

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Алексей Сергеевич ШЛЯПКИН<sup>1</sup>  
Алексей Викторович ТАТОСОВ<sup>2</sup>

удк 501.1, 622.276.66

## ЧИСЛЕННАЯ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

<sup>1</sup> ведущий специалист отдела проектирования и мониторинга разработки Южно-Ягунского месторождения Управления проектирования и мониторинга разработки месторождений ТПП «Когалымнефтегаз» и ТПП «Повхнефтегаз», филиал ООО «ЛУКОЙЛ-Инжиниринг» «КогалымНИПИнефть» в г. Тюмени  
shlyapkinAS@lukoil.tmn.ru

<sup>2</sup> доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики и механики, Институт математики и компьютерных наук, Тюменский государственный университет  
atatosov@utmn.ru

### Аннотация

В настоящее время ведется активная политика импортозамещения, продиктованная введенными международными санкциями, что создает потребность в поиске оптимальных инженерных решений, в частности, в области создания российского программного обеспечения.

**Цитирование:** Шляпкин А. С. Численная и программная реализация одномерной математической модели гидроразрыва пласта / А. С. Шляпкин, А. В. Татосов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2021. Том 7. № 1. С. 126-145.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2021-7-1-126-145

В вопросах изучения и проектирования гидроразрыва пласта зачастую опираются на результаты моделирования в специализированных симуляторах. Появление на рынке программного обеспечения российских продуктов безусловно задает правильный вектор развития, однако некоторые аспекты не реализованы в существующих математических моделях.

Авторами представляется модель, позволяющая рассмотреть детально процесс движения частиц проппанта в трещине гидроразрыва. Выбранное направление является важным с точки зрения расчета полости трещины и уточнения ее продуктивности, поскольку поведение частиц оказывает значительное влияние как на потенциал роста трещины, так и на ее форму.

Предложенная и реализованная численно математическая модель положена в основу авторского программного комплекса, который позволяет решать основные задачи проектирования при выполнении операции гидроразрыва пласта.

#### **Ключевые слова**

Гидроразрыв пласта, трещина гидроразрыва, проппант, математическая модель, численная схема, симулятор гидроразрыва.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2021-7-1-126-145**

#### **Введение**

В работе рассматривается численная реализация одномерной математической модели гидроразрыва пласта, в основу которой положена известная PKN-постановка [4, 11], уточненная авторами в работах [7-9]. Система уравнений дополнена уравнением неразрывности из представления Христиановича [1, 10]. Приводится описание численной схемы, производится исследование на устойчивость с применением теории спектрального анализа.

Решенная численно модель гидроразрыва заложена в качестве математического аппарата авторского программного комплекса TSH FRAC [6], который позволяет на этапе предпроектной подготовки выполнять экспресс-анализ геометрических параметров трещины гидроразрыва, оценивать себестоимость проведенных мероприятий, а также возможные технологические риски, возникающие при проведении операции гидроразрыва.

Представленный программный комплекс ориентирован на использование специалистами нескольких смежных направлений, занимающихся инжиниринговым сопровождением проектов. Отчетность, сформированная и экспортированная из TSH FRAC, имеет формат .xls, что позволяет работать с ней на любом ПК с установленным офисным пакетом приложений MS Office, без предустановленного специализированного ПО.

#### **Методология исследования**

В работе представлена формализованная постановка задачи о развитии трещины гидроразрыва при закачке вязкой жидкости в продуктивный пласт.

Численное исследование представленной модели средствами математического моделирования предполагает выбор эффективной расчетной схемы при дискретизации модели с учетом особенностей параллельных вычислений, приводится обоснование выбора схемы и исследование на устойчивость.

По результатам проведенного исследования приводится интерпретация полученных решений и оценивается конкурентное преимущество перед существующими математическими моделями гидроразрыва пласта.

Проверка адекватности модели выполнена авторами в работе [9] посредством сравнения результатов расчета с решениями, полученными на коммерческих аналогах.

Реализованная численно математическая модель положена в основу спроектированного, выполненного на языке программирования C#, лицензированного программного комплекса для расчета и оценки параметров трещины гидроразрыва. В работе приведено описание основных принципов работы комплекса и оценка результатов вычислений.

#### Математическая постановка задачи

В данном разделе приведена математическая постановка задачи из работ [7-9].

Подробный вывод основных уравнений не приводится. Согласно методологии исследования, запишем формализованную математическую постановку задачи гидроразрыва, корректность которой была показана в работе [7]. Полная система дифференциальных уравнений, записанная через функцию потока, имеет следующий размерный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= -2v, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= -\frac{2}{1-\alpha}v - \frac{\alpha}{1-\alpha}w, \\ \frac{\partial(\alpha\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha q)}{\partial x} &= -\frac{2\alpha}{1-\alpha}v - \frac{\alpha}{1-\alpha}w, \\ q &= -\frac{b}{12\eta_\alpha}\varepsilon^3 \frac{\partial \delta}{\partial x}, \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{v}{\beta}, \\ p &= b\delta, b = \frac{4\mu_\sigma}{\pi(1-\nu_\sigma)h}; v = \begin{cases} v_n, & \varepsilon > 0 \\ 0, & \varepsilon = 0 \end{cases}, w = \begin{cases} \frac{\delta}{h}w_g, & \varepsilon > 0, \\ 0, & \varepsilon = 0 \end{cases}, \\ v_n &= \frac{kb\delta}{\eta Y}; w_g = \frac{(1-\alpha_*)\eta}{\eta_\alpha}w_{g0}, w_{g0} = \frac{2(\rho_p - \rho_l)gr^2}{9\eta}, \\ \eta_\alpha &= \eta(1-\alpha)^{-m}, \end{aligned} \tag{1}$$

где параметры  $v$  и  $w$  отличны от нуля лишь в области  $\varepsilon$ , свободной от осадка.

Условные обозначения:  $v$  — скорость фильтрации, м/с;  $u$  — средняя продольная скорость потока, м/с;  $q$  — поток смеси, м<sup>3</sup>/с;  $w_g$  — скорость падения взвешенных частиц смеси, м/с;  $\alpha = \alpha_2/\alpha_*$  — объемное содержание проппанта, д. ед.;  $\alpha_2$  — объемное содержание дисперсной фазы в подаваемой смеси, д. ед.;  $\alpha_*$  — предельное объемное содержание дисперсной фазы, д. ед.;  $\eta_\alpha$  — вязкость подаваемой смеси, Па·с;  $\beta$  — объемное содержание жидкости гидроразрыва в пласте, д. ед.;  $k$  — величина проницаемости породы, мкм<sup>2</sup>;  $\nu_\sigma$  — коэффициент Пуассона, безразмерный;  $\mu_\sigma$  — модуль сдвига материала, Па, который связан с модулем Юнга;  $p$  — избыточное давление в трещине, Па;  $h$  — высота трещины, м;  $\rho_p$  и  $\rho_l$  — плотности частиц проппанта и жидкости гидроразрыва соответственно, кг/м<sup>3</sup>;  $r$  — радиус частиц, м;  $g$  — ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $\alpha_*$ ,  $m$  — постоянные величины.

