

## Решение одномерных задач теплопроводности с конвекцией с помощью интеграла Пуассона

Родион Михайлович Ганопольский✉

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
Контакт для переписки: [r.m.ganopolskij@utmn.ru](mailto:r.m.ganopolskij@utmn.ru)✉

**Аннотация.** В нефтегазовой отрасли очень актуальна проблема разработки высоковязкой нефти. Один из способов увеличения ее добычи — тепловой метод. Для моделирования процессов фильтрации необходимо объединить гидродинамические уравнения с уравнением теплопроводности. Полученные математические модели решаются разными численными методами. Точность и сходимость таких алгоритмов редко проверяется. Один из способов осуществления этой проверки — моделирование задач, которые можно в частных случаях решить аналитически. Например, для простых граничных условий применяют ряды Фурье. Другой метод — это применение интеграла Пуассона. Этот способ удобнее для сравнения с результатами численных расчетов, чем метод Фурье, т. к. при той же точности требует значительно меньше вычислений. Но для метода Пуассона требуется знание начального условия на всем пространстве, а в реальных задачах обычно оно дается в ограниченной области. В данной работе предложен алгоритм распространения начальных условий на всё пространство. Таким образом решаются две задачи теплопроводности с учетом конвекции с помощью интеграла Пуассона. Показано, что точность сопоставима с методом Фурье, но при значительно меньшем количестве вычислений.

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, температурное поле, остывание, конвекция, теплоперенос, массоперенос, интеграл Пуассона, фильтрация

**Цитирование:** Ганопольский Р. М. 2024. Решение одномерных задач теплопроводности с конвекцией с помощью интеграла Пуассона // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 10. № 1 (37). С. 41–54. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-1-41-54>

Поступила 01.02.2024; одобрена 19.02.2024; принята 22.03.2024

# Solution one-dimensional problems of heat conduction with convection using Poisson integral

Rodion M. Ganopolskij✉

University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: r.m.ganopolskij@utmn.ru✉

**Abstract.** There is the relevant problem of developing high-viscosity oil in the oil and gas industry. One of the ways increasing its production is the thermal method. It is necessary to combine hydrodynamic equations with the thermal conductivity equation for simulation of filtration processes. The resulting mathematical models are solved by using different numerical methods. The accuracy and convergence of such algorithms is rarely tested. One way to carry out this check is to simulate problems that can be solved analytically in particular cases. For example, Fourier series are used for simple boundary conditions. Another method is usage the Poisson integral. This method is more convenient for comparing results than the Fourier method, because with the same accuracy requires significantly less calculations. But the Poisson method requires knowledge of the initial condition over the entire space, and in real problems it is usually given in a limited area. In this paper we propose an algorithm for extending the initial conditions to the entire space. In this way, two heat conduction problems are solved taking into account convection using the Poisson integral. It is shown that the accuracy is comparable to the Fourier method, but with fewer calculations.

**Keywords:** heat equation, temperature field, cooling, convection, heat transfer, mass transfer, Poisson integral, filtration

**Citation:** Ganopolskij, R. M. (2024). Solution one-dimensional problems of heat conduction with convection using Poisson integral. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 10(1), 41–54. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-1-41-54>

Received Feb. 1, 2024; Reviewed Feb. 19, 2024; Accepted Mar. 22, 2024

## Введение

В нефтегазовой отрасли очень актуальна проблема разработки высоковязкой нефти. Один из способов увеличения ее добычи — тепловые методы, когда пласт перед или во время добычи углеводородов прогревают, например, с помощью воздействия

паром [Антониади и др., 2000]. Перед реализацией любого метода необходимо провести всесторонние исследования, включая моделирование при различных условиях. Так, А. Я. Гильманов и А. П. Шевелёв построили численную модель прогревания высоковязкой нефти при паровом воздействии [2021] и исследовали распределение температуры при парогравитационном дренаже [2022]. Вместе с соавторами А. Я. Гильманов проанализировал развитие теплового поля в результате пароциклической обработки пласта [2023], гидродинамическая модель при этом рассчитывалась на симуляторе tNavigator. При ряде допущений эти и другие случаи [Чернышов, Пивоварова, 2020; Жумаев, Тошева, 2022] могут быть сведены к системе уравнений, включающих уравнения теплопроводности с конвективным членом [Льков, 1978; Исаченко и др., 1981; Дульнев, 2012]. Считая коэффициенты перед производными константами, можно рассмотреть упрощенные модели, в то же время уравнения можно решить аналитически. Таким образом, возможна проверка математических моделей в этих работах на точность и сходимость. С другой стороны, известно [Башкирцева и др., 2017], что компьютерные симуляции лучше всего начинать с простых, например стационарных, решений. Поэтому точные аналитические решения позволят не проводить моделирование с начального состояния, а искать влияние нелинейных эффектов на форму и размеры теплового фронта по сравнению с линейной конвекцией.

