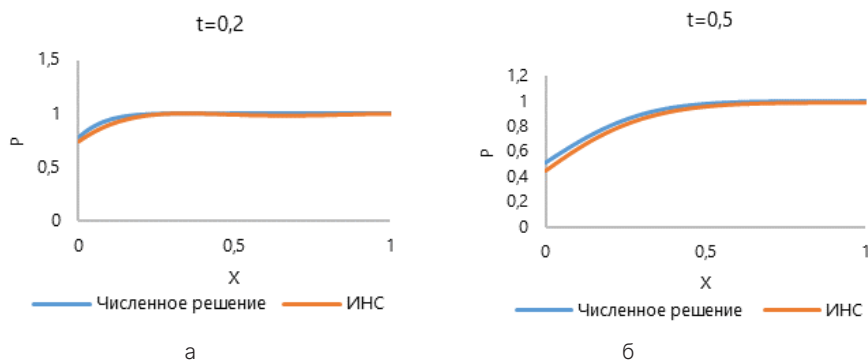


Рис. 5. Распределение давления в пласте при запуске скважины в режиме динамического забойного давления. а) Распределение давления в момент времени $t = 0,2$; б) распределение давления в момент времени $t = 0,5$

Fig. 5. Pressure distribution in the reservoir a well startup in the dynamic bottom-hole pressure mode. а) Pressure distribution at $t = 0.2$; б) pressure distribution at $t = 0.5$

Четвертый вычислительный эксперимент — запуск скважины с граничными условиями смешанного типа — (24), (25), (26):

$$p(x, 0) = 1, \text{ при } 0 \leq x \leq 1; \quad (24)$$

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = (p - p_0), \text{ при } x = 0, 0 < t \leq 1; \quad (25)$$

$$p(1, t) = 1, \text{ при } 0 < t \leq 1, \quad (26)$$

где p_0 — наперед заданное давление за границей расчетной области.

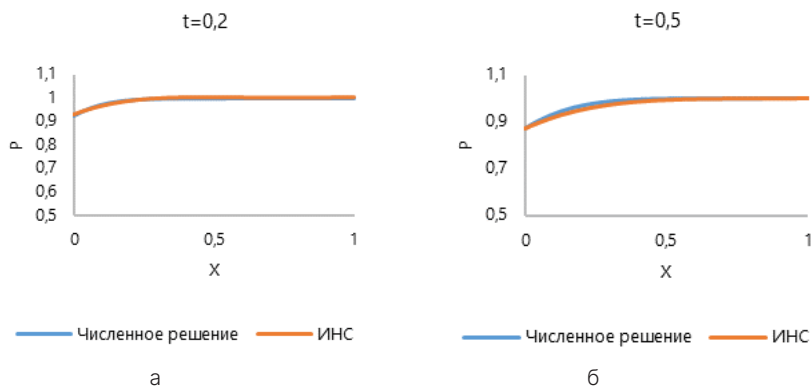


Рис. 6. Распределение давления в пласте при запуске скважины с граничным условием 3 рода. а) Распределение давления в момент времени $t = 0,2$; б) распределение давления в момент времени $t = 0,5$

Fig. 6. Pressure distribution in the reservoir a well startup with a boundary condition of the 3rd kind. а) Pressure distribution at $t = 0.2$; б) pressure distribution at $t = 0.5$

Средняя ошибка аппроксимации составляет 6,2% для условий первого рода, 1,1 % для условий второго рода, 1,9% для динамического изменения забойного давления и 0,8% для условий смешанного типа.

В целом, нейросетевая аппроксимация удовлетворительно соответствует численным значением. Исходя из трактовки теорем об универсальной аппроксимации [7], повышение точности возможно за счет увеличения числа нейронов или за счет увеличения количества слоев в нейронной сети, что потребует определения параметрической функции активаций для каждого слоя. Для подтверждения обозначенного выше утверждения проведены расчеты по оценке ошибки аппроксимации при различном количестве нейронов на промежуточном слое без изменения параметров алгоритмов оптимизации и без изменения количества эпох обучения. Целевая функция потерь представляет собой сумму квадратов невязок:

$$loss = \sum (p_{\text{факт}} - p_{\text{инс}})^2. \quad (27)$$

Значения целевой функции потерь представлены на рис. 7.

