

Александр Дмитриевич БЕКМАН<sup>1</sup>  
Сергей Викторович СТЕПАНОВ<sup>2</sup>  
Александр Альфредович РУЧКИН<sup>3</sup>  
Дмитрий Валерьевич ЗЕЛЕНИН<sup>4</sup>

УДК 622.276

## НОВЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ СКВАЖИН В РАМКАХ МОДЕЛИ CRM

<sup>1</sup> кандидат физико-математических наук,  
старший менеджер, Тюменский нефтяной научный центр  
adbekman@tnnc.rosneft.ru; ORCID: 0000-0002-5907-523X

<sup>2</sup> доктор технических наук, профессор  
кафедры прикладной и технической физики,  
Тюменский государственный университет;  
старший эксперт, Тюменский нефтяной научный центр  
svstepanov@tnnc.rosneft.ru

<sup>3</sup> кандидат технических наук,  
эксперт, Тюменский нефтяной научный центр  
aaruchkin@tnnc.rosneft.ru

<sup>4</sup> главный специалист, Тюменский нефтяной научный центр  
dvzelenin@tnnc.rosneft.ru; ORCID: 0000-0002-5918-2377

### Аннотация

Одной из важнейших задач при оптимизации заводнения является поиск и определение влияния нагнетательных скважин на добывающие. Количественная оценка такого влияния по минимальному набору данных о динамике дебитов, приемистостей, забойных давлений добывающих скважин возможна с помощью емкостно-резистивных

---

**Цитирование:** Бекман А. Д. Новый алгоритм нахождения оптимального решения задачи определения коэффициентов взаимовлияния скважин в рамках модели CRM / А. Д. Бекман, С. В. Степанов, А. А. Ручкин, Д. В. Зеленин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Том 5. № 3. С. 164-185.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-164-185

моделей (capacitance-resistive models, CRM). Она сводится к решению обратной задачи с большим количеством параметров и ограничений. Это приводит к тому, что целевая функция имеет в общем случае большое количество локальных минимумов, что затрудняет поиск решения с помощью градиентных методов оптимизации. Использование стохастических методов может требовать значительных временных затрат и зачастую в практически важных случаях за приемлемое время выдавать решение, весьма далекое от оптимального. Кроме того, использование универсальных (коммерческих) оптимизаторов скрывает от исследователя важные особенности решаемой задачи, в частности неоднозначность решения, часто возникающую вследствие погрешностей и ошибок в данных.

В настоящей статье рассматриваются две постановки задачи определения коэффициентов влияния: 1) с одной добывающей скважиной; 2) с числом добывающих скважин более одной.

Рассматриваются авторские алгоритмы поиска решения этих задач путем сведения их к последовательности задач квадратичного программирования. Характерной особенностью алгоритма является значительный выигрыш в вычислительной эффективности при высоком качестве решения оптимизационной задачи по сравнению с другими известными алгоритмами. Другим преимуществом является возможность анализа исходных данных с точки зрения неоднозначности решения обратной задачи, т. е. существования неединственного решения или широкого множества качественно различных, но близких с точки зрения целевой функции решений.

Рассмотрены условия, при которых полученное решение будет являться единственным и оптимальным для задачи в первой из постановок. Предложены способы получения приближенного решения для второй постановки. Также предложен новый формат визуализации, дающий исследователю представление о структуре возможных приближенных решений поставленной задачи. Приведены данные численных экспериментов с использованием скважинных данных по синтетическим объектам, сопоставляющих авторский алгоритм с рядом других.

#### **Ключевые слова**

Взаимовлияние скважин, обратная задача, Capacitance-Resistive Models, CRM, метод перебора граней.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-164-185**

#### **Введение**

Оперативная оценка коэффициентов взаимовлияния нагнетательных и добывающих скважин является одной из практически важных задач управления разработкой нефтяных месторождений. Оценка этих коэффициентов возможна, например, по результатам гидродинамического моделирования, однако это требует большого количества временных и вычислительных ресурсов и не удовлетворяет условию оперативности. В связи с этим в настоящее время активно развивается ряд различных подходов к аналитическому решению задачи

оценки взаимовлияния скважин с использованием, например, МРІ-моделей [7], нейронных сетей [3], CRM-моделей [9].

