

## Эволюция метки трассера в нефтяных пластах с трещиной гидроразрыва

Александр Иванович Филиппов<sup>1</sup>, Альфред Ядгарович Давлетбаев<sup>2</sup>,  
Рафаэль Радикович Гареев<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup> Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия

<sup>2</sup> Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия  
Контакт для переписки: garrafrad@mail.ru✉

**Аннотация.** Представлены результаты по развитию микро- и макромоделей процесса конвективно-диффузионной эволюции метки трассера в природных коллекторах и описана взаимосвязь между ними. Уравнения для концентрации (плотности) трассера при движении раствора в трещине гидроразрыва и окружающей пористой среде построены с учетом локального химического равновесия. Найдены решения задач о поле концентрации трассера с учетом и без учета вклада диффузионных процессов. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов по моделированию полей скорости метки и концентрации вещества трассера при течении несущей жидкости в трещине гидроразрыва.

Показано, что осаждение вещества трассера на скелет на переднем фронте и вымывание на заднем приводит к уменьшению скорости движения метки, причем эта скорость снижается с ростом коэффициента Генри. Применение комбинации методов характеристик и функции Грина позволило уточнить вклад конвективного и диффузионного процессов в эволюцию метки трассера. Полученные результаты предоставляют новые возможности для развития методов интерпретации результатов трассерных исследований, особенно для исследования трещин автогидроразрыва между добывающей и нагнетательной скважинами или двумя нагнетательными.

**Ключевые слова:** математическая модель, диффузия, конвекция, уравнение неразрывности, метка трассера, пористая среда, трещина гидроразрыва

**Цитирование:** Филиппов А. И., Давлетбаев А. Я., Гареев Р. Р. 2024. Эволюция метки трассера в нефтяных пластах с трещиной гидроразрыва // Вестник Тюменского

государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 10. № 3 (39). С. 50–70. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-3-50-70>

Поступила 09.04.2024; одобрена 14.06.2024; принята 02.10.2024

## Evolution of tracer mark in oil reservoirs with hydraulic fracture

Alexander I. Filippov<sup>1</sup>, Alfred Ya. Davletbaev<sup>2</sup>, Rafael R. Gareev<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup> Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia

<sup>2</sup> Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

Corresponding author: [garrafrad@mail.ru](mailto:garrafrad@mail.ru)✉

**Abstract.** The results of the development of micro- and macromodels of the process of convective-diffusion evolution of the tracer mark in natural reservoirs are presented and the relationship between them is described. Equations for the concentration (density) of a tracer during solution movement in a hydraulic fracture and the surrounding porous medium are constructed taking into account local chemical equilibrium. Solutions have been found to problems on the tracer concentration field with and without taking into account the contribution of diffusion processes. The results of computational experiments on modeling the velocity fields of the mark and the concentration of the tracer substance during flow of the carrier fluid in a hydraulic fracture are discussed.

It is shown that deposition of the tracer substance onto the skeleton at the leading edge and washing away at the rear leads to a decrease in the speed of the tag, and this speed decreases with increasing Henry's coefficient. The use of a combination of characteristics methods and the Green's function made it possible to clarify the contribution of convective and diffusion processes to the evolution of the tracer mark. The results obtained provide new opportunities for the development of methods for interpreting the results of tracer studies.

**Keywords:** mathematical model, diffusion, convection, continuity equation, tracer mark, porous medium, hydraulic fracture

**Citation:** Filippov, A. I., Davletbaev, A. Ya., & Gareev, R. R. (2024). Evolution of tracer mark in oil reservoirs with hydraulic fracture. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 10(3), 50–70. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-3-50-70>

Received Apr. 9, 2024; Reviewed Jun. 14, 2024; Accepted Oct. 2, 2024

## Введение

Практическое использование технологии горизонтального бурения открывает принципиально новые возможности добычи углеводородов и вместе с тем порождает проблемы. Одной из проблем является усложнение доставки геофизических приборов в продуктивные интервалы, что ограничивает возможности геофизических методов. В связи с этим возникает необходимость развития принципиально новых методов исследования пластов и скважин. Перспективным подходом в этом направлении представляется использование трассерных технологий. Их реализация заключается в растворении в технологических жидкостях (например, в пропантах, используемых при закачке в трещины гидроразрыва) особых добавок — трассеров, последующая регистрация которых обеспечивает получение важной информации о процессах в пласте и скважине [Бикметова и др., 2022].

Важным преимуществом трассерных технологий является существенное увеличение глубинности исследований, которая для классических геофизических методов ограничена размерами порядка одного метра. Показано, что добавление трассеров в воду, закачиваемую для поддержания пластового давления, позволяет исследовать продуктивные пласты между нагнетательной и добывающей скважинами или двумя нагнетательными, одна из которых переведена в режим излива. Одной из важных задач, которую позволяют решать трассерные технологии, здесь представляется контроль эволюции трещин, в том числе самопроизвольной природы (трещин автогидроразрыва пласта, или автоГРП) [Мальцев и др., 2012].

Развитие методов интерпретации результатов трассерных технологий сопряжено с необходимостью развития теоретических представлений, обеспечивающих описание эволюции метки трассера при ее движении в пласте с трещиной с учетом многообразия природных условий. Это приводит к необходимости решения новых задач конвективной диффузии. Отметим, что задачи такого рода традиционно представляют интерес не только применительно к нефтегазовым пластам, но и находят другие приложения в настоящее время [Goldobin, Krauzin, 2015; Гильманов и др., 2020; Estévez и др., 2022; Хабибуллин, Хасанова, 2023].

В классических работах задачи конвективной диффузии в нефтегазовых пластах рассмотрены без учета влияния массопереноса в трещине гидроразрыва. И. А. Хабибуллин и Р. З. Хасанова в своей работе [2023], наиболее близкой к тематике настоящей статьи, предприняли попытку создания математической модели конвективной диффузии в пласте с трещиной без учета конвективного массообмена трещины с пластом. Это позволило оценить вклад диффузионного массообмена при движении метки трассера трещины с окружающим коллектором и осуществить расчеты пространственно-временных зависимостей полей концентрации. Полученные результаты важны для совершенствования методов качественной интерпретации результатов исследований. Однако И. А. Хабибуллин и Р. З. Хасанова [2023] не исследовали вклад процессов конвективной диффузии [Нигматулин, 1987] и конвективного массообмена потока в трещине с окружающим коллектором. Именно этим вопросам уделено основное внимание в данной статье.

В представляемой работе описаны некоторые теоретические результаты, достигнутые авторами при исследовании взаимосвязи между микро- и макромоделами конвективно-диффузионных процессов при движении метки трассера в пласте с трещиной с учетом представлений о химическом равновесии в коллекторах [Mikhaylov и др., 2013; Филиппов, 2016].