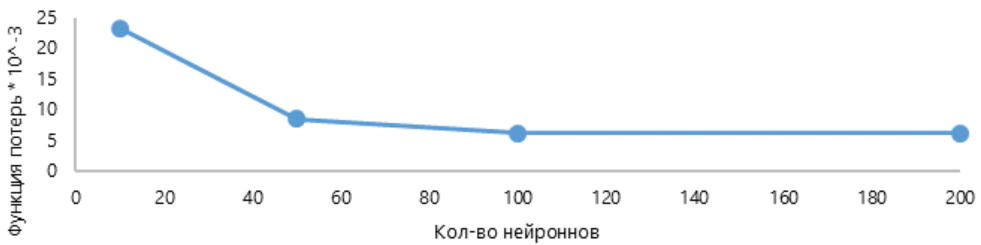


Рис. 7. Зависимость значения функции потерь от количества нейронов

Fig. 7. Dependence of the loss function value on the number of neurons

По графику 7 заметно, что на начальном этапе вычислительного эксперимента фиксируется нелинейное снижение ошибки при увеличении сложности структуры сети. Но при пересечении отметки в 100 нейронов целевая ошибка значительно не уменьшается. Объяснением этому может служить «неидеальность» существующих градиентных оптимизаторов, которые применяются при обучении нейронных сетей. «Неидеальность» заключается в том, что зачастую градиентные алгоритмы при большом количестве варьируемых параметров (весовых коэффициентов нейронной сети) могут «застрять» в локальном минимуме целевой функции и не достичь глобального минимума.

Также стоит отметить определенные сложности в обучении модели с полученной параметрической функцией активации: экспоненциальная функция не ограничена верхним пределом, что зачастую приводит к проблеме «взрывающихся градиентов» и к неустойчивому процессу обучения. Это выражается в немонотонном поведении целевой функции потерь, характеризующейся резкими скачками, особенно в начальные периоды обучения (рис. 8).

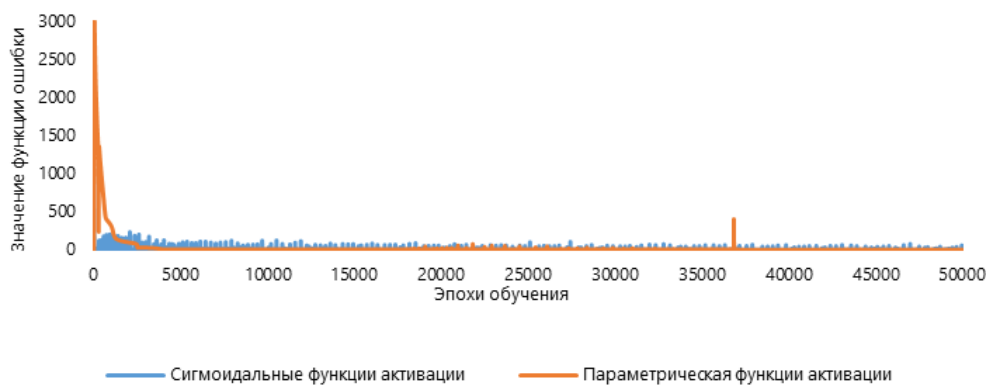


Рис. 8. Динамика изменения функции потерь в зависимости от количества эпох обучения

Fig. 8. Dynamics of the loss function change depending on the number of training epochs

Трехмерная фильтрация

Рассмотрим задачу фильтрации в трехмерном единичном кубе с непроницаемыми стенками. Рассматривается граничное условие 2 рода: фиксированный поток через одну грань куба и непроницаемыми остальными гранями (28–34) (рис. 9).