Исходя из собственного опыта использования различных математических моделей для оценки взаимовлияния скважин, представляется, что компромиссным вариантом для обеспечения вычислительной эффективности и физической содержательности является использование CRM-моделей [2]. В работе [1] показаны особенности решения обратной задачи оценки взаимовлияния скважин при использовании CRM-моделей. В частности, отмечается, что время расчета по модели CRM при решении рассматриваемой задачи оказывается несоизмеримо меньшим, чем при использовании гидродинамического моделирования. Тем не менее вопрос вычислительной эффективности применительно к решению обратных задач оценки взаимовлияния скважин нельзя считать решенным. Это связано с тем, что в зависимости от строения пластов, систем разработки, взаимовлияние скважин может проявляться не только для ближайших скважин-соседей, но также и между относительно далеко расположенными скважинами. Это приводит к увеличению управляющих параметров, а значит и к увеличению степени неопределенности для искомого результата — коэффициентов взаимовлияния. Таким образом, целью настоящей работы была разработка нового алгоритма решения обратной задачи оценки взаимовлияния скважин с использованием CRM-моделей, который бы обладал следующими качествами:

- 1) являлся более эффективным с вычислительной точки зрения при наличии большого числа параметров и ограничений, чем известные универсальные алгоритмы оптимизации. Для этого новый алгоритм должен учитывать особенности поставленной задачи, в частности вид целевой функции и накладываемые на неизвестные параметры ограничения;
- 2) находил решение, близкое к глобальному минимуму целевой функции, несмотря на наличие большого числа локальных минимумов.

### Постановка задачи

На настоящий момент в литературе описано довольно много разновидностей CRM-моделей (подробный обзор можно найти, например, в [5]), для которых характерно различное описание исследуемого объекта и, как следствие, различный набор неизвестных параметров модели. В рамках настоящей статьи рассматривается модель материального баланса, известная в литературе как CRMP, которая рассматривает систему из  $NP$  добывающих и  $NI$  нагнетательных скважин и базируется на следующей формуле оценки дебита добывающей скважины:

$$q_j(t_n) = q_j(t_0)e^{-\frac{(t_n-t_0)}{\tau_j}} + \sum_{k=1}^n \left( e_j + \sum_{i=1}^{NI} f_{ij}I_{i,k} - J_j\tau_j \frac{\Delta p_{j,k}}{\Delta t_k} \right) e^{-\frac{(t_n-t_k)}{\tau_j}} \left( 1 - e^{-\frac{(t_k-t_{k-1})}{\tau_j}} \right), \quad (1)$$

$$j = \overline{1, NP},$$

где  $j$  — номер скважины,  $t_n$  —  $n$ -й шаг рассматриваемого интервала истории работы скважины (сут.). Известными величинами здесь являются:  $q_j(t_0)$  — дебит скважины в начальный момент времени ( $\text{м}^3/\text{сут.}$ ),  $I_{i,k}$  — приемистость  $i$ -й нагнетательной скважины на  $k$ -м временном шаге ( $\text{м}^3/\text{сут.}$ ),  $p_{j,k}$  — забойное давление в  $j$ -й добывающей скважине на  $k$ -м временном шаге (атм). Неизвестными величинами являются:  $\tau_j$  — константа времени (величина обратная коэффициенту падения добычи, сут.),  $J_j$  — коэффициент продуктивности ( $\text{м}^3/(\text{сут.} \cdot \text{атм})$ ),  $e_j$  — интенсивность аквифера ( $\text{м}^3/\text{сут.}$ ) и  $f_{ij}$  — безразмерные коэффициенты влияния  $i$ -й нагнетательной на  $j$ -ю добывающую скважину.