Ранее [Ганопольский, 2023] рассматривалось аналитическое решение уравнения теплопроводности (1) с учетом конвекции методом Фурье [Тихонов, Самарский, 2004; Петровский, 2009]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2v \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Получены решения для двух одномерных задач. Первая — выравнивание температуры в области с разными температурами на границах:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \\ u(0, t) &= 1, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Вторая — остывание области с одинаковыми температурами на границах:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 1 \quad \{0 < x < l\}, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь функция  $u$  — безразмерная температура, значение 0 соответствует минимальной температуре задачи, 1 — максимальной.

В той же статье решены эти задачи без конвекции двумя способами: как с помощью метода Фурье, так и с помощью интеграла Пуассона. Если задано начальное распределение температур  $f(x)$  на всей числовой прямой, то общее решение уравнения теплопроводности находится с помощью интеграла Пуассона [Cannon, 1984]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\chi) e^{-\frac{(x-\chi)^2}{4at}} d\chi. \quad (4)$$

При интегрировании с простыми функциями получаются суммы функции ошибки [Кремер, 2023]:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\chi^2} d\chi,$$

которая при  $k \rightarrow 0$  стремится к функции Хевисайда:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{k}\right) = 2\theta(x) - 1,$$

где имеется в виду функция Хевисайда со следующим определением [Зорич, 2019]:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

При проведении исследований [Ганопольский, 2023] выстроился алгоритм решения уравнения теплопроводности с различными граничными условиями с помощью интеграла Пуассона:

- 1) находим стационарное решение исходного уравнения;
- 2) вычитаем его из неизвестной функции, для получившейся функции выводим начальное условие, граничные условия будут нулевыми;
- 3) используя метод Фурье, получаем решение;
- 4) распространяем начальное условие модифицированной функции на всё пространство, получаем решение с помощью интеграла Пуассона.

Предпоследний пункт можно не выполнять, если сразу учесть, что расширенные начальные условия должны обладать свойствами синуса — наличием периода и нечетностью. Для случая конвекции необходимо модифицировать этот алгоритм. Решим уравнение теплопроводности с учетом конвекции для двух случаев: выравнивания температуры с перепадом температур (1 — нагретая граница, 0 — вся остальная область и вторая граница) и остывания области с одинаковыми температурами на границах (на границах — 0, в остальной области — 1).

## Постановка задачи

Обезразмерим уравнение (1) по остальным величинам:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + 2q \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (5)$$

где  $z = x/l$ ,  $\tau = at/l^2$ ,  $q = vl/a$ .

Начальное и граничные условия (2) преобразуются к одному виду:

$$\begin{aligned} u(z, 0) &= \begin{cases} 1, & z = 0, \\ 0, & z > 0, \end{cases} \\ u(0, \tau) &= 1, \\ u(1, \tau) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

а условия (3) — к другому:

$$\begin{aligned} u(z, 0) &= 1 \quad \{0 < z < 1\}, \\ u(0, \tau) &= u(1, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Задача: решить уравнение (5) с начальными условиями (6) и (7) методом интеграла Пуассона (4). Рассмотрим каждое условие отдельно.

## Метод Пуассона для случая остывания с конвекцией

Решим задачу остывания области, первоначально нагретой до одной температуры, с одинаковыми граничными условиями. С помощью замены

$$u(z, \tau) = e^{qz - \tau q^2} w(z, \tau) \quad (8)$$

преобразуем уравнение (5) к виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \quad (9)$$

Если мы на интервале  $(0, 1)$  разложим функцию  $f$  по синусам, а затем согласно алгоритму распространим ее на всю числовую ось, то она будет обладать следующими свойствами синуса:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x), \\ f(x + 2n) &= f(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия для функции  $w$  совпадают с условиями для  $u$ :

$$w(0, \tau) = w(1, \tau) = 0. \quad (11)$$

Начальные условия изменились:

$$\begin{aligned} w(z, 0) &= g(z) = e^{-qz}, \\ z &\in (0, 1). \end{aligned}$$

Необходимо доопределить функцию  $g$  на всю числовую ось с учетом (10):

$$g(z) = \begin{cases} e^{-q(z-2n)}, & z \in (2n, 2n+1), \\ -e^{q(z-(2n+2))}, & z \in (2n+1, 2n+2), \\ 0, & z = n. \end{cases}$$