Система (1) дополняется граничным условием на носике трещины:

$$x = L(t) : \delta = 0, \quad (2)$$

что соответствует нулевому раскрытию, а также граничным условием на входе в трещину. В рассматриваемой задаче осуществляется проведение процесса гидроразрыва с постоянным расходом жидкости на входе, что соответствует зачастую реальным технологическим режимам:

$$q(0, t) = \varepsilon(0, t) u(0, t) = \frac{Q(t)}{2h}, \alpha(0, t) = A(t), \quad (3)$$

трещина развивается симметрично относительно ствола скважины, поэтому  $Q(t)$  — полный объемный расход смеси, идущий на формирование двух крыльев трещины, м<sup>3</sup>/с.

*Описание численной схемы. Устойчивость*

Для решения системы применена явная разностная схема типа «крест» [2, 3, 5]. Выбор данной схемы обусловлен особенностями реализации программного комплекса TSH FRAC, связанными с возможностью проведения вычислений на сервере, что в данном случае упрощает «распараллеливание» схемы при выполнении вычислений. Известно, что накладываемое на явную схему условие устойчивости потребует уменьшения шага интегрирования, однако в случае выполнения вычислений на высокопроизводительном сервере данное обстоятельство не является критичным. При этом использование данной схемы также определяет возможность «простого» разбиения расчетной области на подобласти с возможностью поиска значений искомой функции на нескольких вычислительных единицах с последующим сшиванием решений.

Пространственный шаг обозначен через  $\Delta x$ , шаг по времени —  $\Delta t$ , число Куранта —  $Kr = \Delta t/\Delta x$ .

Сеточные функции средней ширины трещины, ширины свободной области, концентрации частиц и глубины пропитки на временном слое « $j$ » принимаются соответственно:

$$\delta_i^j, \varepsilon_i^j, \alpha_i^j, Y_i^j;$$

функция потока аппроксимируется со смещением на полшага, что является довольно распространенным приемом, влияющим на устойчивость:

$$q_{k+1/2}^j.$$

Функции скорости утечки жидкости гидроразрыва в породе и скорости гравитационного осаждения частиц смеси определены следующим образом:

$$v_i^j = \begin{cases} \frac{kb}{\eta} \frac{\delta_i^j}{Y_i^j}, \varepsilon_i^j > 0, \\ 0, \varepsilon_i^j = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$w_i^j = \begin{cases} \frac{1}{h} \delta_i^j (1 - \alpha_* \alpha_i^j) (1 - \alpha_i^j)^m w_{g0}, \varepsilon_i^j > 0, \\ 0, \varepsilon_i^j = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Общий поступательный поток смеси запишется выражением:

$$q_{i+1/2}^j = -\frac{b}{12\eta} \left(1 - \frac{\alpha_{i+1}^j + \alpha_i^j}{2}\right)^m \left(\frac{\varepsilon_{i+1}^j + \varepsilon_i^j}{2}\right)^3 \frac{\delta_{i+1}^j - \delta_i^j}{\Delta x}, \quad (6)$$

в граничном узле  $q_{1/2}^j$  и  $\alpha_0^j$  — есть заданные функции времени.

Далее осуществляется переход на новый временной слой « $j + 1$ ». Определение ширины трещины, ширины свободной области и объемное содержание взвешенных частиц выполнено соответственно:

$$\begin{aligned} \delta_i^{j+1} &= \delta_i^j - Kr(q_{i+1/2}^j - q_{i-1/2}^j) - 2v_i^j \Delta t, \\ \varepsilon_i^{j+1} &= \varepsilon_i^j - Kr(q_{i+1/2}^j - q_{i-1/2}^j) - \frac{2}{1 - \alpha_i^j} v_i^j \Delta t - \frac{\alpha_i^j}{1 - \alpha_i^j} w_i^j \Delta t, \\ \alpha_i^{j+1} \varepsilon_i^{j+1} &= \alpha_i^j \varepsilon_i^j - Kr \left( \frac{\alpha_{i+1}^j + \alpha_i^j}{2} q_{i+1/2}^j - \frac{\alpha_{i+1}^j + \alpha_i^j}{2} q_{i-1/2}^j \right) - \\ &\quad - \frac{2\alpha_i^j}{1 - \alpha_i^j} v_i^j \Delta t - \frac{\alpha_i^j}{1 - \alpha_i^j} w_i^j \Delta t. \end{aligned} \quad (7)$$

В дальнейшем осуществляется переход на следующий временной слой и процедура повторяется. Система алгебраических уравнений (7) решается методом прогонки.

Используемая разностная схема со смещенными потоками

$$\delta_i^j, q_{i+1/2}^j, \dots ;$$

аппроксимирует систему дифференциальных уравнений (1) с точностью  $O(\Delta t + (\Delta x)^2)$  [5].

Для исследования устойчивости схемы применяется метод гармоник. Анализ проводится для линеаризованной постановки, границу отодвигается на бесконечность и полагается отсутствие фильтрации в породе. Разностное уравнение (6) и уравнение для определения ширины трещины в случае отсутствия утечек из (7) примут вид:

$$\begin{aligned} q_{k+1/2}^j &= -a^2 \frac{\delta_{k+1}^j - \delta_k^j}{\Delta x}, \\ \delta_k^{j+1} &= \delta_k^j - Kr(q_{k+1/2}^j - q_{k-1/2}^j), \end{aligned} \quad (8)$$

что сводится к разностному уравнению:

$$\frac{\delta_k^{j+1} - \delta_k^j}{\Delta t} = a^2 \frac{\delta_{k+1}^j - 2\delta_k^j + \delta_{k-1}^j}{(\Delta x)^2}, \quad a^2 > 0. \quad (9)$$

К рассмотрению принимаются частные разностные решения вида

$$\delta_k^j = \delta_0 + \delta_m q^j \xi^k, \quad (10)$$

где  $\xi = e^{i\varphi}$ ;  $\delta_m$  — амплитуда гармоники,  $i$  — мнимая единица,  $\varphi$  — произвольное действительное число,  $q(\varphi)$  — комплексное число, подлежащее определению. Для пространственной периодичности полагается  $\varphi = 0$ .