Для определения значений неизвестных величин формулируется оптимизационная задача: задается целевая функция, выражающая отклонение модельных (расчетных) дебитов от фактических, а также диапазоны допустимых значений для неизвестных величин. При этом целевая функция может формулироваться как для каждой добывающей скважины отдельно:

$$F_j = \sum_{n=1}^T (\tilde{q}_j(t_n) - q_j(t_n))^2, \quad (2)$$

так и совместно для всех добывающих скважин:

$$F = \sum_{j=1}^{NP} F_j = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{n=1}^T (\tilde{q}_j(t_n) - q_j(t_n))^2, \quad (3)$$

где  $\tilde{q}_j(t_n)$  — фактический дебит  $j$ -й скважины за  $n$ -й шаг рассматриваемого интервала истории разработки, а  $T$  — число временных шагов в рассматриваемом интервале истории работы скважины. Исходя из физического смысла величин, а также из прочих экспертных соображений, на неизвестные параметры накладываются ограничения вида:

$$\begin{aligned} J_j \min &\leq J_j \leq J_j \max, \\ \tau_j \min &\leq \tau_j \leq \tau_j \max, \\ e_j \min &\leq e_j \leq e_j \max, \\ f_{ij} \min &\leq f_{ij} \leq f_{ij} \max, \\ j &= \overline{1, NP}, \\ i &= \overline{1, NI}. \end{aligned} \quad (4)$$

В дальнейшем область допустимых значений всех параметров будем обозначать через  $\Omega$ . Совместно с (3) также используют естественное условие вида (5) [1]:

$$\sum_{j=1}^{NP} f_{ij} \leq 1, \quad (5)$$

$$i = \overline{1, NI}.$$

Отметим, что в ряде случаев сумма в (5) из экспертных соображений может быть ограничена не единицей, а меньшей величиной, например, когда закачка по рассматриваемой скважине заведомо непроизводительна и примерно известно, какая доля закачиваемого флюида оказывает влияние на добычу.

Формулировка задачи в виде (2) не допускает задания дополнительных ограничений по нагнетательным скважинам вида (5), позволяющих получить более достоверную модель. С другой стороны, решение в формулировке (2) распадается на решение  $NP$  отдельных задач значительно меньшей размерности и, соответственно, может быть найдено с меньшими затратами, и в то же время в частных случаях оно может являться вполне удовлетворительным.

Как видно из (2) и (3), целевые функции не являются линейными относительно неизвестных параметров, к тому же сложность задачи добавляют ограничения в виде неравенств. Для определения неизвестных параметров можно использовать, например, методы типа Монте-Карло либо градиентные методы, генетические алгоритмы или метод имитации отжига. При этом, как будет показано ниже, для рассматриваемых целевых функций характерно наличие большого числа локальных минимумов, поэтому все вышеуказанные методы для решения одной и той же задачи целесообразно выполнять многократно, с большим количеством начальных приближений, чтобы с большей вероятностью получить достаточно хорошее (с точки зрения значения целевой функции) решение. Однако недостатком этого подхода являются большие временные затраты, т. е. вероятность получить оптимальное (или хотя бы достаточно хорошее) решение будет тем выше, чем больше начальных приближений будет рассмотрено, а размерность задачи (т. е. количество неизвестных параметров) при решении практических задач может измеряться десятками, сотнями и даже тысячами.

Некоторые подходы к сокращению временных затрат на решение уже были опубликованы ранее. Так, многими исследователями (например, [1, 8]) предлагалось сокращать размерность задачи за счет обнуления  $f_{ij}$  для скважин, расположенных достаточно далеко друг от друга (т. е. ввести понятие «радиус влияния»). В [8] предлагалось в дополнение к этому решать вначале задачу в постановке (2), обнулять коэффициенты  $f_{ij}$ , значения которых оказались ниже некоторого выбранного заранее порога, после чего уже переходить к задаче (3). В [6] также говорится об использовании в вычислительных процедурах заранее аналитически выраженных из (2) и (3) градиента и матрицы Гессе, что сокращает время работы коммерческого (т. е. неспецифического для решаемой задачи) оптимизатора. По мнению авторов статьи, перечисленные меры, безусловно, являются полезными, но их следует охарактеризовать как экстенсивные, в то

время как интенсивным методом увеличения скорости поиска решения можно назвать разработку специфических численных методов, использующих особенности целевых функций (2) и (3), а также условий вида (4) и (5). Подробнее о таких численных методах будет сказано ниже.