Полученная функция изображена на графике (рис. 1). Подставим функцию  $g$  в интеграл Пуассона (4). Вычислим его в произвольной области:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\chi_1}^{\chi_2} e^{-q\chi} e^{-\frac{(z-\chi)^2}{4\tau}} d\chi = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\chi_1}^{\chi_2} e^{-\frac{y^2-2y\chi+4q\tau\chi+\chi^2}{4\tau}} d\chi = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{(q\tau-z)q} \int_{\chi_1}^{\chi_2} e^{-\frac{(\chi-z+2q\tau)^2}{4\tau}} d\chi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(q\tau-z)q} \int_{\frac{\chi_1-z+2q\tau}{2\sqrt{\tau}}}^{\frac{\chi_2-z+2q\tau}{2\sqrt{\tau}}} e^{-\beta^2} d\beta = \\ & = \frac{1}{2} e^{(q\tau-z)q} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\chi_2-z+2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\chi_1-z+2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) \right]. \end{aligned}$$

В другом интервале области определения значение интеграла можно получить, просто поменяв знак у  $q$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\chi_1}^{\chi_2} e^{q\chi} e^{-\frac{(z-\chi)^2}{4\tau}} d\chi = \\ & = \frac{1}{2} e^{(q\tau+z)q} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\chi_2-z-2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\chi_1-z-2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) \right]. \end{aligned}$$

После обратной замены (8) полученные значения будут составлять сумму:

$$u(z, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \begin{aligned} & e^{2qn} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{(2n+1)-z+2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) - \right. \\ & \left. - \operatorname{erf}\left(\frac{2n-z+2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) \right) - \\ & - e^{(2z-(2n+2))q} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{(2n+2)-z-2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) - \right. \\ & \left. - \operatorname{erf}\left(\frac{(2n+1)-z-2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) \right) \end{aligned} \right].$$

При  $\tau \rightarrow 0$  функции ошибок стремятся к функции Хевисайда, а их разности к прямоугольной функции:

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{(2n+1)-z+2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2n-z+2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] = \\ & = \begin{cases} 2, & z \in (2n, 2n+1), \\ 0, & z \notin [2n, 2n+1], \\ 1, & z = 2n, 2n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

В интервале  $(0, 1)$  из всей суммы даст вклад только первая разность из слагаемого при  $n = 0$ . Получаем в итоге начальное условие задачи. При  $\tau \rightarrow \infty$  функции ошибок стремятся к 0, что соответствует полному остыванию области.

Два решения с учетом конвекции и без конвекции в один момент времени приведены на графике (рис. 2).