## Методы

### 1. Основные уравнения

При записи уравнений неразрывности, выражающих закон сохранения массы фильтрующейся жидкости и вещества скелета, при отсутствии трассера в растворе полагаем, что в пористой среде выполнены условия термического и химического равновесия. Это означает, что температура и химический потенциал одинаковы во всех пространственных точках системы. При этом вклад переноса тепла и процессов диффузии не оказывает существенного влияния на величину отклонения системы от состояния механического равновесия. Выполнение этих условий, общепринятое в подземной гидродинамике, существенно упрощает математическое описание процессов фильтрации несущей фазы.

В таких предположениях уравнение неразрывности фильтрующейся жидкости (несущей фазы в отсутствие растворенного трассера) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_l) + \nabla \vec{j} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\rho_l$  — плотность жидкости,  $m$  — пористость. Вектор плотности конвективного потока массы фильтрующейся жидкости представляется как

$$\vec{j} = \rho_l \vec{v}, \quad (1.2)$$

где  $\vec{v}$  — вектор скорости фильтрации жидкости в пористой среде.

Уравнение для скелета пористой среды при отсутствии в нем трассера строится на предположении, что поток вещества скелета равен нулю. Это предположение означает, что уравнение строится для неподвижной в целом пористой среды. При этом пренебрегается деформационными смещениями, возникающими из-за наличия депрессии, а также диффузионными потоками вещества скелета. В таких предположениях уравнение неразрывности для скелета в отсутствие молекул трассера представляется как

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1 - m)\rho_c] = 0, \quad (1.3)$$

где  $\rho_c$  — плотность вещества, представляющего скелет.

При фильтрации несущей фазы с растворенным в ней трассером необходимо учитывать отсутствие полного химического равновесия в системе. Это означает, что необходимо учитывать диффузию вещества трассера в несущей фазе и скелете пористой среды. Величина диффузионного потока трассера в несущей фазе определяется градиентом химического потенциала  $\mu_w$  и представляется как  $\vec{j}_{dw} = -mD_{\mu w}\nabla\mu_w$ .

При учете полного конвективного потока массы в пористой среде следует учитывать, что плотность переносимого вещества определяется суммой плотностей несущей фазы  $\rho$  и трассера  $\rho_s$ , а скорости фильтрации растворенного трассера и несущей фазы совпадают. Это следует из того, что трассер не представляет отдельную фазу, а является только растворенным в ней компонентом. Полный поток вещества несущей фазы с растворенным в ней трассером представляется суммой диффузионного и конвективного потока. Вектор плотности потока массы трассера в фильтрующейся жидкости имеет вид

$$\vec{j}_\Sigma = -mD_{\mu_w}\nabla\mu_w + (\rho_l + \rho_s)\vec{v}, \quad (1.4)$$

где первое слагаемое отвечает за диффузионный поток растворенного вещества в жидкости, текущей в пласте, а второе — описывает конвективный перенос подвижной фазы с растворенным в ней трассером.

При записи закона сохранения массы в виде уравнения неразрывности принято учитывать массообменные процессы между скелетом и несущей фазой, имеющие особое значение в микромасштабах на уровне размеров диаметра пор. Это осуществляется путем использования некоторой функции источников  $g(\mu_s, \mu_w)$ , зависящей от химических потенциалов вещества трассера в жидкости  $\mu_w$  и скелете  $\mu_s$ . По смыслу эта функция представляет массу трассера, проникающего через поверхность контакта скелета и флюида в единице объема пористой среды за единицу времени.

В создаваемых математических моделях трассерных технологий исследования скважин и пластов также возникает необходимость учета возможных химических превращений растворенного вещества. Это также осуществляется путем введения в уравнение дополнительной функции источников, которая в довольно общем случае представляется линейной зависимостью относительно концентрации растворенного трассера  $\rho_w$  и пористости  $m$ :  $-\alpha m \rho_w$ .

Для фильтрующейся жидкости уравнение неразрывности в таких предположениях принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} m(\rho_l + \rho_w) + \nabla \vec{j}_\Sigma = -g(\mu_s, \mu_w) - \alpha m \rho_w, \quad (1.5)$$

где  $\rho_w$  — плотность (концентрация) трассера в жидкости,  $\alpha$  — постоянная химической реакции.

Аналогичное уравнение для скелета пористой среды, содержащей оседающий трассер, предполагает учет диффузионного потока вещества  $\vec{j}_s = -D_s \nabla[(1 - m)\mu_s]$ , где  $\mu_s$ ,  $D_s$  — соответственно химический потенциал и коэффициент диффузии вещества трассера в скелете,  $m$  — пористость скелета.

Массообменные процессы скелета с несущей фазой описываются той же функцией  $g(\mu_s, \mu_w)$ , что и в (5), однако в соответствующее уравнение неразрывности ее следует включить с противоположным знаком. Противоположный знак означает, что потеря вещества трассера несущей фазой за счет осаждения соответствует приходу его на скелет. При этом потери трассера при переходе отсутствуют.

Если химические превращения трассера в скелете совпадают с аналогичными реакциями в несущей фазе, то выражение для соответствующей функции источников представляется

как  $\alpha \rho_s (1 - m)$ . Если же реакции другие, то в выражении для источников вместо  $\alpha$  необходимо использовать другое значение для константы реакции, например  $\alpha_s$ .

При записи уравнения неразрывности для вещества скелета учтем, что его суммарная плотность равна  $\rho_c + \rho_s$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - m)(\rho_c + \rho_s)] + \nabla \vec{j}_s = g(\mu_s, \mu_w) - \alpha(1 - m)\rho_s. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.1), (1.3), (1.5) и (1.6) представляют полную систему для описания явлений массопереноса с учетом трассера. В практическом отношении для построения математических моделей такая система слишком сложна. Упрощение описания достигается путем вычитания из уравнения (1.5) уравнения (1.1). Это позволяет представить уравнение неразрывности вещества трассера в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (m\rho_w) + \nabla \vec{j}_w = -g(\mu_s, \mu_w) - \alpha m\rho_w, \quad (1.7)$$

где  $\rho_w, D_w$  — соответственно плотность и коэффициент диффузии трассера в жидкости, а вектор плотности потока массы трассера в фильтрующей жидкости имеет вид

$$\vec{j}_w = -D_{\mu w} \nabla (m\mu_w) + \rho_w \vec{v}, \quad (1.8)$$

где первое слагаемое отвечает за диффузионный поток вещества в несущей фазе пористой среды.