**Вопрос единственности решения задачи и существования локальных минимумов**

Покажем, что в общем случае решение рассматриваемой задачи не единственно, т. е. целевая функция (2) имеет не единственный локальный минимум. Рассмотрим для простоты задачу с одной добывающей скважиной ( $NP = 1$ ). Также для простоты положим, что рассматриваемые временные отсчеты  $t_n$  идут с равномерным шагом. Введем следующую замену переменных:

$$x = e^{\frac{(t_k - t_{k-1})}{\tau_1}}. \tag{6}$$

Заметим также, что величина  $J_j \tau_j$  равна произведению общей сжимаемости системы на дренируемый объем. Эту величину будем считать константой. Далее зафиксируем произвольным образом некоторые допустимые значения для всех неизвестных параметров, кроме  $\tau_1$ . Тогда с учетом (6) соотношение (1) примет вид:

$$q_1(t_n) = q_1(t_0)x^n + \sum_{k=1}^n \gamma_k x^{(n-k)}(1-x),$$

а целевая функция (2) примет вид:

$$F_1(x) = \sum_{n=1}^T \left( \tilde{q}_1(t_n) - q_1(t_0)x^n + \sum_{k=1}^n \gamma_k x^{(n-k)}(1-x) \right)^2,$$

где  $\gamma_k$  — константы (выражения, зависящие от зафиксированных параметров и произведения  $J_j \tau_j$  и не зависящие от  $\tau_1$ ). Таким образом, при указанных допущениях  $F_1(x)$  является многочленом степени  $2T$ . Производная  $F_1(x)$  по  $x$  будет иметь  $2T - 1$  корень, а значит сама  $F_1(x)$  — до  $(T - 1)$  локальных минимумов. Очевидно, что достаточно легко построить пример полинома, который будет в точках локальных минимумов принимать равные значения. Эти значения будут приниматься при различных значениях  $x$ , которым с учетом (6) будут соответствовать различные значения  $\tau_1$ . Таким образом, по крайней мере в частных случаях, при вырожденных условиях (4) задача минимизации целевой функции (2) имеет неединственное решение, а число локальных минимумов целевой функции прямо пропорционально количеству рассматриваемых временных шагов. В частности, это доказывает нецелесообразность применения методов типа градиентного спуска (с одним начальным приближением) для поиска ре-

шения. Очевидно, что неединственность локального минимума целевой функции будет иметь место не только при вырожденных условиях (4). Это же подтверждается и опытом практического использования градиентных алгоритмов: они дают качественно разные (формирующие принципиально разные картины потоков в пласте) решения одной и той же задачи при выборе различных начальных приближений — эти решения соответствуют различным локальным минимумам целевой функции.

### Поиск оптимального решения в задаче с одной добывающей скважиной

Рассмотрим случай задачи с одной добывающей и  $NI$  нагнетательными скважинами. Введем в рассмотрение функцию:

$$\varphi(\tau) = \min_{J, e, f_i} F(\tau, J, e, f_i), i = \overline{1, NI}. \quad (7)$$

Здесь индекс  $j$  у неизвестных величин и функции  $F$  равен 1 и опущен для простоты, а  $F$  задается формулой (2). Ясно, что для вычисления этой функции при конкретном фиксированном значении  $\tau$  требуется подставить это значение в (2) и решить оптимизационную задачу с ограничениями (4). При этом, в отличие от исходной постановки, целевая функция представляет собой неотрицательно определенную квадратичную форму. Этот факт, а также линейность неравенств в (4) позволяет для нахождения решения использовать методы квадратичного программирования. В частности, все результаты, упоминаемые в настоящей статье, получены с использованием метода перебора граней [4].