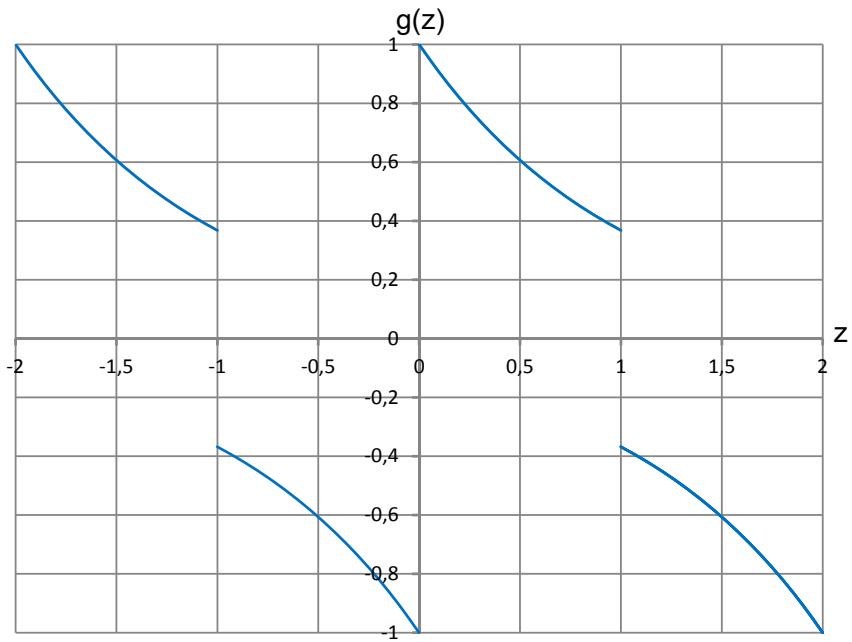


Рис. 1. Доопределенное начальное условие первой задачи

Fig. 1. Additional defined initial condition of first task

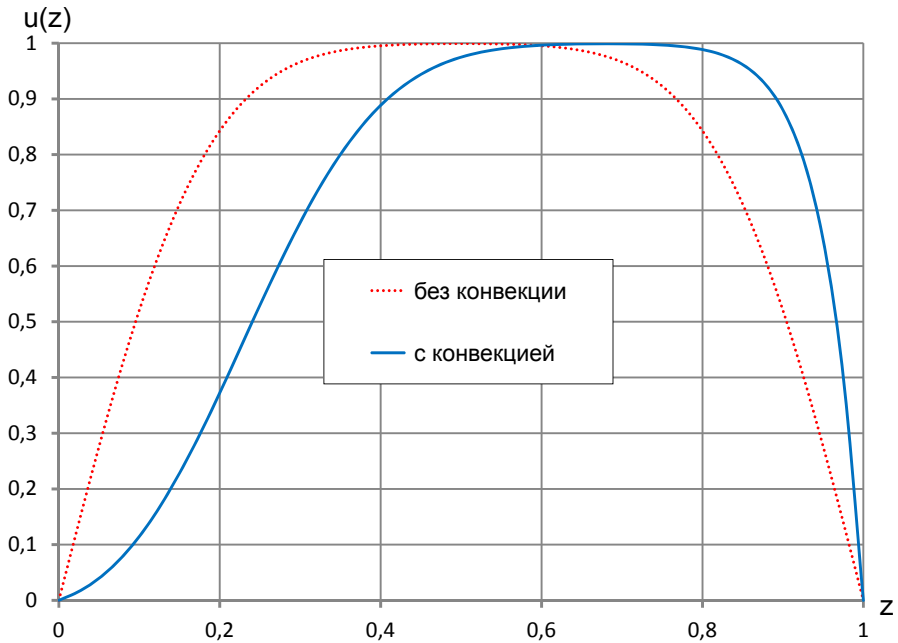


Рис. 2. Решения первой задачи с конвекцией и без нее

Fig. 2. Solutions of first task with and without convection

## Метод Пуассона для случая перепада температур с конвекцией

Граничные условия для  $w$  при замене (8) будут отличаться от исходных. После использования интеграла Пуассона и возврата к начальной функции они будут меняться со временем. Чтобы граничные условия оставались постоянными, воспользуемся другой заменой:

$$u(z, \tau) - \varphi(z) = e^{qz - \tau q^2} w(z, \tau), \quad (12)$$

где функция  $\varphi(z)$  должна, во-первых, удовлетворять граничным условиям и:

$$\varphi(z) = \begin{cases} 1, & z = 0, \\ 0, & z > 0, \end{cases}$$

а во-вторых, являться решением стационарного уравнения теплопроводности:

$$2q \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Тогда функция  $w$  будет являться решением уравнения (9) и иметь нулевые граничные условия (11). Функция  $\varphi(z)$  уже была найдена ранее [Ганопольский, 2023].

$$\varphi(z) = \frac{\exp(2q) - \exp(2qz)}{\exp(2q) - 1} = e^{qz} \frac{\text{sh}(q(1-z))}{\text{sh} q}. \quad (13)$$

Поставим (13) в (12) и найдем начальные условия для  $w$ :

$$w(z, 0) = f(z) = \frac{\text{sh}(q(z-1))}{\text{sh} q}, \quad z \in (0, 1).$$

Продолжим функцию  $f$  на всю числовую ось по алгоритму (10), при этом учтем, что гиперболический синус — нечетная функция:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\text{sh}(q(z - (2n+1)))}{\text{sh}(q)}, & z \in (2n, 2n+2), \\ 0, & z = 2n. \end{cases} \quad (14)$$

Доопределенная функция приведена на графике (рис. 3).