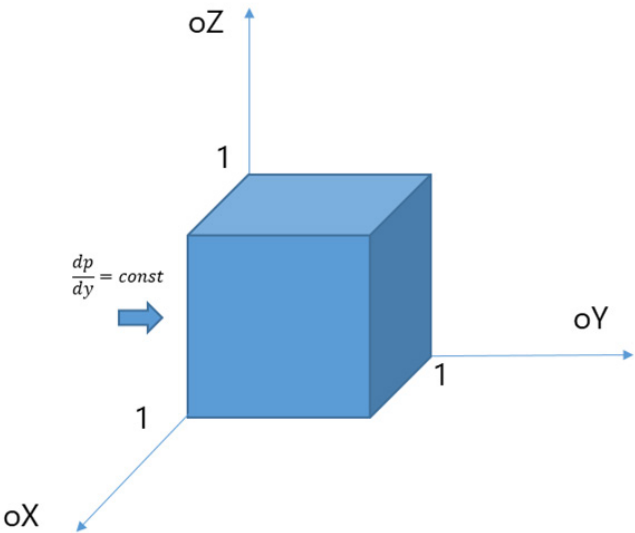


Рис. 9. Расчетная область в виде единичного куба

Fig. 9. Calculation area in the form of a single cube

$$p(0, x, y, z) = 1, \text{ при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, \quad (28)$$

$$\frac{\partial p(t, x, y, z)}{\partial y} = 0.1, \text{ при } y = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1, t > 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial p(t, x, y, z)}{\partial y} = 0, \text{ при } y = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1, t > 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial p(t, x, y, z)}{\partial x} = 0, \text{ при } x = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, t > 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial p(t, x, y, z)}{\partial x} = 0, \text{ при } x = 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, t > 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial p(t, x, y, z)}{\partial z} = 0, \text{ при } z = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1, t > 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial p(t, x, y, z)}{\partial z} = 0, \text{ при } z = 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1, t > 0. \quad (34)$$

Нейросетевая аппроксимация решения для трехмерного уравнения (1) задается в виде:

$$P(t, x, y, z) = W_2 \cdot f(W_1 \cdot (t, x, y, z) + b_1) + b_2. \quad (35)$$

Параметрическая функция активации имеет вид:

$$f(s) = \frac{\alpha \cdot (W_1[1]^2 + W_1[2]^2 + W_1[3]^2)}{W_1[0]} \exp\left(\frac{W_1[0]}{\alpha \cdot (W_1[1]^2 + W_1[2]^2 + W_1[3]^2)} s\right), \quad (36)$$

где s — выход с первого слоя нейронной сети ($W_1 \cdot (t, x, y, z) + b_1$).

Проведем вычислительный эксперимент. Сопоставление результатов аппроксимации с численным решением в различные моменты времени приведено на рис. 10–12.

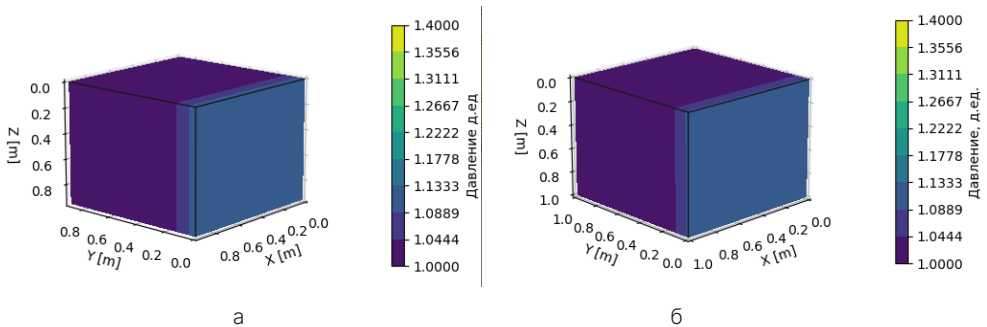


Рис. 10. Сопоставление давлений в момент времени $t = 0,2$ д. ед.

а) Численное решение; б) нейросетевая аппроксимация

Fig. 10. Pressure comparison at $t = 0.2$ by unit fraction. а) Numerical solution; б) neural network approximation

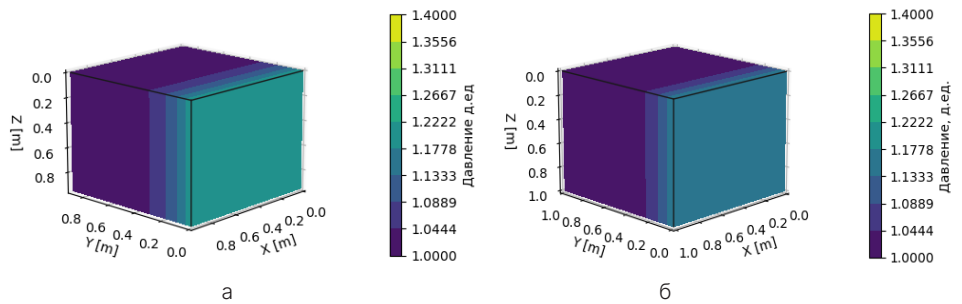


Рис. 11. Сопоставление давлений в момент времени $t = 0,5$ д. ед.
а) Численное решение; б) нейросетевая аппроксимация