Заметим, что значение  $\varphi(\tau)$  существует при любом фиксированном значении  $\tau$ , т. к.  $F$  ограничена снизу, а множество допустимых значений для параметров  $J, e, f_i$  не пусто (обозначим это множество через  $\Omega$ ). Однако в общем случае значению  $\varphi(\tau)$  может соответствовать не единственный набор  $J, e, f_i$ . Такая ситуация возникает, когда матрица Гессе квадратичной формы при заданном  $\tau$  вырождена. Если при этом  $\tau = \underset{\tau}{\operatorname{argmin}} \varphi(\tau)$ , то это будет означать, что решение рассматриваемой задачи не единственно. Очевидным примером такой ситуации может служить случай:

$$\begin{aligned} I_i &= \text{const}, i = \overline{1, NI}, \\ q &= \text{const}, \\ e &= 0, \\ \Delta p_{1,k} &= 0, k = \overline{1, NT}. \end{aligned}$$

Подставляя эти условия в (1) и (2), получим, что целевая функция является функцией величины  $\sum_{i=1}^{NI} f_i I_i$ , которая принимает одинаковые значения на линейных множествах  $f_i$ .

Неединственность решения означает некорректность поставленной задачи: исходные данные недостаточны для того, чтобы однозначно и достоверно смо-

делировать объект исследования. В этом случае на практике программное обеспечение, решающее задачу, должно предупредить исследователя о сложившейся ситуации, чтобы он мог переформулировать задачу: расширить рассматриваемый временной интервал или задать экспертные оценки для искомым параметров. В последнем случае возможна регуляризация задачи при переходе от целевой функции (2) к функции:

$$F = \sum_{n=1}^T (\tilde{q}(t_n) - q(t_n))^2 + \sum_{i=1}^{NI} (f_i - \tilde{f}_i)^2 + (J - \tilde{J})^2 + (e - \tilde{e})^2, \quad (8)$$

где  $\tilde{f}_i, \tilde{J}, \tilde{e}$  — экспертные оценки параметров. Легко увидеть, что новые слагаемые добавляют в матрицу Гессе исходной задачи единичную диагональ. Также можно ввести перед слагаемыми весовые коэффициенты, варьируя которые можно добиться хорошей обусловленности матрицы Гессе и единственности решения задачи оптимизации.

Из (1) и (2) следует, что функция  $F$  непрерывна по  $\tau$  вместе со своими частными производными любого порядка, и, следовательно, таковы же будут коэффициенты матрицы Гессе, ее алгебраические дополнения и коэффициенты обратной матрицы (предполагается невырожденность матрицы Гессе). Отсюда следует непрерывность и дифференцируемость  $\varphi(\tau)$ , при условии, что ограничения вида (4) отсутствуют. Однако если при некотором фиксированном значении  $\tau$  минимум  $F$  достигается в точке, лежащей на границе области  $\Omega$ , то производная слева и справа могут не совпадать, если при уменьшении  $\tau$  точка минимума остается на границе, а при увеличении — покидает ее (или наоборот). Таким образом,  $\varphi(\tau)$  является кусочно-гладкой.

Исходя из вышесказанного, представляется разумным следующий алгоритм решения задачи с одной добывающей скважиной:

- 1) разбить область между  $\tau_{\min}$  и  $\tau_{\max}$  на равные интервалы с достаточно мелким шагом  $\Delta\tau$ . Шаг должен быть достаточно мелким, чтобы не пропустить ни одного интервала гладкости  $\varphi(\tau)$ ;
- 2) для каждого интервала нашего разбиения следует вычислить значения производных  $\varphi'(\tau)$  в граничных точках;
- 3) для интервалов, в начальной точке которых производная отрицательна, а в конце — положительна, ищем локальный минимум, например, методом золотого сечения. Запоминаем значения  $J, e, f_i$ , если  $\varphi(\tau)$  минимально среди всех найденных ранее локальных минимумов;
- 4) выбираем минимальное значение между точками локальных минимумов, а также  $\tau_{\min}$  и  $\tau_{\max}$ .