Аналогичное вычитание уравнения (1.3) из уравнения (1.6) позволяет представить уравнения неразрывности вещества трассера в скелете как

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - m)\rho_s] + \nabla \vec{j}_s = g(\mu_s, \mu_w) - \alpha(1 - m)\rho_s, \quad (1.9)$$

где  $\vec{j}_s = -D_{\mu s} \nabla [(1 - m)\mu_s]$  — диффузионный поток вещества в скелете,  $\mu_s, D_{\mu s}$  — соответственно химический потенциал и коэффициент диффузии вещества трассера в скелете.

Представление уравнений неразрывности для вещества трассера в таком виде позволяет упростить создание математической модели путем разделения на первоначальное построение полей давления и скорости с помощью уравнений (1.1) и (1.3) и последующее нахождение полей концентрации с помощью (1.7)–(1.9), где  $\vec{v}$  представляется известной функцией. Этот прием использован в предположении, что вещество трассера существенно не изменяет фильтрационных свойств несущей фазы, что оправдано для большинства используемых на практике трассеров.

Записанные уравнения представляют некоторую микромодель процессов в пористой среде, причем каждое из уравнений описывает процессы в отдельной области пространства. Проблема заключается в том, что микроструктура этих областей имеет чрезвычайно сложную геометрию. Площадь контакта фаз в реальных пористых средах, содержащих нефть и газ, очень велика, размеры связанных пор малы, а их структура является хаотической. Физические поля, описывающие процессы в таких средах, обладают большой пространственной неоднородностью. Например, поле скорости сильно

меняется по сечению пор, а в соседних точках, представляющих скелет, вектор скорости равен нулю.

Отмеченные особенности приводят к тому, что построение микрополей возможно только для идеальных пористых сред, например среды, представленной пучком цилиндрических линейных капилляров. В общем случае восстановление структуры микрополей представляется трудновыполнимой задачей. Отметим, однако, что микроструктурное описание полей является часто избыточным для практических целей, поскольку отсутствует прямая возможность их измерения. На практике осуществляется измерение некоторых усредненных величин. Примером является скорость фильтрации, которая представляет усредненную по площади притока величину без учета просветности сечения.

Отмеченная проблема решается путем усреднения микроскопических уравнений [Нигматулин, 1987]. Усреднение может осуществляться различными способами, выбор которых часто определяется поставленной задачей и требованиями детальности описания. Здесь использована простейшая модель построения усредненных уравнений для описания процессов конвективной диффузии при движении метки трассера. Первый шаг такого усреднения уже осуществлен выше. Он заключается в использовании в уравнениях средней пористости  $m$ , которая по своей природе является случайной.

Следующим шагом усреднения является сложение уравнений для трассера в несущей жидкости и скелете. Возможность такого сложения неявно предполагает, что поля в суммарном уравнении определены в каждой точке физически малого объема пористой среды. Строго говоря, при этом кусочно определенные функции микроописания заменяются некоторыми непрерывными полями. Учет последствий использования такого предположения осуществлен ниже без детального обсуждения.

Складывая уравнения (1.7) и (1.9), получим усредненное уравнение неразрывности для вещества трассера:

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - m)\rho_s + m\rho_w] + \nabla(\rho_w \vec{v}) - \nabla \vec{j}_d = -\alpha[(1 - m)\rho_s + m\rho_w], \quad (1.10)$$

где суммарная плотность диффузионного потока трассера в пористой среде представляется как  $\vec{j}_d = \vec{j}_s + \vec{j}_{wd} = -D_s(1 - m)\nabla\rho_s - D_w m \nabla\rho_w$ . Доступной для измерения в этом уравнении является концентрация трассера в несущей фазе  $\rho_w$ , поэтому для построения математической модели следует определить зависимость плотности трассера в скелете  $\rho_s$  от  $\rho_w$ .

Химическое равновесие между скелетом и фильтрующейся жидкостью достигается при значениях диффузионного числа Фурье порядка единицы  $(DT/h^2) \sim 1$ . Характерная толщина жидкого или твердого слоя в скелете песчаника с развитой пористостью оценивается как  $h \sim 10^{-5}$  м. При характерных значениях коэффициента диффузии  $D \sim 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с характерное время выравнивания концентрации между скелетом и жидкостью оценивается как  $T = (h^2/D) \sim 0,1$  с. Поскольку время перемещения метки в каждой точке пористой среды значительно больше полученных значений, то хорошим приближением, обеспечивающим получение удовлетворительных результатов, является предположение о химическом равновесии между скелетом и насыщающей жидкостью.



По этой причине ограничимся рассмотрением зависимости в виде функционального уравнения

$$\rho_s = \rho_s(\rho_w), \quad (1.11)$$

следующего из равенства химических потенциалов вещества трассера в скелете и насыщающей жидкости, хотя в общем случае такая зависимость представляется в виде дифференциальных уравнений. Более того, проиллюстрируем построение математической модели для случая, когда разложение (1.11) в ряд Маклорена содержит только первое слагаемое:  $\rho_s = (\partial \rho_s / \partial \rho_w)(0) \rho_w$ .

Это позволяет представить уравнение конвективной диффузии как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( (1-m) \frac{\partial \rho_s}{\partial \rho_w} + m \right) \rho_w \right] + \nabla(\rho_w \vec{v}) - \nabla \vec{J}_d = \\ = -\alpha[(1-m)\rho_s + m\rho_w], \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $\vec{J}_d = \vec{J}_s + \vec{J}_{wd} = - \left( D_s(1-m) \frac{\partial \rho_s}{\partial \rho_w} + D_w m \right) \nabla \rho_w$ .

Отсюда следует выражение для эффективного коэффициента диффузии:

$$D_d = D_s(1-m) \frac{\partial \rho_s}{\partial \rho_w} + D_w m. \quad (1.13)$$

Такой результат усреднения часто используется на практике. Однако он содержит существенный недостаток, требующий более детального усреднения микроскопических уравнений с учетом извилистости пор. Такое усреднение является весьма сложным в математическом представлении. Здесь ограничимся только изложением основных результатов такого усреднения.

Извилистость пор способствует возникновению встречных основному потоку течений, что сходно хаотическому движению молекул, инициирующему молекулярную диффузию  $D_d$ . Априори наличие встречных течений должно приводить к генерации дополнительного потока трассера (соответствующий процесс называется конвективной диффузией). Показано, что коэффициент конвективной диффузии  $D_{cv}$  является аддитивным к молекулярному  $D_d$ , а результирующий коэффициент представляется как  $D = D_{cv} + D_d$ .

С учетом этой поправки представленные здесь уравнения позволяют с достаточной для практических целей точностью описывать пространственно-временные зависимости полей концентрации трассера в пористой среде и трещинах гидроразрыва.

Итак, при построении математической модели эволюции метки трассера следует разделять микромоделю процессов и макроскопические модели, а также учитывать сложную взаимосвязь между ними. При этом для интерпретации результатов измерений пригодны только макроскопические модели, а микроскопические поля важны для уточнения макромоделей.