В результате может быть записано однородное уравнение:

$$\frac{q^{j+1} \xi^k - q^j \xi^k}{\Delta t} = a^2 \frac{q^j \xi^{k+1} - 2q^j \xi^k + q^j \xi^{k-1}}{(\Delta x)^2}, \quad (11)$$

или иначе

$$\frac{q - 1}{\Delta t} = a^2 \frac{\xi - 2 + 1/\xi}{(\Delta x)^2}. \quad (12)$$

Учитывая, что

$$\xi = e^{i\varphi}, \quad \xi^{-1} = e^{-i\varphi},$$

правая часть (12) запишется:

$$\begin{aligned} \frac{\xi - 2 + \xi^{-1}}{(\Delta x)^2} &= \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{(\Delta x)^2} = \\ &= \frac{2 \cos \varphi - 2}{(\Delta x)^2} = \frac{-4 \sin^2(\varphi/2)}{(\Delta x)^2} = -k^2 < 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $k$  — некоторое действительное число, не равное нулю. Следовательно, (12) с учетом (13) перепишется:

$$q = 1 - a^2 k^2 \Delta t, \quad (14)$$

так что при достаточно малом  $\Delta t$  видно, что  $|q| < 1$ , это означает «устойчивость» представленной численной схемы (гармоники со временем затухают).

Условие устойчивости может быть получено из выражения (15), для этого (14) следует переписать в виде:

$$q = 1 - 4ra^2 \sin^2(\varphi/2), r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}. \quad (15)$$

Спектр оператора послыоного перехода для (8) расположен на отрезке  $[1 - 4ra^2; 1]$  (рис. 1).

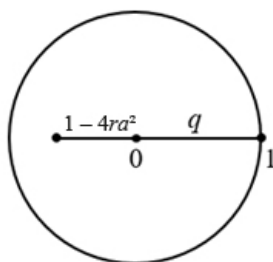


Рис. 1. Спектр оператора

Fig. 1. Operator's spectre

Для выполнения условия устойчивости требуется выполнение неравенства:

$$1 - 4ra^2 \geq -1, r \leq \frac{1}{2a^2}, \Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2a^2}. \quad (16)$$

## Результаты

### Описание программного комплекса TSH FRAC

Исследованная численно система уравнений (1) положена в основу авторского программного комплекса TSH FRAC.

Программный комплекс создан с использованием языка программирования С#. Произведена государственная регистрация комплекса, получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ «TSH FRAC Программный комплекс для моделирования геометрических параметров трещины при проведении гидроразрыва пласта, определения стоимости мероприятия и оценки рисков» [6].

Программный комплекс создан для выполнения экспресс-оценки параметров трещины гидроразрыва пласта, определения затрат на проведение, учета возможных рисков и осложнений при проведении мероприятия. Расчетные данные, полученные в ходе внутренних вычислений, могут быть визуализированы, выгружены в виде таблиц, рисунков, сводных отчетов. Программный комплекс предназначен для использования специалистами различных профильных специальностей, связанных с инженерным сопровождением и экономическими расчетами.

Общая структура комплекса представлена в виде блок-схемы на рис. 2.

При реализации использована архитектура «Клиент-Сервер». Процесс вычисления геометрии трещины может требовать большого количества итераций, особенно при многовариантных расчетах, что ведет к высокой нагрузке на персональный компьютер (далее ПК). Поскольку ПК инженеров большинства компаний

не всегда отвечают требованиям высокой производительности, было принято решение вынести вычислительную часть в отдельное приложение программного комплекса, которое будет выполняться на высокопроизводительной рабочей станции — сервере вычислений.

Клиентская часть (клиент) позволяет сформировать параметры и отправить их в виде запроса на вычисление серверу вычислений, принять и визуализировать ответ — результат вычисления. Как кейс использования, пользователь может отправить запрос на потенциально длительное вычисление, свернуть клиентское программное обеспечение, заниматься другими задачами, не занимая процессорное время своего ПК.

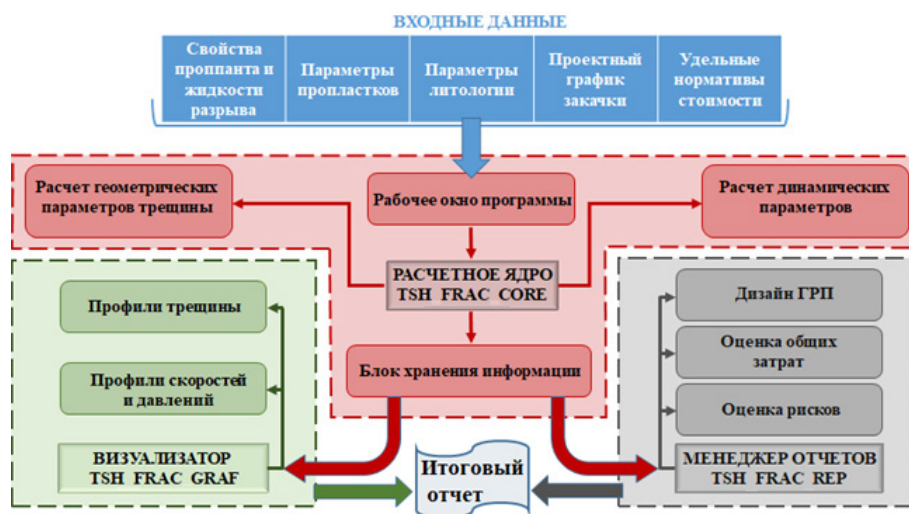


Рис. 2. Схематическое представление модульной структуры программного комплекса TSH FRAC

Fig. 2. A schematic representation of a module structure of the program complex TSH FRAC

Сервер вычислений принимает запросы на вычисление от клиентов, и для каждого такого запроса формирует вычислительный поток в пуле потоков. В конфигурационном файле приложения сервера вычислений можно задать порт, на котором прослушиваются запросы на вычисление от клиентов, а также максимальное количество потоков, которое можно активировать в процессе одновременно. Если все потоки в пуле заняты, дополнительные рабочие элементы помещаются в очередь и ожидают их освобождения (рис. 3).