Вычисление функции  $\varphi(\tau)$  для фиксированного значения  $\tau$ , как уже упоминалось, предлагается выполнять методом перебора граней. Для определения знака производной достаточно вычислить значения в  $\varphi(\tau)$  и  $\varphi(\tau + \Delta\tau)$  при малом  $\Delta\tau$ . Заметим, указанный алгоритм определяет не только оптимальное значение  $\tau_{\text{opt}}$  и соответствующие ему  $J_{\text{opt}}, e_{\text{opt}}, f_{i,\text{opt}}$ , но и наборы  $J, e, f_i$ , соответствующие

другим значениям  $\tau$ . Эти данные можно отобразить в виде графиков  $\varphi(\tau)$ , а также  $J_{\text{opt}}(\tau)$ ,  $e_{\text{opt}}(\tau)$ ,  $f_{i,\text{opt}}(\tau)$ , что позволяет увидеть структуру задачи: положение полученного решения относительно других, потенциальных решений, близких к оптимальному. Пример графиков, полученных при решении поставленной задачи на синтетических данных, приведен на рис. 1 и 2. В данном примере видно, что целевая функция (отображена синим цветом) имеет единственный локальный (и глобальный) минимум на области допустимых значений, задача имеет явно выраженное единственное решение. В общем случае ситуация могла сложиться иначе: например,  $\varphi(\tau)$  могла бы иметь несколько близких по значению локальных минимумов при различных  $\tau$  либо даже целый интервал по  $\tau$  со значениями  $\varphi(\tau)$ , близкими к оптимальному. В таких случаях исследователь, опираясь на предложенные графики и собственный опыт, может сделать выбор в пользу наиболее правдоподобного из потенциальных решений.

Необходимо отметить, что на приведенных графиках (рис. 1 и 2) видна точка разрыва производной  $\varphi(\tau)$  при  $\hat{\tau} \approx 9$ . Это связано с тем, что при значениях  $\tau$ , меньших чем  $\hat{\tau}$ , точка оптимума лежит на границе  $\Omega$  ( $J = J_{\text{min}}$ ), а при значениях  $\tau$ , больших чем  $\hat{\tau}$ , принадлежит внутренности  $\Omega$ .

### Поиск оптимального решения задачи при $NP > 1$

Рассмотрим задачу построения модели CRM при количестве добывающих скважин больше одной. Для начала разобьем эту задачу на  $NP$  независимых

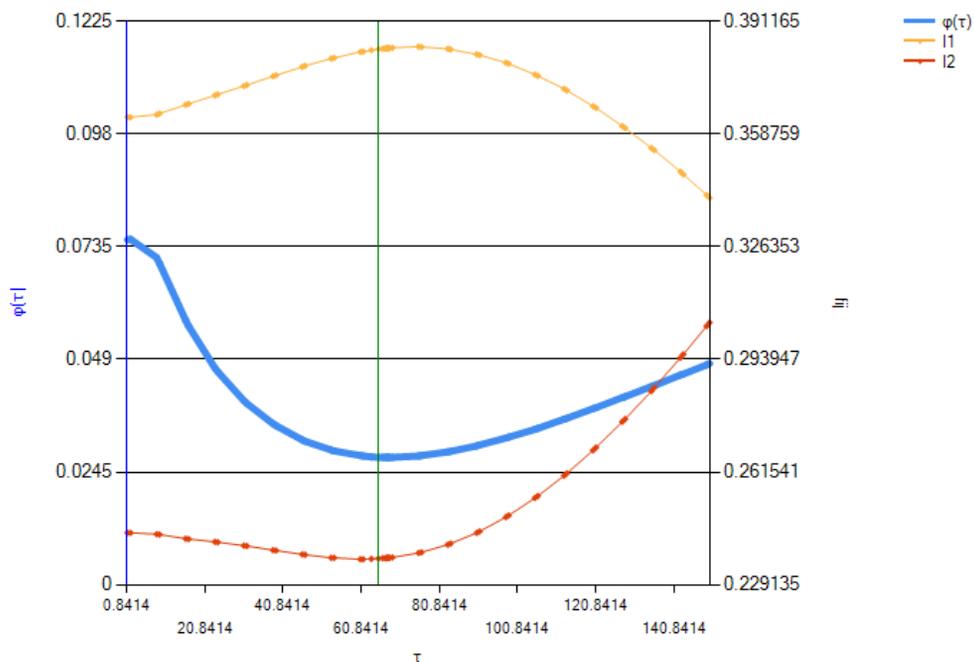


Рис. 1. Пример зависимостей  $\varphi(\tau)$ ,  $f_{1,\text{opt}}(\tau)$  и  $f_{2,\text{opt}}(\tau)$