Будем считать, что зависимость концентрации примеси в пропанте, заполняющем трещину, от концентрации ее в жидкости линейна:  $(\partial \rho_s / \partial \rho_w)(0) = K = \text{const}$  (изокумулянта Генри), что является хорошим приближением при сравнительно небольших концентрациях трассера  $\rho_s = K\rho_w$ . Здесь  $K$  — коэффициент распределения вещества трассера между носителем и скелетом (коэффициент Генри).

Далее полагаем, что носитель трассера является слабосжимаемым. В этом случае скорость несущей фазы с высокой точностью удовлетворяет уравнению  $\nabla \vec{v} = 0$ , а второе слагаемое в уравнении (1.12) представляется как  $\nabla(\rho_w \vec{v}) = \vec{v} \nabla \rho_w$ . С учетом этих предположений запишем уравнение (1.12) для плотности трассера в конвективной форме в жидкой фазе (воде) как

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{(1-m)K+m} \nabla \rho_w - D \Delta \rho_w = -\alpha \rho_w. \quad (1.14)$$

Из (1.14) следует, что в уравнении, описывающем миграцию трассера, необходимо учитывать конвективный перенос трассера, осложненный наличием пористости в скелете пропанта и протекающими массообменными процессами между флюидом и пропантом/скелетом.

Уравнение (1.14) позволяет определить скорость конвективного переноса трассера  $\vec{u}$  в пористой среде (по аналогии со скоростью конвективного переноса тепла):

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{(1-m)K+m}. \quad (1.15)$$

Из полученного выражения следует, что в трещине, не содержащей пропант ( $m = 1$ ), скорость конвективного переноса примеси совпадает со скоростью течения растворителя ( $\vec{u} = \vec{w}$ ). В среде, которая содержит неадсорбирующий скелет ( $K = 0$ ), скорость конвективного переноса примеси совпадает с истинной скоростью движения несущей фазы ( $\vec{u} = \vec{v}/m$ ).

В задачах о полях концентраций растворенных веществ при закачке раствора трассера в трещину гидроразрыва необходимо условие на входе. В качестве такого можно использовать заданную концентрацию  $\rho_w|_{x=0} = \rho_0(t)$ , которая определяется на основе дополнительной информации или непосредственных экспериментальных измерений.

Полная плотность трассера в пористой среде складывается из плотности в жидкой фазе и плотности в скелете с учетом объемного содержания каждой из них. Если известна константа  $K$ , определяющая соотношение плотностей веществ в скелете и фильтрующемся растворе, то для полной плотности вещества трассера в пористой среде имеет место выражение  $\rho = ((1-m)K+m)\rho_w$ .

Оно может быть использовано для определения уравнения, которым описывается полная плотность. Для этого достаточно умножить уравнение для жидкой фазы на постоянную величину  $((1-m)K+m)$  и ввести обозначение для полной плотности. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{(1-m)K+m} \nabla \rho - D \Delta \rho = -\alpha \rho, \quad (1.16)$$

по виду совпадающее с уравнением для плотности в подвижной фазе.

Различие тем не менее имеет место при задании граничного условия на входе. Действительно, умножая условие на входе для жидкой фазы на  $((1 - m)K + m)$ , получим условие для полной плотности в виде  $\rho|_{x=0} = ((1 - m)K + m)\rho_0$ . Это означает, что для определения поля плотности  $\rho$  необходима дополнительная информация о пористости  $m$  и константе равновесия  $K$ . Таким образом, суммарная плотность трассера существенно зависит от адсорбционных свойств среды.

В анизотропной по диффузионным свойствам среде, точнее ортотропной, выражение для диффузионного потока представляется в тензорном виде. Тогда выражение для диффузионного потока трассера в щели гидроразрыва и коллекторе можно записать как

$$\vec{j}_d = -D_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{e}_x - D_y \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{e}_y, \quad (1.17)$$

где  $D_x, D_y$  — диагональные компоненты тензора диффузии.

С учетом этих предположений уравнение для плотности растворенного вещества, а именно двухмерное уравнение конвективной диффузии в пористой среде, запишется как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{1}{(1 - m)K + m} \left( v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) = -\alpha \rho. \quad (1.18)$$

Полученные уравнения являются основными для описания полей концентрации трассера в пористом пласте и трещине гидроразрыва.

Для трещины ГРП, заполненной трассером, в условиях низкопроницаемых коллекторов можно полагать, что компоненты скорости в направлении щели намного больше поперечных. Это позволяет пренебречь конвективным слагаемым в направлении оси  $x$ , тогда уравнение конвективной диффузии трассера приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{v}{(1 - m)K + m} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\alpha \rho. \quad (1.19)$$

Для химически стабильного трассера  $\alpha = 0$  имеем уравнение эволюции концентрации трассера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{v}{(1 - m)K + m} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (1.20)$$

Полученные уравнения использованы для изучения закономерностей формирования полей концентрации трассера в закачиваемом в пласт растворе.

Очевидно, что в случае малых градиентов концентрации трассера в закачиваемой жидкости влиянием диффузионных процессов можно пренебречь. Это означает, что в центральной зоне метки, представляющей протяженную зону с постоянной концентрацией, вклад диффузионных процессов пренебрежимо мал. Основное влияние диффузионных процессов происходит на концах метки, поскольку градиенты концентрации на ее концах обращаются в бесконечность.

## 2. Конвективная эволюция метки трассера

Рассмотрим сначала бездиффузионную эволюцию метки трассера  $D = 0$  в трещине гидроразрыва. Такое приближение хорошо выполняется при наличии утечек из трещины в коллектор. Сопутствующий конвективный перенос вещества трассера приводит к снижению градиента концентрации на поверхностях контакта трещины и коллектора. Сравнение конвективного и диффузионного потоков массы трассера при указанных выше значениях коэффициента диффузии показывает, что при наличии утечек меченой жидкости диффузионным потоком в поперечном к трещине направлении почти всегда можно пренебречь. Этот процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0. \quad (2.1)$$

В начальный момент времени концентрация трассера в рассматриваемой области равна нулю, т. е. вещество трассера в пласте отсутствует до начала закачки меченой жидкости.

$$\rho|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (2.2)$$

В промежутке времени  $t > 0$  в скважине на входе в трещину  $x = 0$  поддерживается заданная концентрация трассера.

$$\rho|_{x=0} = \rho_0(t), \quad t > 0. \quad (2.3)$$

Будем считать, что потери вещества трассера из трещины относительно невелики и их вкладом можно пренебречь ( $u = \text{const}$ ). Такие условия реализуются в случае, когда трещина гидроразрыва соединяет нагнетательную и эксплуатационную скважину. Этот случай представляется относительно редким и крайне негативным сценарием между нагнетательной и добывающей скважинами. Его наличие диагностируется по приходу фронта обводнения или корреляции давления в виду высокой гидродинамической связи. Стоит заметить, что использование трассерной технологии в таких условиях позволяет выявить нагнетательную скважину, в которой начинается трещина, и тем самым уточнить ее пространственное расположение. Полученная информация предоставляет дополнительные возможности для повышения нефтеизвлечения и оптимизации закачки воды. Анализ литературных источников свидетельствует, что подобные ситуации наиболее распространены между нагнетательными скважинами [Мальцев и др., 2012; Бикметова и др., 2022]. Известны также случаи развития трещин такого рода в процессе закачки (трещины автоГРП).