Подставим полученную функцию в интеграл Пуассона, воспользуемся вычисленным ранее интегралом:

$$\begin{aligned} u(z, \tau) &= e^{qz} \frac{\text{sh}(q(1-z))}{\text{sh} q} + \frac{e^{qz - \tau q^2}}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\chi) e^{-\frac{(z-\chi)^2}{4\tau}} d\chi = \\ &= \frac{1}{4 \text{sh}(q)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ e^{(2z - (2n+1))q} \left( \text{erf}\left(\frac{(2n+2) - z - 2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) - \text{erf}\left(\frac{2n - z - 2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{(2n+1)q} \left( \text{erf}\left(\frac{(2n+2) - z + 2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) - \text{erf}\left(\frac{2n - z + 2q\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) \right) \right] + \\ &\quad + e^{qz} \frac{\text{sh}(q(1-z))}{\text{sh}(q)}. \end{aligned}$$



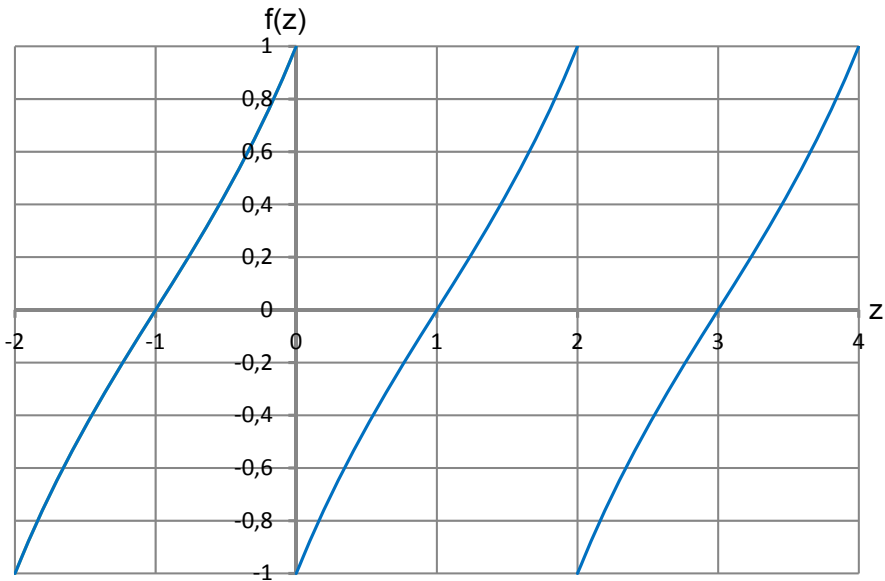


Рис. 3. Доопределенное начальное условие второй задачи

Fig. 3. Additional defined initial condition of second task

При  $\tau \rightarrow 0$  разности функций ошибок стремятся к одной и той же прямоугольной функции:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{(2n+2) - z \pm 2q\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{2n - z \pm 2q\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] = \begin{cases} 2, & z \in (2n, 2n+2), \\ 0, & z \notin [2n, 2n+2], \\ 1, & z = 2n. \end{cases}$$

В диапазоне  $(0, 1)$  из всей суммы даст вклад только слагаемое при  $n = 0$ , которое стремится к

$$-4e^{qz} \operatorname{sh}(q(1-z)).$$

При  $z \rightarrow 0$  это уже два слагаемых:  $n = 0$  и  $n = -1$ . Они будут давать значение функции  $u(0, 0) = 1$ , что совпадает с начальным условием. При  $\tau \rightarrow \infty$  функции ошибок стремятся к 0, остается только одно слагаемое

$$e^{qz} \frac{\operatorname{sh}(q(1-z))}{\operatorname{sh}(q)},$$

соответствующее стационарному решению (рис. 4).

Два решения с учетом конвекции и без конвекции в один момент времени приведены на графике (рис. 5).