Fig. 11. Pressure comparison at $t = 0.5$ by fraction units. а) Numerical solution;
б) neural network approximation

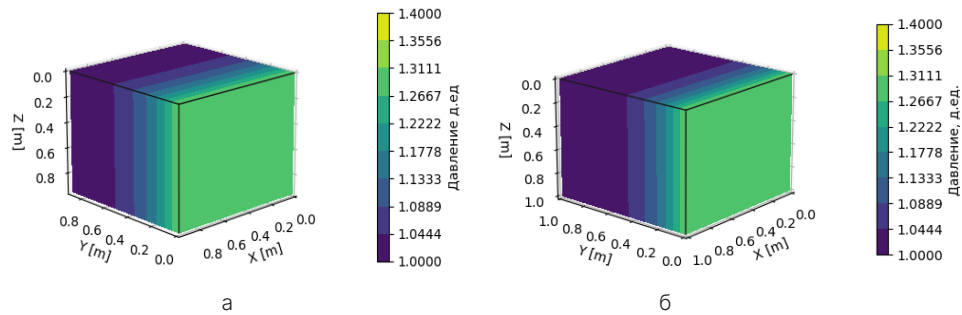


Рис. 12. Сопоставление давлений в момент времени $t = 1,0$ д. ед.
а) Численное решение; б) нейросетевая аппроксимация

Fig. 12. Pressure comparison at $t = 1.0$ by unit fraction. а) Numerical solution;
б) neural network approximation

Средняя ошибка по расчетному кубу составляет 1%. Сопоставление динамики изменения среднего давления по всей расчетной области представлено на рис. 13.

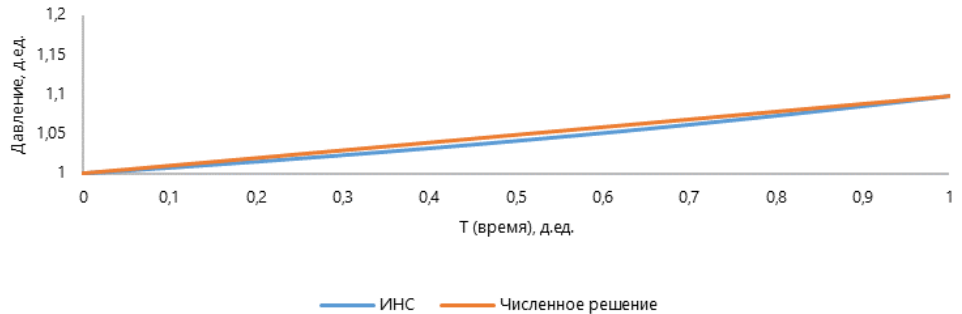


Рис. 13. Динамика изменения среднего давления по расчетной области

Fig. 13. Dynamics of the average pressure change in the calculated area

Средняя ошибка нейросетевой аппроксимации составляет 0,5% для условий второго рода, что говорит об удовлетворительном качестве аппроксимации.

Анализ перспектив и ограничений

Описанные выше результаты являются промежуточной частью общего исследования по применимости нейронных сетей для аппроксимации решений задач подземной гидродинамики. Конечная цель — создать аналитический аналог численного решения дифференциальных уравнений подземной гидродинамики с применением методов нейросетевой аппроксимации, который бы позволил достаточно оперативно решать реальные промысловые задачи.

Уже есть ряд работ, в которых авторы успешно применяют методы нейросетевого моделирования для бессеточной аналитической аппроксимации решений краевых задач. Зачастую в работах решается конкретная задача с определенными начально-краевыми условиями. Для применения метода в реальных промысловых задачах требуется возможность построения решений с учетом произвольных начально-краевых условий без переобучения сети. Полученная универсальная нейронная сеть позволит оперативно решать различные оптимизационные задачи, направленные на повышение эффективности производственной деятельности.