Решение задачи в описанных условиях представляет практический интерес, поскольку на практике диагностика трещин автогидроразрыва осуществляется путем проведения промысловых трассерных исследований.

Для решения поставленной задачи используем метод характеристик. Представим уравнение (2.1) в виде полной производной  $d\rho/dt = 0$ . Это возможно, если коэффициент перед вторым слагаемым в (2.1) определить как  $dx/dt = u$ . Полученные уравнения позволяют построить два интеграла:

$$\rho(t) = C, \quad x - ut = C_1. \quad (2.4)$$

Нахождение констант  $C$  и  $C_1$  осуществляется следующим образом. Для условия (2.3) (поскольку оно задано в точке  $x = 0$ ) из второго интеграла получим  $-ut = C_1$  или  $t = -(C_1/u)$ , а само условие для  $\rho(x, t)$  представим как

$$\rho\left(0, -\frac{C_1}{u}\right) = \rho_0\left(-\frac{C_1}{u}\right), \quad C_1 < 0. \quad (2.5)$$

Это позволяет представить решение задачи в параметрическом виде как

$$\rho = \rho_0\left(-\frac{C_1}{u}\right), \quad x - ut = C_1 < 0. \quad (2.6)$$

Исключив параметр  $C_1$ , получим

$$\rho = \rho_0\left(t - \frac{x}{u}\right), \quad 0 < x < ut. \quad (2.7)$$

Для условия (2.2) (поскольку оно задано в момент времени  $t = 0$ ) из второго интеграла получим  $x = C_1$ , а само условие для  $\rho(x, t)$  представим как  $\rho(C_1, t) = 0$ ,  $x - ut = C_1 > 0$ . Из первого интеграла следует, что  $\rho = 0$  для всех  $x > ut$ .

Полное решение задачи о конвективной эволюции метки трассера запишем как

$$\rho = \begin{cases} \rho_0\left(t - \frac{x}{u}\right), & 0 < x < ut, \\ 0, & x > ut. \end{cases} \quad (2.8)$$

Из решения (2.3) следует, что значения концентрации на входе в трещину запаздывают в точке наблюдения с координатой  $x$  на величину времени  $\tau = x/u$ . Это означает, что величина  $u$  представляет скорость движения метки в трещине.

Если в течение промежутка времени  $0 < t < T$  концентрация на входе в трещину поддерживается постоянной и равной  $\rho_0$ , а далее — равной нулю, то решение задачи представится как

$$\rho = \begin{cases} \rho_0, & u(t - T) < x < ut, \\ 0, & 0 < x < u(t - T), x > ut. \end{cases} \quad (2.9)$$

Это решение можно представить с помощью функции Хевисайда ( $\Phi(x)$ ) в виде

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \left[ \Phi\left(t - \frac{x}{u}\right) \right], & 0 < t < T, \\ \rho_0 \left[ \Phi\left(t - \frac{x}{u}\right) - \Phi\left(t - T - \frac{x}{u}\right) \right], & t > T. \end{cases} \quad (2.10)$$

Полученное решение в промежуток времени  $0 < t < T$  соответствует этапу формирования метки трассера, а далее  $t > T$  описывает движение сформированной метки в трещине.

Анализ полученного решения показывает, что конвективная эволюция соответствует движению метки со скоростью  $u$  по трещине, при этом амплитуда метки не изменяется и остается равной  $\rho_0$ .

### 3. Конвективно-кондуктивные процессы при движении метки трассера в трещине гидроразрыва

В предыдущем разделе пренебрегалось диффузионными процессами при движении метки трассера в трещине гидроразрыва. Благодаря этому достигнута цель оценки вклада конвективного переноса примеси в процесс формирования поля концентрации трассера. В данном разделе, напротив, предполагается оценить вклад молекулярной и конвективной диффузии в направлении щели при отсутствии утечек. Заметим, что вклад диффузии в поперечном к трещине направлении детально исследован ранее [Хабидуллин, Хасанова, 2023].

Здесь использован метод решения задачи о конвективной диффузии трассера, позволяющий упростить исследование взаимного влияния диффузионных и конвективных процессов при движении метки трассера в трещине гидроразрыва. Для этого при решении использована комбинация из метода характеристик и метода функции Грина, основанного на использовании аппарата теории обобщенных функций.

Процессы конвективной диффузии при движении метки трассера в трещине гидроразрыва, как следует из вышеизложенного, могут быть исследованы на основе задачи Коши для уравнения Эйнштейна — Колмогорова:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x). \quad (3.2)$$

Совершим переход к описанию процессов в подвижной системе координат, движущейся со скоростью  $w$  в положительном направлении пространственной оси. Взаимосвязь новых переменных  $t', x'$  со старыми совпадает с преобразованием Галилея  $t, x$ :

$$t' = t, \quad x' = x - wt. \quad (3.3)$$

При такой замене переменных вид пространственных производных в подвижной и неподвижной системе не изменяется:  $\partial \rho / \partial x = \partial \rho / \partial x'$ ,  $\partial^2 \rho / \partial x^2 = \partial^2 \rho / \partial x'^2$ . Для преобразования производной по времени следует воспользоваться понятием полной производной, которая в подвижной системе представляется как

$$\frac{d\rho}{dt'} = \frac{\partial \rho}{\partial t'} + \frac{dx'}{dt'} \frac{\partial \rho}{\partial x'} = \frac{\partial \rho}{\partial t'} - w \frac{\partial \rho}{\partial x'}. \quad (3.4)$$

Уравнение конвективной диффузии при этом преобразуется к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + (u - w) \frac{\partial \rho}{\partial x'} - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x'^2} = 0, \quad -\infty < x' < \infty, \quad t' > 0. \quad (3.5)$$

Далее заметим, что координаты  $x'$  и  $x$  при  $t' = t = 0$  совпадают:  $x' = x$ . Это позволяет записать начальное условие в виде

$$\rho|_{t'=0} = \rho_0(x'). \quad (3.6)$$

Для простоты полагаем, что скорость конвективного переноса трассера является постоянной. Задача конвективной диффузии в подвижной системе координат, когда  $u$  и  $w$  совпадают по величине, является чисто диффузионной:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x'^2} = 0, \quad -\infty < x' < \infty, \quad t' > 0, \quad (3.7)$$

$$\rho|_{t'=0} = \rho_0(x'). \quad (3.8)$$

Ее решение построим на основе метода функций Грина. Для этого начальное условие представим с помощью дельта-функции в виде эквивалентных источников в правой части уравнения (2.7):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x'^2} = \rho_0(x')\delta(t'), \quad -\infty < x' < \infty, \quad t' > 0. \quad (3.9)$$

В справедливости такого представления нетрудно убедиться путем лебеговского интегрирования правой части уравнения (3.9) по времени.