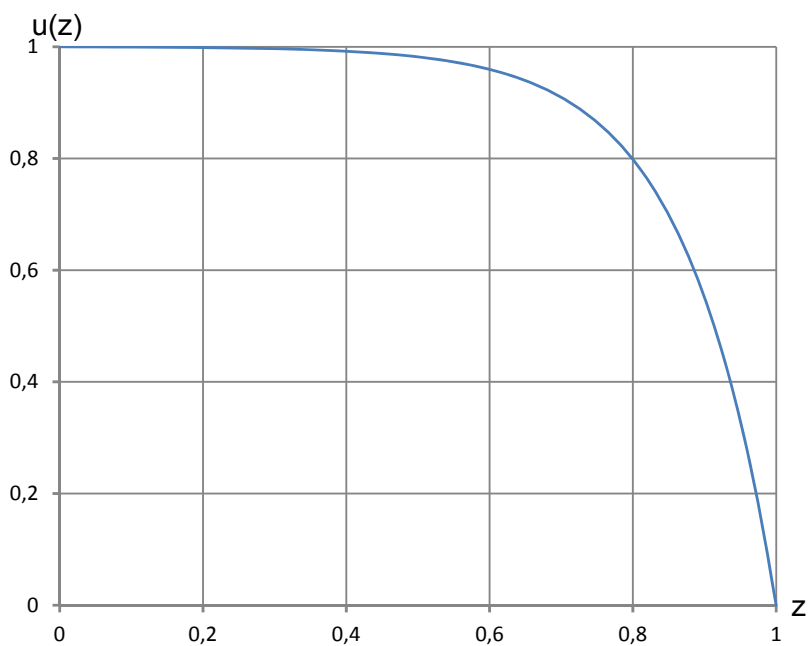


Рис. 4. Стационарное решение

Fig. 4. Stationary solution

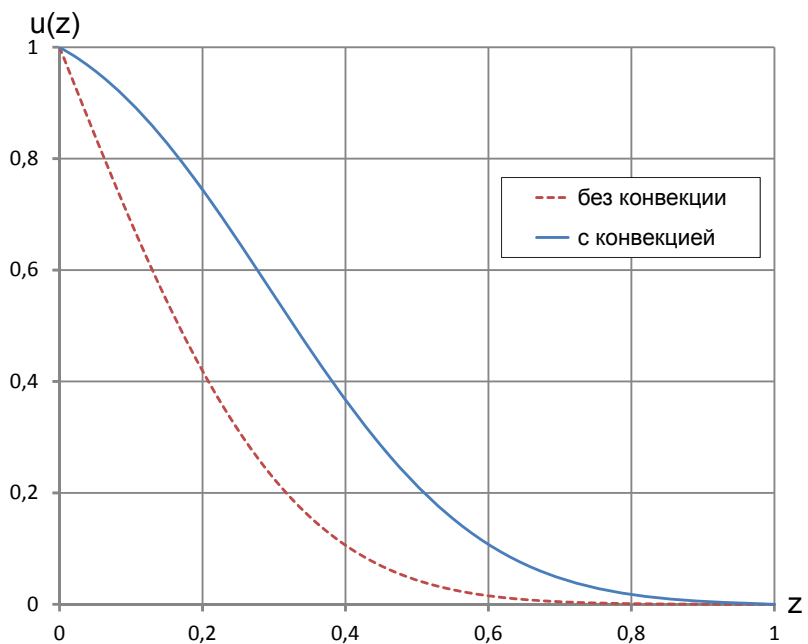


Рис. 5. Решения второй задачи с конвекцией и без нее

Fig. 5. Solutions of second task with and without convection

## Анализ результатов

С помощью интеграла Пуассона можно оценить диапазон параметра конвекции, при котором она начинает влиять на процесс теплопроводности. Также можно определить временной интервал, когда различие с бесконвекционным случаем становится заметным.

Ранее [Ганопольский, 2023] было показано, что при малых значениях времени метод Фурье не подходит, т. к. требуется суммирование огромного количества синусов. Но даже при дальнейшем увеличении времени необходимость в десятках слагаемых остается [Крайнов и др., 2009; Крайнов, Миньков, 2016; Крайнов, Моисеева, 2017]. Функции ошибок настолько быстро стремятся к крайним значениям, что основной вклад в решение вносят только несколько слагаемых. Проверка для разных значений  $q$  показала, что достаточно только считать сумму для  $n$  от  $-2$  до  $2$ . Причем для  $\tau < 0,1$  можно взять  $n$  от  $-1$  до  $1$ , т. е. всего три слагаемых. Конечно, надо учитывать, что вычисление функции ошибки на компьютере занимает больше времени, т. к. синус, во-первых, периодичен, во-вторых, его ряд Тейлора быстро сходится.

Результаты обоих методов за исключением малых времен не сильно отличаются. Графики (рис. 3 и 5) совпадают с графиками решений Фурье для тех же параметров.

## Заключение

Примерный план дальнейшего исследования метода интеграла Пуассона, его сравнения с методом Фурье и численными схемами выглядит следующим образом:

- 1) численное моделирование процесса теплопроводности с учетом конвекции разными методами: явным и неявным, методом Эйлера, методом конечных элементов и объемов;
- 2) аналитическое решение двумерной задачи уравнения теплопроводности с одной нагретой границей, в том числе с учетом конвективных потоков;
- 3) сравнение решения двумерной задачи с численными методами [Самарский, Вабищевич, 1999].