Последовательность при работе выглядит следующим образом:

- 1) пользователь вводит параметры вычисления в окне клиента и нажимает «Расчет геометрии трещины»;
- 2) клиент устанавливает TCP-соединение (Transmission Control Protocol, протокол управления передачей) с сервером и посылает текстовый запрос с параметрами;



- 3) сервер принимает текстовый запрос, формирует выделенный поток в пуле потоков для запуска вычисления с принятыми параметрами;
- 4) по окончании расчета сервер отправляет ответ клиенту с результатом и журналом расчета.

К достоинствам подобной архитектуры можно отнести:

- снижение требований к производительности ПК инженеров. У конечных пользователей остается достаточное количество производственной мощности для локальной работы;
- возможность модернизации системы при изменении потребностей. Например, при добавлении нового расчета, изменении алгоритма текущего расчета.
- простоту распараллеливания вычислений при использовании представленной явной численной схемы.

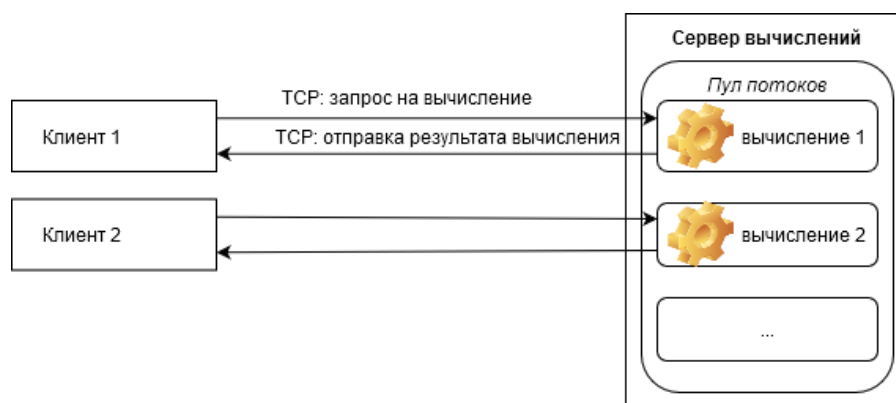


Рис. 3. Алгоритм взаимодействия

Fig. 3. The interaction algorithm

### Обсуждение результатов

Проведем краткое описание принципа работы представленного комплекса программ TSH FRAC и результатов вычислений.

В рабочее окно программы загружается некоторый объем информации, включающий в себя следующие обязательные данные (в системе СИ):

- 1) параметры жидкости разрыва и проппантов: тип проппанта, масса и концентрация проппанта, тип жидкости разрыва;
- 2) параметры пласта: литология, отметки глубин, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, проницаемость пласта, пористость пласта;
- 3) программа закачки: время закачки оторочки, общее время закачки, расход жидкости разрыва, время продавки, начальная и конечная концентрации;
- 4) удельные нормативы стоимости: компонент, подготовки смеси, оборудования, проведения отдельных операций, транспортировки, оплаты труда, замены насосного оборудования.

Для создания/сохранения файла проекта предусмотрен специальный внутренний формат .tsh.

В рабочем окне программы расположен пункт меню «Настройки», в соответствующих вкладках которого прописываются параметры выполнения расчета, настройки подключения к удаленному серверу расчетов, настройки визуализации.

Запуск расчета осуществляется по нажатию на кнопку «расчет геометрии трещины». Последовательно может быть выполнено несколько расчетов. Для визуализации процесса вычислений запускается «журнал расчета», в котором отображается информация по выполняемым расчетам, расчетное время (рис. 4). По окончании выполнения выводится сообщение, в случае возникновения ошибки также выводится соответствующее оповещение.

Расчет параметров трещины, вывод графической информации в рабочем окне программы осуществляется при обращении к соответствующим пунктам меню (рис. 5). При этом предусмотрен экспорт указанной информации в виде отчетов в формате Excel, которые могут быть использованы профильными специалистами для анализа успешности проведения операций, оценки затратной части и рисков, сопряженных с недостижением проектных показателей (рис. 6).

Оценка рисков, сопряженных с выполнением ГРП, может быть произведена с использованием пользовательских сценариев. Диапазон значений исходных и вычисляемых параметров определяется пользователем, после наступления события выводится соответствующее сообщение, содержащие текст предупреждения (рис. 7).

#### *Пример определения события*

В пласт закачивается вязкая жидкость разрыва, при этом есть вероятность, что инженер может совершить ошибку при выборе вязкости геля (занизить) для конкретного типа проппанта. В рабочем окне, например, определяется значение минимальной проектной длины трещины. Заданное искомое значение может быть определено экспресс-методом по аналогии с ранее проведенными ГРП. Если указанная величина в ходе выполнения расчета не достигается, то выводится сообщение «Проектная длина не может быть достигнута по причине низкой несущей способности геля. Требуется увеличение вязкости». Инженер, выполняющий расчет, получает данную рекомендацию и может скорректировать указанный параметр для повышения успешности проектируемого мероприятия.

#### *Экономическая оценка эффективности*

Для проведения экономической оценки эффективности ГРП, принятия решения о целесообразности применения данного метода с целью повышения нефтеотдачи того или иного нефтяного или газового актива, требуется расчет стоимости 1 скважино-операции данного мероприятия.