Имеющиеся работы по суррогатному моделированию с применением методов машинного обучения показывают, что нейронные сети способны аппроксимировать результаты прямого численного расчета в гидродинамических моделях (ГДМ) в зависимости от разнообразных сценариев расчета. Но возможность построения изначально бессеточного решения на основе только системы дифференциальных уравнений и произвольных начально-краевых условий в условиях геологической неоднородности пока не исследована. В дальнейших исследованиях будут изучены вопросы сходимости обучения нейронной сети в контексте аппроксимации краевых задач, возможности учета произвольных управляющих параметров режимов работы скважин и их произвольного расположения.

Отметим основное ограничение предлагаемого метода обоснования функции активации: метод не является универсальным, так как получено решение для линейного параболического уравнения с постоянным геологическим коэффициентом, которое можно решить аналитически. При решении более сложных задач, записанных в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений, например уравнения Бакли–Левретта, может возникнуть ситуация, где будет сложно найти аналитическое выражение для функций активации.

Выводы

В работе предложен способ получения параметрических функций активации для аппроксимации решений краевых задач линейных дифференциальных уравнений параболического типа в декартовой системе координат. Общий вид параметрической функции активации задается таким образом, чтобы при произвольных весовых коэффициентах

нейронной сети дифференциальное уравнение выполнялось в любой точке расчетной области. Подбор весовых коэффициентов производится в процессе обучения нейронной сети для выполнения заданных начальных и граничных условий.

Приведенные результаты подтверждают применимость метода для аппроксимации решений уравнения распространения давления в упругой среде — уравнения пьезопроводности в одномерном и трехмерном варианте. Максимальная ошибка нейросетевой аппроксимации по всем вариантам составляет 5% относительно аналитических и численных эталонных решений. Повышение точности нейросетевой аппроксимации возможно за счет увеличения сложности нейронной сети.

Однако есть ряд сложностей при использовании полученных функций активаций: экспоненциальные функции не ограничены верхним пределом, что приводит к неустойчивому процессу обучения нейронной сети. Требуются дальнейшие исследования влияния параметров алгоритмов оптимизации на процесс обучения нейронной сети при применении неограниченных параметрических функций активации.

Список источников

- Басниев К. С, Кочина И. Н., Максимов В. М. 1993. Подземная гидромеханика: учебник для вузов. М.: Недра. С. 227–252.
- Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. 1984. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра. 211 с.
- Бутырский Е. Ю., Кувалдин И. А., Чалкин В. П. 2010. Аппроксимация многомерных функций // Научное приборостроение. Том 20. № 2. С. 82–92.
- Вершинин В. Е., Пономарев Р. Ю. 2023. Применение методов нейросетевого моделирования при решении начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 3 (35). С. 132–147.
- Васильев А. Н., Тархов Д. А., Шемякина Т. А. 2015. Нейросетевой подход к задачам математической физики. СПб.: Нестор-История. 260 с.
- Васильев А. Н., Тархов Д. А., Шемякина Т. А. 2016. Приближенные аналитические решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Современные информационные технологии и ИТ-образование. Том 12. № 2-3. С. 188–195.
- Горбань А. Н. 1998. Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей // Сибирский журнал вычислительной техники. Том 1. № 1. С. 12–24.
- Зрелова Д. П., Ульянов С. В. 2022. Модели физически информированных/осведомленных классических Лагранжевых/Гамильтоновых нейронных сетей в глубоком обучении // Современные информационные технологии и ИТ-образование. Том 18. № 2. С. 310–325.
- Коваленко А. Н., Черноморец А. А., Петина М. А. 2017. О применении нейронных сетей для решения дифференциальных уравнений в частных производных // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. № 9 (258). С. 103–110.