С учетом полученных в данной работе результатов можно модифицировать алгоритм, предложенный ранее [Ганопольский, 2023]:

- 1) для уравнения с учетом конвекции находим стационарное решение, которое удовлетворяет граничным условиям;
- 2) вычитаем его из исходной функции, граничные условия для полученной функции становятся нулевыми;
- 3) с помощью замены (8) получаем уравнение теплопроводности без конвекции, для модифицированной функции выводим начальное условие, граничные остаются нулевыми;
- 4) используя метод Фурье, получаем решение;
- 5) распространяем начальное условие полученной функции на всё пространство с учетом свойств синуса (нечетность и наличие периода);

- 6) получаем решение с помощью интеграла Пуассона;
- 7) с помощью обратных замен получаем решение для исходной неизвестной функции.

Метод Фурье широко применим для решения уравнения теплопроводности. При вычислении решений даже с простыми граничными условиями требуется десятки слагаемых. В начальные моменты времени даже несколько сотен членов ряда в сумме не дают физический результат. При применении интеграла Пуассона для точного и адекватного распределения температур достаточно менее десяти слагаемых.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- Антониади Д. Г., Гарушев А. Р., Ишиханов В. Г. 2000. Настольная книга по термическим методам добычи нефти. Краснодар: Советская Кубань. 462 с.
- Башкирцева И. А., Рязанова Т. В., Ряшко Л. Б. 2017. Компьютерное моделирование нелинейной динамики: непрерывные модели: учеб. пос. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та. 84 с.
- Ганопольский Р. М. 2023. Аналитическое решение уравнения теплопроводности с учетом конвекции с изотермическими граничными условиями // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 3 (35). С. 66–82. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-66-82>
- Гильманов А. Я., Шевелёв А. П. 2021. Моделирование пароциклического воздействия на нефтяные пласты с учетом конвективных потоков // Экспериментальные методы исследования пластовых систем: проблемы и решения. С. 82.
- Гильманов А. Я., Шевелёв А. П. 2022. Расчет распределения температуры в пласте на стадии инициации процесса парогравитационного дренажа // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. Том 333. № 5. С. 108–115. <https://doi.org/10.18799/24131830/2022/5/3489>
- Гильманов А. Я., Ковальчук Т. Н., Скобликов Р. М., Фёдоров А. О., Ходжиев Ё. Н., Шевелёв А. П. 2023. Анализ влияния теплофизических параметров пласта и флюида на процесс пароциклического воздействия на нефтяные пласты // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 3 (35). С. 6–27. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-6-27>
- Дульнев Г. Н. 2012. Теория тепло- и массообмена. СПб.: НИУ ИТМО. 195 с.
- Жумаев Ж., Тошева М. М. 2022. Моделирование стационарной теплопроводности при свободной конвекции в ограниченном объеме // Universum: технические науки. № 4–3 (97). С. 34–37.
- Зорич В. А. 2019. Математический анализ. Часть II. Изд. 9-е, испр. М.: МЦНМО. 676 с.
- Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. 1981. Теплопередача. Изд. 4-е, перераб. и доп. М.: Энергоиздат. 416 с.
- Крайнов А. Ю., Рыжих Ю. Н., Тимохин А. М. 2009. Численные методы в задачах теплопереноса: учеб.-метод. пос. Томск: Томский гос. ун-т. 114 с.
- Крайнов А. Ю., Миньков Л. Л. 2016. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса: учеб. пос. Томск: СТП. 92 с.
- Крайнов А. Ю., Моисеева К. М. 2017. Конвективный теплоперенос и теплообмен: учеб. пос. Томск: СТП. 80 с.

- Кремер Н. Ш. 2023. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. и практикум для вузов. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт. 538 с.
- Лыков А. В. 1978. Теплообмен: справ. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергия. 479 с.
- Петровский И. Г. 2009. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Физматлит. 207 с.
- Самарский А. А., Вабищевич П. Н. 1999. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М: Эдиториал УРСС. 248 с.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. 2004. Уравнения математической физики: учеб. для студентов физ.-мат. спец. ун-тов. 7-е изд. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, Наука. 798 с.
- Чернышов В. Е., Пивоварова И. И. 2020. Численное решение уравнения теплопроводности на примере расчета потерь количества тепла при нагнетании горячей воды в скважину // Студент года 2020: сб. ст. 15-го Междунар. науч.-исслед. конкурса. Пенза: Наука и Просвещение. С. 8–13.
- Cannon J. R. 1984. The One-Dimensional Heat Equation. Cambridge University Press. 512 pp.