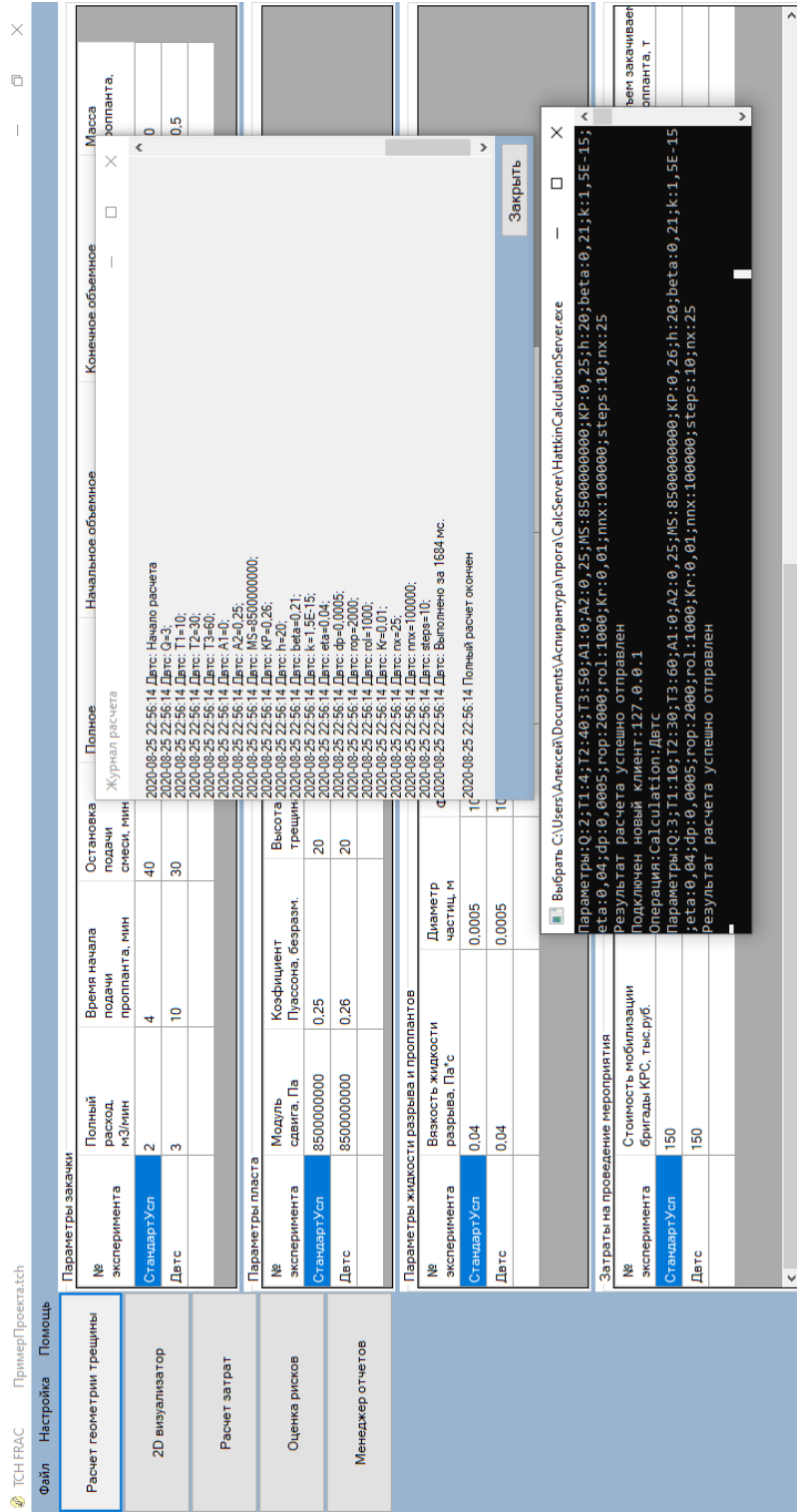


Fig. 4. The calculation log

Рис. 4. Журнал расчета

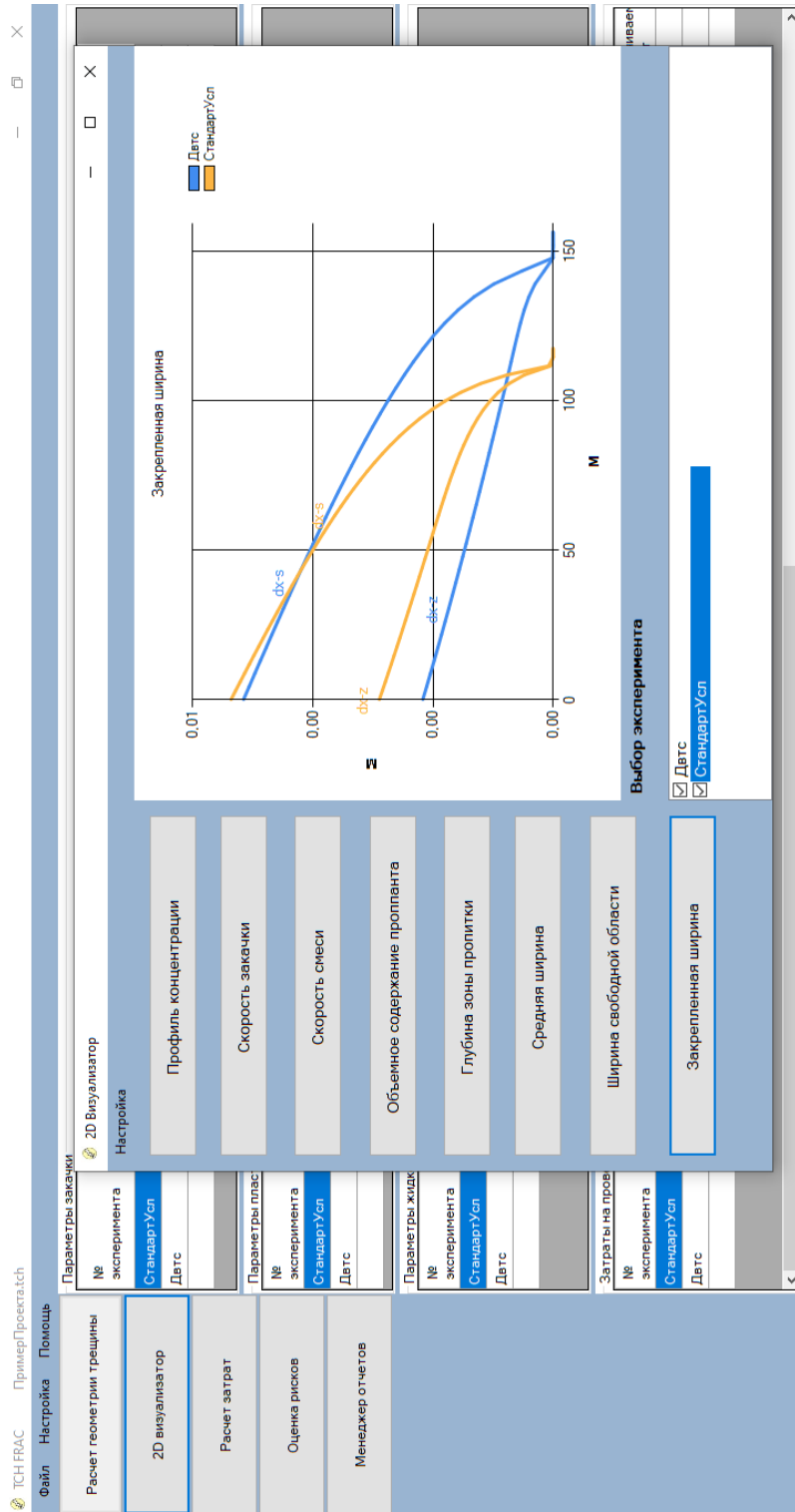


Fig. 5. The 2D renderer

Рис. 5. 2D-визуализатор

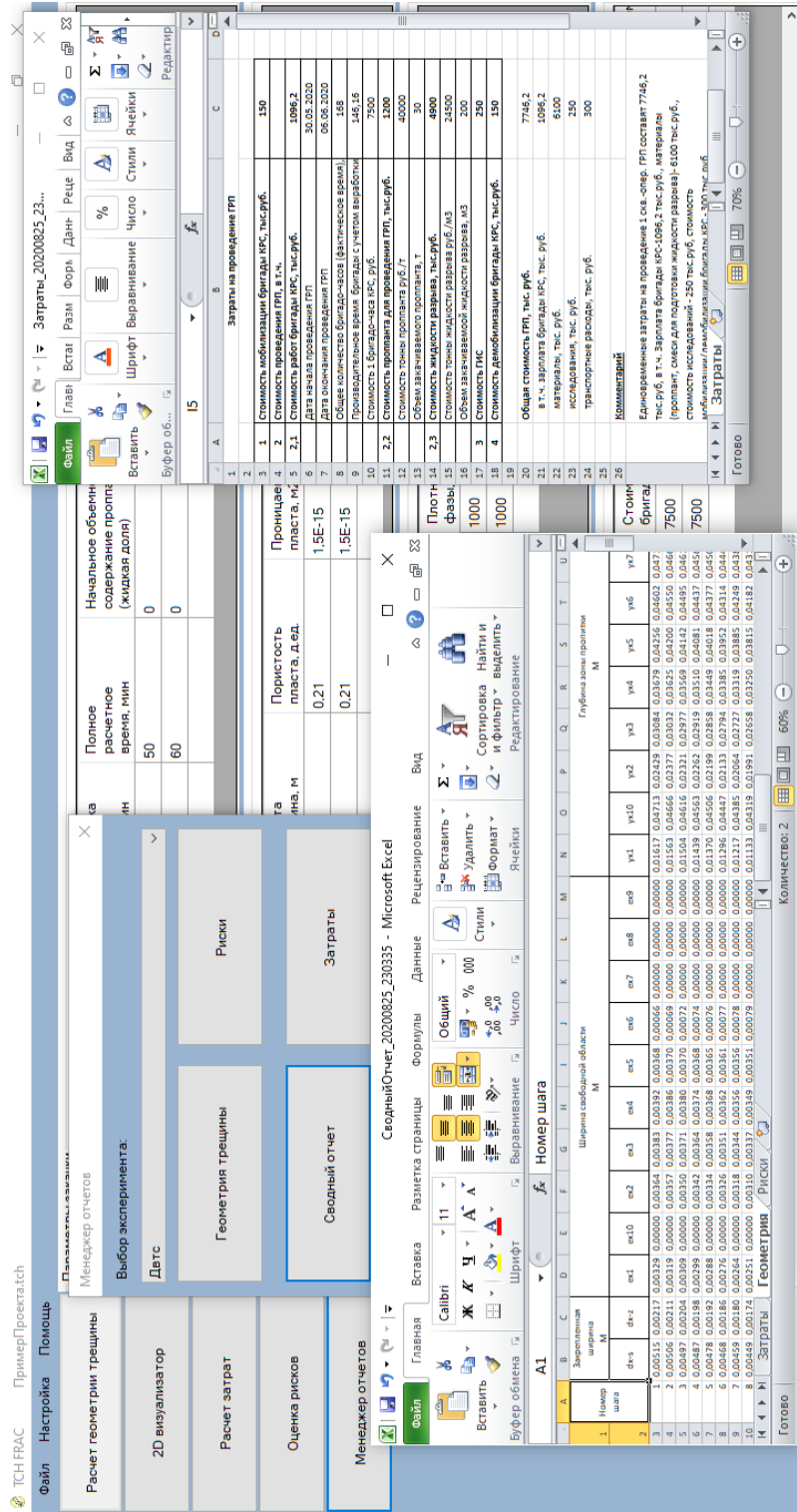


Fig. 6. An example of the report downloads

Рис. 6. Пример выгрузки отчетов

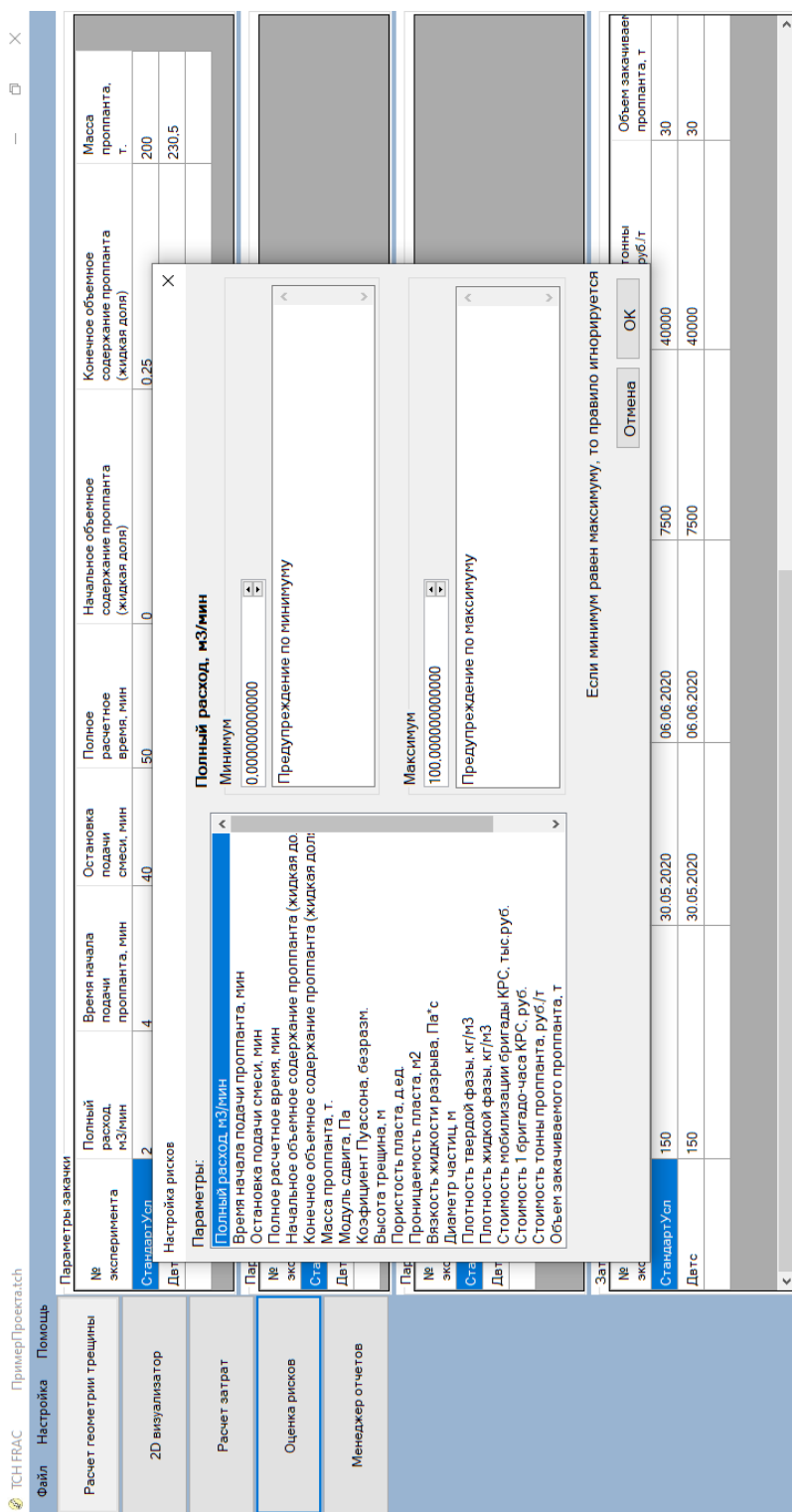


Рис. 7. Прописывание пользовательских сценариев

Fig. 7. Writing custom scripts

Для формирования удельного норматива стоимости выполнения ГРП был определен перечень основных статей затрат, обоснованных процессом осуществления данного геолого-технического мероприятия (далее ГТМ), сформирован алгоритм расчета стоимости ГРП, учитывающий конкретные технологические условия проведения ГТМ и соответствующие ценовые предпосылки на входящие в него операции.

В качестве основных статей затрат по проведению 1 скважино-операции ГРП рассматриваются:

- затраты на мобилизацию и демобилизацию бригады капитального ремонта скважин (далее КРС) (Змобил., Здемобил.), тыс. р.
- затраты на оплату услуг бригады КРС (ЗКРС), тыс. р.;
- затраты на закачиваемый в процессе выполнения ГРП проппант (Зп), тыс. р.;
- затраты на подготовку жидкости разрыва (Зжр), тыс. р.;
- затраты на проведение геофизических исследований скважин (далее ГИС) после выполнения ГРП (ЗГИС), тыс. р.

Затраты на оплату услуг бригады КРС (ЗКРС) рассчитываются исходя из количества бригадо-часов (Т), ед., потраченных на осуществление ГРП, и стоимости 1 бригадо-часа бригады КРС (Ркрс), тыс. р.:

$$\text{ЗКРС} = \text{T} \cdot \text{РКРС}. \quad (17)$$

Затраты на закачиваемый в процессе выполнения ГРП проппант (Зп) определяются исходя из объема закачки проппанта (Qп) согласно технологически обоснованным решениям и стоимости 1 т проппанта (РП):

$$\text{Зп} = \text{Qп} \cdot \text{РП}. \quad (18)$$