Далее преобразуем правую часть уравнения (3.9) к виду

$$\rho_0(x')\delta(t') = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(y)\delta(t')\delta(x' - y)dy.$$

Подставив всё это в правую часть уравнения, для функции Грина ( $G$ ), входящей в выражение

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(y)G(x' - y, t')dy,$$

получим уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial t'} - D \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} = \delta(t')\delta(x') = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(i(mt' + nx'))dmdn. \quad (3.10)$$

Отметим, что входящие в уравнение (3.10) дельта-функции выражены через интеграл Фурье. Нетрудно убедиться, что действие оператора  $\hat{L} = \partial/\partial t' - D(\partial^2/\partial x'^2)$  на правую часть уравнения (3.10) сводится к умножению подынтегрального выражения на  $im + Dn^2$ . Это позволяет восстановить искомое выражение для функции Грина действием обратного оператора, которое состоит в умножении подынтегрального выражения на  $(im + Dn^2)^{-1}$ :

$$G = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i(mt' + nx'))}{im + Dn^2} dmdn. \quad (3.11)$$

Подынтегральное выражение в (3.11) содержит одну особую точку:  $m = iDn^2$ . С помощью теории вычетов получим выражение для интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i(mt' + nx'))}{im + Dn^2} dm = \begin{cases} 2\pi \exp(-Dn^2 t' + inx'), & t' > 0, \\ 0, & t' < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Следующий интеграл сводится к интегралу ошибок, а его окончательное выражение имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Dn^2 t' + inx') dn = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{Dt'}} \exp\left(-\frac{x'^2}{4Dt'}\right). \quad (3.13)$$

С помощью этих интегралов выражение для функции Грина запишем как

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt'}} \exp\left(-\frac{x'^2}{4Dt'}\right), \quad (3.14)$$

а искомое решение представим в виде

$$\rho = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt'}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(y) \exp\left(-\frac{(x' - y)^2}{4Dt'}\right) dy. \quad (3.15)$$

Используя полученное решение, можно легко показать, что общая масса вещества трассера не изменяется при движении метки за счет диффузии в направлении трещины. Для этого вычислим общую массу трассера путем интегрирования по длине трещины в любой момент времени:

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x') dx' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt'}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x' - y)^2}{4Dt'}\right) dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(y) dy. \end{aligned} \quad (3.16)$$

В результате убеждаемся, что в любой момент времени найденное значение массы трассера равно массе в метке в начальный момент времени. Здесь учтено, что

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x' - y)^2}{4Dt}\right) dx' = 1.$$

Для метки трассера с постоянной начальной плотностью  $\rho_0$  в интервале  $-(L/2) < x' < L/2$  получим выражение для плотности трассера в виде

$$\begin{aligned} \rho(x', t') &= \frac{\rho_0}{2} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{\frac{L}{2} - x'}{2\sqrt{Dt'}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-\frac{L}{2} - x'}{2\sqrt{Dt'}}\right) \right) = \\ &= \frac{\rho_0}{2} \left( \operatorname{erfc}\left(\frac{-\frac{L}{2} - x'}{2\sqrt{Dt'}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{L}{2} - x'}{2\sqrt{Dt'}}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$



Итак, в подвижной системе координат, когда ее скорость совпадает со скоростью конвективного переноса примеси (а не скорости движения жидкости), процесс эволюции метки трассера является диффузионным. Диффузионная эволюция метки, по сути, накладывается на конвективную эволюцию, закономерности которой полностью определяются в неподвижной системе координат без учета диффузии.

Выражение (3.17) позволяет восстановить с использованием замены (3.3) решение задачи Коши для уравнения Эйнштейна — Колмогорова и представить его как

$$\begin{aligned} \rho(x', t') &= \frac{\rho_0}{2} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{\frac{L}{2} - x + ut}{2\sqrt{Dt}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{-\frac{L}{2} - x + ut}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) = \\ &= \frac{\rho_0}{2} \left( \operatorname{erfc} \left( \frac{ut - \frac{L}{2} - x}{2\sqrt{Dt'}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{ut + \frac{L}{2} - x}{2\sqrt{Dt'}} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

## Результаты и обсуждение

Полученные зависимости открывают широкие возможности для вычислительных экспериментов, которые позволяют более глубоко понять основные закономерности эволюции метки трассера в пластах и трещинах гидроразрыва. Ниже обсуждаются только некоторые из них применительно к исследованию трещин гидроразрыва.

На рис. 1 представлены зависимости скорости движения метки трассера в трещине гидроразрыва от аккумулирующей способности пропанта, т. е. константы Генри ( $K$ ), при различных значениях пористости. Из анализа кривых (рис. 1) следует, что при увеличении аккумулирующей способности вещества пропанта скорость движения метки (при той же скорости фильтрации) уменьшается. Диапазон изменения скорости возрастает с уменьшением пористости. В трещине, не заполненной пропантом, скорость движения метки совпадает с истинной скоростью течения жидкости в трещине.

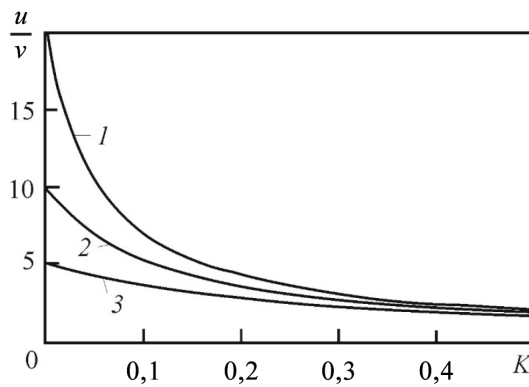
Таким образом, осаждение вещества на скелет пористой среды приводит к замедлению движения метки. Это объясняется тем, что на переднем фронте метки происходит перемещение вещества трассера на скелет, а на заднем фронте — вымывание вещества трассера из скелета. Поскольку скелет является неподвижным, то осажденная на скелет часть вещества трассера также остается неподвижной, что и приводит к замедлению скорости движения метки.