- Колмогоров А. Н. 1957. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного // Доклад АН СССР. Том 114. № 5. С. 953–956.
- Хайкин С. 2019. Нейронные сети. Полный курс. М.: Вильямс. 1103 с.
- Aziz K, Settari A. 1979. Petroleum reservoir simulation. Chapman & Hall, Boca Raton.
- Cybenko G. V. 1989. Approximation by superpositions of a sigmoidal function // Mathematics of Control Signals and Systems. Vol. 2. No. 4. Pp. 303–314.
- Fraces C. G., Tchelepi H. 2021. Physics informed deep learning for flow and transport in porous media // arXiv:2104.02629. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.02629>
- Fraces C. G., Tchelepi H. 2022. Uncertainty quantification for transport in porous media using parameterized physics informed neural networks // arXiv:2205.12730. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.12730>
- Fuks O., Tchelepi H. A. 2020. Limitations of physics informed machine learning for nonlinear two-phase transport in porous media // Journal of Machine Learning for Modeling and Computing. Vol. 1. No. 1. Pp. 19–37.

References

- Basniev, K. S., Kochina, I. N., & Maksimov, V. M. (1993). *Underground hydromechanics*. Nedra. Pp. 227–252. [In Russian]
- Barenblatt, G. I., Kostov, V. M., & Ryzhik, V. M. (1984). *Movement of liquids and gases in natural formations*. Nedra. 211 p. [In Russian]
- Butyrskiy, E. Yu., Kuvaldin, I. A., & Chalkin, V. P. (2010). Approximation of multidimensional functions. *Scientific Device Development*, 20(2), 82–92. [In Russian]
- Vershinin, V. E., Ponomarev, R. Y. (2023). Application of neural network modeling methods in solving initial boundary value problems for partial differential equations. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 132–147. [In Russian]
- Vasiliev, A. N., Tarkhov, D. A., & Shemyakina, T. A. (2015). *Neural network approach to mathematical physics problems*. Nestor-Istoria. 260 p. [In Russian]
- Vasiliev, A. N., Tarkhov, D. A., & Shemyakina, T. A. (2016) Approximate analytical solutions of ordinary differential equations. *Modern Information Technologies and IT Education*, 12(2–3), 188–195. [In Russian]
- Gorban, A. N. (1998). Generalized approximation theorem and computational capabilities of neural networks. *Siberian Journal of Computer Engineering*, 1(1), 12–24. [In Russian]
- Zatrelova, D. P., & Ulyanov, S. V. (2022). Models of physically informed classical Lagrangian/ Hamiltonian neural networks in deep learning. *Modern Information Technologies and IT Education*, 18(2), 310–325. [In Russian]
- Kovalenko, A. N., Chernomorets, A. A., & Petina, M. A. (2017). On the use of neural networks for solving partial differential equations. *Scientific Bulletin of Belgorod State University. Series: Economics. Informatics*, 9(258), 103–110. [In Russian]
- Kolmogorov, A. N. (1957). On the representation of continuous functions of several variables as a superposition of continuous functions of one variable. *Doklad AN SSSR = Report of the USSR Academy of Sciences*, 114(5), 953–956. [In Russian]

- Khaykin, S. (2019). *Neural networks. Full course*. Williams. 1103 p. [In Russian]
- Aziz, K., Settari, A. (1979). *Petroleum reservoir simulation*. Chapman and Hall, Boca Raton
- Cybenko, G. V. (1989). Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control Signals and Systems*, 2(4), 303–314.
- Fraces, C. G., Tchelepi, H. (2021). Physics informed deep learning for flow and transport in porous media. *arXiv:2104.02629*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.02629>
- Fraces, C. G., Tchelepi, H. (2022). Uncertainty quantification for transport in porous media using parameterized physics informed neural networks. *arXiv:2205.12730*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.12730>
- Fuks, O., Tchelepi, H. A. (2020). Limitations of physics informed machine learning for nonlinear two-phase transport in porous media. *Journal of Machine Learning for Modeling and Computing*, 1(1), 19–37.

Информация об авторах

Роман Юрьевич Пономарев, менеджер, Тюменский нефтяной научный центр, Тюмень, Россия; аспирант, кафедра моделирования физических процессов и систем, Школа естественных наук, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия.
ryponomarev@tnnc.rosneft.ru

Information about the authors

Roman Yu. Ponomarev, Manager, Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russia; Post-graduate Student, Department of Modeling of Physical Processes and Systems, School of Natural Sciences, University of Tyumen, Tyumen, Russia
ryponomarev@tnnc.rosneft.ru