Затраты на жидкость разрыва (Зжр) определяются исходя из необходимого объема жидкости разрыва в соответствии с расчетом (Qжр) и стоимости ее подготовки за 1 т (Ржр):

$$\text{Зжр} = \text{Qжр} \cdot \text{Ржр}. \quad (19)$$

Таким образом, затраты на 1 скважино-операцию ГРП рассчитываются через агрегирование выше обозначенных показателей по следующей формуле:

$$\text{ЗГРП} = \text{Змобил} + \text{ЗКРС} + \text{Зп} + \text{Зжр} + \text{Здемобил}. \quad (20)$$

Произведено тестирование комплекса при решении ряда задач с варьированием геологических параметров пласта и технологических параметров закачки. Выполненные расчеты с использованием фактической информации о реально проведенных ГРП в промысловых условиях, помноженные на результаты сравнения с существующими коммерческими аналогами, позволят в последующем говорить о корректности представленной математической модели, заложенной в основу комплекса.

К преимуществам представленного комплекса TSH FRAC стоит отнести возможность выполнения расчетов на сервере, что является важным фактором при выполнении многовариантных вычислений при моделировании. В отличие от существующих программных продуктов TSH FRAC позволяет уточнить параметр средней ширины трещины, что сказывается на качестве оценки ее продуктивности. Данная особенность является следствием уточненной модели в PKN-постановке, которая описывает движение частиц проппанта в трещине при утечках в пласт, при контактах со стенкой трещины, последующего дрейфа и осаждения.

Предложенный подход определения удельной стоимости позволяет спрогнозировать затраты для различных видов ГРП (например, ГРП стандартный на наклонно-направленных скважинах (далее ННС), многозонный ГРП (далее МГРП) для горизонтальных скважин и МСС и др.), поскольку в основе оценки затрат заложены показатели, чувствительные к изменению его дизайна (объем проппанта и жидкости разрыва, период времени работы бригады КРС).