## References

- Antoniadi, D. G., Garushev, A. R., & Ishikhanov, V. G. (2000). *A handbook on thermal methods of oil production*. Sovetskaya Kuban. [In Russian]
- Bashkirtseva, I. A., Ryazanova, T. V., & Ryashko, L. B. (2017). *Computer modeling of nonlinear dynamics: Continuous models*. Ural University Publishing House. [In Russian]
- Ganopolskij, R. M. (2023). Analytical solution of heat equation taking into account convection with isothermal boundary conditions. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 66–82. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-66-82> [In Russian]
- Gilmanov, A. Ya., & Shevelev, A. P. (2021). Modeling of steam-cyclic impact on oil reservoirs taking into account convective flows. *Experimental methods for studying reservoir systems: Problems and solutions* (p. 82). [In Russian]
- Gilmanov, A. Ya., & Shevelev, A. P. (2022). Calculation of temperature distribution in a reservoir at the initiation stage of steam-assisted gravity drainage. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 333(5), 108–115. <https://doi.org/10.18799/24131830/2022/5/3489> [In Russian]
- Gilmanov, A. Ya., Kovalchuk, T. N., Skoblikov, R. M., Fedorov, A. O., Khodzhiev, Ye. N., & Shevelev, A. P. (2023). Analysis of the influence of the thermophysical parameters of the reservoir and fluid on the process of cyclic steam stimulation. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 6–27. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-6-27> [In Russian]
- Dulnev, G. N. (2012). *Theory of heat and mass transfer*. NRU ITMO. [In Russian]
- Jumayev, Ju., & Tosheva, M. M. (2022). Simulation of stationary thermal conductivity under free convection in a limited volume. *Universum: Engineering Sciences*, (4–3), 34–37. [In Russian]
- Zorich, V. A. (2019). *Mathematical analysis. Part II* (9<sup>th</sup> ed.). Moscow Center for Continuous Mathematical Education. [In Russian]
- Isachenko, V. P., Osipova, V. A., & Sukomel, A. S. (1981). *Heat transfer* (4<sup>th</sup> ed.). Energoizdat. [In Russian]

- Krainov, A. Yu., Ryzhykh, Yu. N., & Timokhin, A. M. (2009). *Numerical methods in heat transfer problems*. Tomsk State University. [In Russian]
- Krainov, A. Yu., & Minkov, L. L. (2016). *Numerical methods for solving problems of heat and mass transfer*. STI. [In Russian]
- Krainov, A. Yu., & Moiseeva, K. M. (2017). *Convective heat transfer and heat transfer*. STI. [In Russian]
- Kremer, N. Sh. (2023). *Probability theory and mathematical statistics* (5<sup>th</sup> ed.). Urait. [In Russian]
- Lykov, A. V. (1978). *Heat and mass transfer* (2<sup>nd</sup> ed.). Energiya. [In Russian]
- Petrovsky, I. G. (2009). *Lectures on the theory of ordinary differential equations*. Fizmatlit. [In Russian]
- Samarsky, A. A., & Vabishchevich, P. N. (1999). *Numerical methods for solving convection-diffusion problems*. Editorial URSS. [In Russian]
- Tikhonov, A. N., & Samarsky, A. A. (2004). *Equation of mathematical physics* (7<sup>th</sup> ed.). Moscow State University, Nauka. [In Russian]
- Chernyshov, V. E., & Pivovarova, I. I. (2020). Numerical solution of the thermal conductivity equation on the example of calculating the loss of the heat amount when injecting of hot water into the well. *Student of the year 2020: Collection of articles of the 15<sup>th</sup> International research competition* (pp. 8–13). Nauka i Prosveshchenie. [In Russian]
- Cannon, J. R. (1984). *The one-dimensional heat equation*. Cambridge University Press.

## Информация об авторе

*Родион Михайлович Ганопольский*, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой моделирования физических процессов и систем, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия; научный руководитель, Центр коллективного пользования высокопроизводительных вычислений, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
r.m.ganopolskij@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7682-9830>

## Information about the author

*Rodion M. Ganopolskij*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia; Scientific Supervisor, Center for Shared Use of High-Performance Computing, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
r.m.ganopolskij@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7682-9830>