Более глубокий анализ развитой теории показывает, что постулируемое условие химического равновесия трассера между скелетом и текучей фазой соответствует полному вымыванию вещества трассера со скелета при прохождении заднего фронта. Это является хорошим приближением для практических расчетов в случае, когда в качестве трассеров используются слабоосаждаемые вещества. Если же осаждение играет более заметную роль и даже приводит к появлению хвоста метки, то использование изокумулянты Генри для практических расчетов недостаточно. Это означает необходимость использования

более высоких степеней разложений Тейлора в выражении (1.11) или учета гистерезисных процессов, что требует более сложных уравнений равновесия.

Таким образом, осаждение трассера на скелет в рамках модели изокумулянты Генри не приводит к изменению концентрации в самой метке. Значение концентрации трассера в интервале метки не зависит от величины коэффициента Генри. Кривые, приведенные на рис. 1, свидетельствуют, что изменение значений этого коэффициента вызывает только изменение скорости движения метки в трещине: при увеличении коэффициента Генри скорость метки убывает. Физическая сущность этого явления заключается в том, что на переднем фронте происходит осаждение вещества трассера на скелет (пропант), а на заднем — обратный процесс, т. е. вымывание. С увеличением коэффициента Генри количество осажденного вещества увеличивается. Это является причиной уменьшения скорости движения метки трассера.

Более глубокие исследования и вычислительные эксперименты показывают, что утечки трассерной жидкости из трещины в пласт также не изменяют значения концентрации трассера в метке, а наличие утечек приводит только к изменению длины метки.



**Рис. 1.** Зависимость относительной скорости метки в пористой среде от константы Генри при различных значениях пористости: 1 —  $m = 0,05$ ; 2 —  $m = 0,1$ ; 3 —  $m = 0,2$

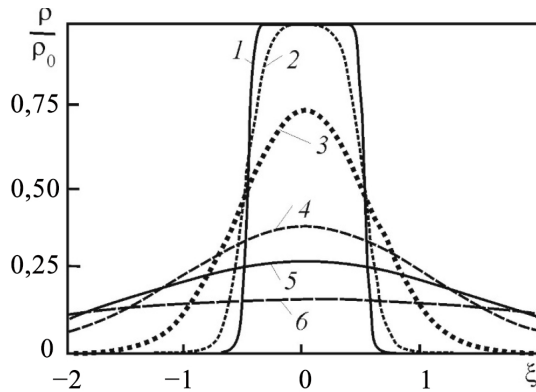
**Fig. 1.** Dependence of the relative speed of the mark in a porous medium on the Henry constant at different porosity values: 1 —  $m = 0.05$ ; 2 —  $m = 0.1$ ; 3 —  $m = 0.2$

На рис. 2 представлены пространственные распределения относительной концентрации вещества трассера от безразмерной волновой координаты  $\xi$  в различные моменты времени. Использование относительной волновой координаты  $\xi = (x - ut)/L$  означает, что наблюдатель, по сути, движется вместе с меткой с ее скоростью  $u$ , а распределения на рис. 2 соответствуют различным положениям центра метки ( $x_c = ut$ ) по длине трещины гидроразрыва.

Рис. 2 иллюстрирует вклад диффузионных процессов в эволюцию поля концентрации метки при ее движении в трещине гидроразрыва. В качестве параметра для кривых на рис. 2 использовано безразмерное время  $\tau = Dt/L^2$ . Использование безразмерных

переменных и волновой координаты позволяет обеспечить формирование довольно общих представлений об изменении формы прямоугольной в исходном состоянии метки в процессе ее движения. Из анализа кривых на рис. 2 следует, что диффузионные процессы обеспечивают «растекание» метки и уменьшение ее амплитуды в процессе движения. При этом общее количество вещества трассера за счет диффузии не изменяется.

Результаты расчетов свидетельствуют о том, что при значениях безразмерного времени  $\tau < 0,001$ , что соответствует характерному времени движения, оцениваемому выражением  $T = (0,001 L^2)/D$ , вкладом диффузии можно пренебречь. Из полученного выражения следует, что величина характерного времени зависит от длины метки. Для метки длиной 10 м это время составляет  $T = 10^8$  с, если считать, что диффузия является чисто микроскопической молекулярной. Для конвективной диффузии  $D \sim 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$  это время составляет  $T = 10^2$  с, что свидетельствует о необходимости и важности ее учета при исследовании эволюции метки трассера.



**Рис. 2.** Зависимость относительной концентрации вещества трассера от безразмерной волновой координаты  $\xi$  в различные моменты безразмерного времени  $\tau$ : 1 — 0,001; 2 — 0,01; 3 — 0,1; 4 — 0,5; 5 — 1; 6 — 3

**Fig. 2.** Dependence of the relative concentration of the tracer substance on the dimensionless wave coordinate  $\xi$  at various moments of dimensionless time  $\tau$ : 1 — 0.001; 2 — 0.01; 3 — 0.1; 4 — 0.5; 5 — 1; 6 — 3

## Заключение

Отметим, что результаты, представленные в статье, получены на основе законов сохранения. Предположения, которые использованы для построения аналитических решений, четко сформулированы и не вызывают возражений. Решения задач найдены на основе хорошо обоснованных методов и легко контролируются прямой подстановкой, что гарантирует их математическую достоверность. Результаты численных расчетов также легко контролируемы. Традиционно модели такого рода служат основой для верификации численных моделей, а сопоставление с результатами натурных и промышленных экспериментов позволяет уточнить природу процессов и обеспечить достоверность результатов интерпретации.

Итак, развитая теория позволяет сформировать основные представления о вкладе различных процессов в эволюцию метки трассера и рассчитать поля концентрации трассера в трещине гидроразрыва и пористой среде. Модели такого рода представляют новые возможности для развития технологии и методов интерпретации трассерных исследований на месторождениях нефти и газа.

## Условные обозначения

$D$  — полный коэффициент молекулярной и конвективной диффузии,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $D_d$  — эффективный коэффициент молекулярной диффузии,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $D_{cv}$  — коэффициент конвективной диффузии,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $D_{\mu_w}, D_{\mu_s}$  — коэффициенты диффузии вещества трассера в несущей жидкости и скелете относительно химического потенциала;  $G$  — функция Грина;  $i$  — мнимая единица;  $\vec{j}$  — вектор плотности потока массы,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $\vec{j}_s = -D_{\mu_s} \nabla[(1 - m)\mu_s]$  — вектор плотности диффузионного потока вещества трассера в скелете,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $\vec{j}_w = -D_{\mu_w} \nabla(m\mu_w) + \rho_w \vec{v}$  — вектор плотности суммарного конвективного и диффузионного потоков вещества трассера в текущей жидкости,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $L$  — длина метки,  $\text{м}$ ;  $m$  — пористость;  $T$  — время закачки трассера в пласт,  $\text{с}$ ;  $t$  — время,  $\text{с}$ ;  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  — вектор скорости фильтрации,  $\text{м}/\text{с}$ ;  $w$  — скорость движения системы отсчета,  $\text{м}/\text{с}$ ;  $x, y$  — пространственные координаты,  $\text{м}$ ;  $x_c$  — координата центра метки,  $\text{м}$ ;  $\alpha$  — постоянная химической реакции,  $\text{с}^{-1}$ ;  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака;  $\mu_w, \mu_s$  — химический потенциал трассера в несущей жидкости и скелете соответственно,  $\text{Дж}$ ;  $\xi = (x - ut)/L$  — относительная волновая координата;  $\rho_w$  — плотность (концентрация) трассера в жидкости,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\alpha$  — постоянная химической реакции,  $\text{с}^{-1}$ ;  $\rho_l$  — плотность фазы, несущей трассер,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\rho_c$  — плотность вещества скелета,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\tau = Dt/L^2$  — безразмерное время;  $\Phi(x)$  — функция единичного скачка Хевисайда.