На основе стоимости 1 скважино-операции ГРП того или иного вида и количества ГТМ в динамике по годам могут быть рассчитаны затраты, которые потребуется учесть в денежном потоке при выполнении оценки экономической эффективности ГРП.

Описанный алгоритм расчета стоимости 1 скважино-операции ГРП заложен в TSH FRAC в качестве дополнительной опции. По итогам технологических расчетов и с учетом внесенных в программу актуальных экономических параметров выполняется прогноз стоимости запланированного ГРП, формируется отчет для пользователя с описанием итогового расчета.

### **Заключение**

В работе рассмотрена формализованная постановка задачи о формировании трещины гидроразрыва при закачке в продуктивный пласт вязкой жидкости. Приводится обоснование выбора численной расчетной схемы для решения авторской математической модели гидроразрыва пласта из работ [7, 8, 9] и исследование ее устойчивости.

Подход, использованный авторами, позволяет уточнить параметр «средней ширины трещины», который значительно сказывается на оценке продуктивности при расчете притока.

На основе представленной модели реализован программный комплекс TSH FRAC. К преимуществам программного комплекса стоит отнести использованную архитектуру, позволяющую выполнять вычисления на ПК, не предъявляя значительных требований к аппаратным средствам.

Программный комплекс прошел успешное тестирование с использованием данных о реально проведенных ГРП посредством сравнения с результатами, полученными на зарубежном аналоге.

Стоит подчеркнуть, что возможность работы с TSH FRAC специалистов различного профиля позволяет позиционировать программный комплекс как мультифункциональный продукт.



**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта / Г. И. Баренблатт // Прикладная математика и механика. 1956. Том 20. №. 4. С. 475-486.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Лаборатория знаний, 2015. 639 с.
3. Зубков В. В. Численное моделирование инициирования и роста трещин гидроразрыва / В. В. Зубков, В. Ф. Кошелев, А. М. Линков // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2007. № 1. С. 45-63.
4. Ивашнев О. Е. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде / О. Е. Ивашнев, Н. Н. Смирнов // Вестник Московского ун-та. Математика. Механика. 2003. № 6. С. 28-36.
5. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. М.: Наука, 1989. 429 с.
6. Татосов А. В. TSH FRAC Программный комплекс для моделирования геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта, определения стоимости мероприятий и оценке рисков / А. В. Татосов, А. С. Шляпкин // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020619401 от 17.08.2020.
7. Татосов А. В. Движение проппанта в раскрывающейся трещине гидроразрыва пласта / А. В. Татосов, А. С. Шляпкин // Известия Саратовского университета. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. 2018. Том 18. № 2. С. 217-226.
8. Шляпкин А. С. О проведении экспресс-оценки геометрических параметров закрепленной на проппанте трещины гидроразрыва пласта методами математического моделирования / А.С. Шляпкин, А.В. Татосов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Том 6. № 3. С. 79-92. DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-79-92
9. Шляпкин А. С. О решении задачи гидроразрыва пласта в одномерной математической постановке / А. С. Шляпкин, А. В. Татосов // Нефтяное хозяйство. 2020. Вып. 12. С. 118-121.
10. Geertsma J. A Rapid Method of Predicting Width and Extent of Hydraulically Induced Fractures / J. Geertsma, F. De Klerk // Journal of Petroleum Technology. 1969. Vol. 12. Pp. 1571-1581.
11. Perkins T. K. Widths of hydraulic fractures / Т. К. Perkins, L. R. Kern // Journal of Petroleum Technology. 1961. Vol. 13. No. 9. Pp. 937-949.

**Alexey S. SHLYAPKIN<sup>1</sup>**  
**Alexey V. TATOSOV<sup>2</sup>**

UDC 501.1, 622.276.66

**NUMERICAL AND PROGRAM IMPLEMENTATION  
OF A ONE-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL  
OF HYDRAULIC FRACTURING**

<sup>1</sup> Leading Specialist,  
Design and Development Monitoring  
Department of the Yuzhno-Yagunskoye field,  
Branch of KogalymNIPIneft,  
LUKOIL-Engineering (Tyumen)  
shlyapkinas@lukoil.tmn.ru

<sup>2</sup> Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,  
Department of fundamental Mathematics and Mechanics,  
Institute of Mathematics and Computer Science,  
University of Tyumen  
atatosov@utmn.ru

**Abstract**

At present, an active policy of import substitution is being pursued, dictated by the imposed international sanctions, which creates a need for finding optimal engineering solutions, in particular, in the field of creating Russian software.

In the study and design of hydraulic fracturing, they often rely on the results of modeling in specialized simulators. The appearance of the Russian products on the software market, surely, sets the correct vector of development; however, some aspects are not implemented in the existing mathematical models.

The authors of this article present a model that allows considering in detail the process of movement of proppant particles in a hydraulic fracture. The chosen direction is important

---

**Citation:** Shlyapkin A. S., Tatosov A. V. 2021. "Numerical and program implementation of a one-dimensional mathematical model of hydraulic fracturing". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 7, no. 1 (25), pp. 126-145. DOI: 10.21684/2411-7978-2021-7-1-126-145

---

from the point of view of calculating the fracture cavity and refining its productivity, since the behavior of the particles has a significant effect on both the growth potential of the crack and its shape.

The research methodology includes a theoretical justification of the mathematical model presented by the authors in their previous works; a description of the basic principles of selecting and constructing a numerical calculation scheme and creating a software package. The main methods of research are the methods of mathematical modeling, formed from practical problems on the estimation of geometric parameters of the crack, including the areas of continuum mechanics and fracture of solids, underground hydrodynamics.

The proposed and implemented numerically mathematical model forms the basis of the authors' software package, which allows solving the main design problems when performing hydraulic fracturing operations.

### **Keywords**

Hydraulic fracturing, hydraulic fracture, proppant, mathematical model, numerical scheme, hydraulic fracturing simulator.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2021-7-1-126-145**

### **REFERENCES**

1. Barenblatt G. I. 1956. "On some problems of the theory of elasticity arising in the study of the mechanism of hydraulic fracturing of an oil-bearing reservoir". *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 20, no. 4, pp. 475-486. [In Russian]
2. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. 2015. *Numerical Methods*. Moscow: Laboratoriya znaniy. 639 pp. [In Russian]
3. Zubkov V. V., Koshelev V. F., Linkov A. M. 2007. "Numerical simulation of the initiation and growth of hydraulic fractures". *Journal of Mining Sciences*, no. 1, pp. 45-63. [In Russian]
4. Ivashnev O. E., Smirnov N. N. 2003. "Formation of hydraulic fracturing cracks in a porous medium". *Vestnik Moskovskogo universiteta. Mathematics. Mechanics*, vol. 6, pp. 28-36. [In Russian]
5. Samarsky A. A., Gulin A. V. 1989. *Numerical Methods*. Moscow: Nauka. 429 pp. [In Russian]
6. Tatosov A. V., Shlyapkin A. S. Certificate of State Registration of the Computer Program No. 2020619401 of 17 August 2020 "TSH FRAC software package for modeling geometric parameters of hydraulic fracturing cracks, determining the cost of measures and risk assessment". [In Russian]
7. Tatosov A. V., Shlyapkin A. S. 2018. "Movement of proppant in the opening crack of hydraulic". *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 18, no. 2, pp. 217-226. [In Russian]
8. Shlyapkin A. S., Tatosov A. V. 2020. "On the express estimation of geometrical parameters of a hydraulic fracturing crack fixed on a proppant using the methods

- of mathematical modeling”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 6, no. 3 (23), pp. 79-92. [In Russian]
9. Shlyapkin A. S., Tatosov A. V. 2020. “On solving the problem of hydraulic fracturing in a one-dimensional mathematical formulation”. Oil Industry, vol. 12, pp. 118-121. [In Russian]
  10. Geertsma J., De Klerk F. 1969. “A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures”. Journal of Petroleum Technology, vol. 12, pp. 1571-1581.
  11. Perkins T. K., Kern L. R. 1961. “Widths of hydraulic fractures”. Journal of Petroleum Technology, vol. 13, no. 9, pp. 937-949.