Нижние индексы:  $d$  — диффузионный;  $l, w$  — несущая жидкость (вода);  $s, s$  — скелет;  $cv$  — конвективный;  $\mu$  — отнесенный к химическому потенциалу;  $\Sigma$  — суммарная величина;  $0$  — начальное значение.

Обозначения математических символов общеприняты.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- Бикметова А. Р., Асалхузина Г. Ф., Давлетбаев А. Я., Штинов В. А., Макеев Г. А., Мирошниченко В. П., Щутский Г. А., Сергейчев А. В. 2022. Оценка параметров трещин в горизонтальных скважинах с многостадийным гидроразрывом пласта путем настройки гидродинамической модели на результаты трассерных исследований // Нефтяное хозяйство. № 11. С. 118–121. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2022-11-118-121>
- Гильманов А. Я., Фёдоров К. М., Шевелёв А. П. 2020. Интегральная модель парогравитационного дренажа // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. № 6. С. 74–84. <https://doi.org/10.31857/S0568528120060055>
- Мальцев В. В., Асмандияров Р. Н., Байков В. А., Усманов Т. С., Давлетбаев А. Я. 2012. Исследование развития трещин автоГРП на опытном участке Приобского месторождения с линейной системой разработки // Нефтяное хозяйство. № 5. С. 70–73.

- Нигматулин Р. И. 1987. Динамика многофазных сред: в 2 ч. М.: Наука. Часть 1, 2.
- Филиппов А. И. 2016. Основы теории переноса радиоактивных растворов в пористой среде. Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ. 219 с.
- Хабидуллин И. Л., Хасанова Р. З. 2023. Моделирование течения индикаторной жидкости в пласте с трещиной гидроразрыва // Инженерно-физический журнал. Том 96. № 6. С. 1520–1526.
- Estévez E. A. P., Mesa R. F., Pavlyukevich N. V. 2022. Nonstationary diffusion in hydrolytic degradation of a porous polymeric matrix // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. Vol. 95. No. 6. Pp. 1615–1623. <https://doi.org/10.1007/s10891-022-02630-8>
- Goldobin D. S., Krauzin P. V. 2015. Formation of bubbly horizon in liquid-saturated porous medium by surface temperature oscillation // Physical Review E. Vol. 92. No. 6. Article 063032. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.063032>
- Mikhaylov P. N., Filippov A. I., Mikhaylov A. P. 2013. Filtration of radioactive solutions in jointy layers // Mass Transfer — Advances in Sustainable Energy and Environment Oriented Numerical Modeling / H. Nakajima (ed.). Rijeka: IntechOpen. <https://doi.org/10.5772/56042>

## References

- Bikmetova, A. R., Asalkhuzina, G. F., Davletbaev, A. Ya., Shtinov, V. A., Makeev, G. A., Miroshnichenko, V. P., Schutsky, G. A., & Sergeichev, A. V. (2022). Estimating parameters in the horizontal wells with multistage fracturing using reservoir modeling and tracer analysis. *Oil Industry*, (11), 118–121. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2022-11-118-121> [In Russian]
- Gilmanov, A. Ya., Fedorov, K. M., & Shevelev, A. P. (2020). Integral model of steam-assisted gravity drainage. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, (6), 74–84. <https://doi.org/10.31857/S0568528120060055> [In Russian] (English version: *Fluid Dynamics*, 55(6), 793–803. <https://doi.org/10.1134/S0015462820060051>)
- Maltsev, V. V., Asmandiyarov, R. N., Baikov, V. A., Usmanov, T. S., & Davletbaev, A. Ya. (2012). Testing of auto hydraulic-fracturing growth of the linear oilfield development system of Priobskoye oil field. *Oil Industry*, (5), 70–73. [In Russian]
- Nigmatulin, R. I. (1987). *Dynamics of Multiphase Systems* (Vol. 1, 2). Nauka. [In Russian]
- Filippov, A. I. (2016). *Fundamentals of the Theory of Transfer of Radioactive Solutions in a Porous Medium*. Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology. [In Russian]
- Khabibullin, I. L., & Khasanova, R. Z. (2023). Simulation of the indicator liquid flow in a formation with hydraulic fracturing. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 96(6), 1520–1526. [In Russian]
- Estévez, E. A. P., Mesa, R. F., & Pavlyukevich, N. V. (2022). Nonstationary diffusion in hydrolytic degradation of a porous polymeric matrix. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 95(6), 1615–1623. <https://doi.org/10.1007/s10891-022-02630-8>
- Goldobin, D. S., & Krauzin, P. V. (2015). Formation of bubbly horizon in liquid-saturated porous medium by surface temperature oscillation. *Physical Review E*, 92(6), Article 063032. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.063032>
- Mikhaylov, P. N., Filippov, A. I., & Mikhaylov, A. P. (2013). Filtration of radioactive solutions in jointy layers. In H. Nakajima (Ed.), *Mass Transfer — Advances in Sustainable Energy and Environment Oriented Numerical Modeling*. IntechOpen. <https://doi.org/10.5772/56042>

## Информация об авторах

*Александр Иванович Филиппов*, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия

filippovai1949@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0964-9805>

*Альфред Ядгарович Давлетбаев*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной физики, Физико-технический институт, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

davletbaevay@rambler.ru

*Рафаэль Радикович Гареев*, соискатель ученой степени кандидата технических наук, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

garrafrad@mail.ru

## Information about the authors

*Alexander I. Filippov*, Dr. Sci. (Tech.), Professor, Chief Researcher, Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia

filippovai1949@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0964-9805>

*Alfred Ya. Davletbaev*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Applied Physics, Institute of Physics and Technology, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

davletbaevay@rambler.ru

*Rafael R. Gareev*, Cand. Sci. (Tech.) Degree Seeking Applicant, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

garrafrad@mail.ru