Fig. 1. Example of  $\varphi(\tau)$ ,  $f_{1,\text{opt}}(\tau)$  and  $f_{2,\text{opt}}(\tau)$

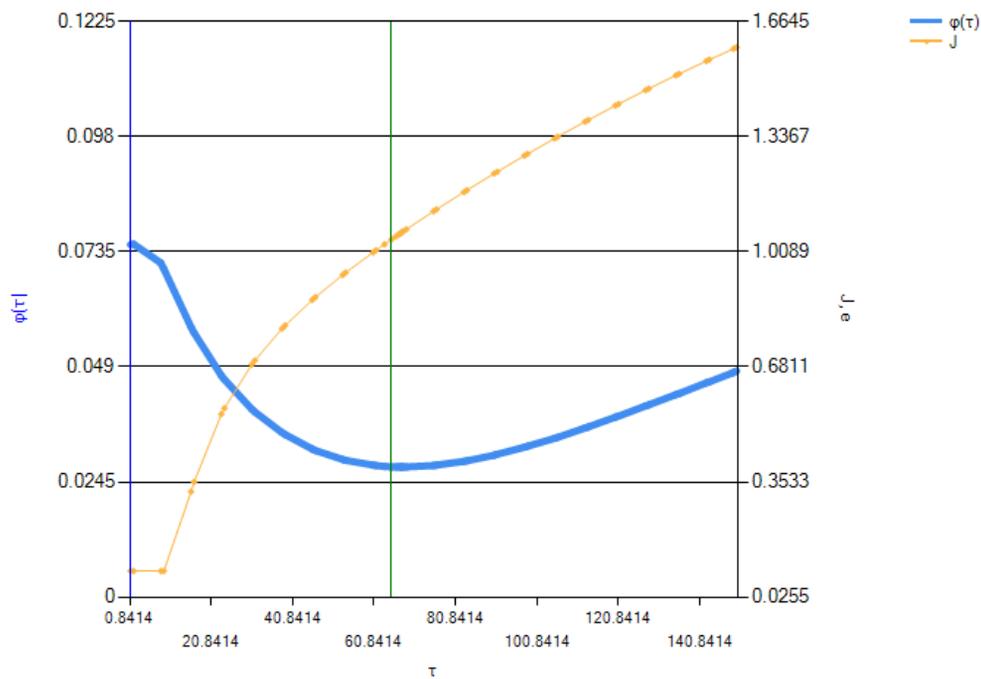


Рис. 2. Пример зависимостей  $\varphi(\tau)$  и  $J_{\text{opt}}(\tau)$  Fig. 2. Example of  $\varphi(\tau)$  and  $J_{\text{opt}}(\tau)$

задач для каждой добывающей скважины в отдельности и решим их методом, описанным в предыдущем пункте. Решение, полученное таким образом, будем называть «естественным». Очевидно, что в общем случае «естественное» решение не удовлетворяет условиям (5) и не может считаться окончательным решением поставленной задачи.

По аналогии с (7), рассмотрим функцию:

$$\Phi(\tau_1, \dots, \tau_{NP}) = \min F(\tau_1, J_1, e_1, f_{11}, \dots, \tau_{NP}, J_{NP}, e_{NP}, f_{NP1}, \dots, f_{NPNI}). \quad (9)$$

Здесь минимум берется по всем неизвестным параметрам, кроме  $\tau_1, \dots, \tau_{NP}$ . Как и в случае задачи с одной добывающей скважиной, для вычисления функции  $\Phi$  при фиксированных значениях  $\tau_1, \dots, \tau_{NP}$  требуется решить задачу квадратичного программирования. Однако, в отличие от вычисления функции  $\varphi(\tau)$ , при вычислении значения могут быть учтены условия (5). Таким образом, алгоритм нахождения общего решения сводится к минимизации функции  $NP$  переменных  $\Phi(\tau_1, \dots, \tau_{NP})$ .

Для нахождения решения можно использовать те же самые методы, которые традиционно используются для решения поставленной задачи и перечислены в начале статьи: методы Монте-Карло, генетические, градиентные методы. Однако рассмотренные выше особенности задачи позволяют изменить алгоритм поиска решения: в рамках этих методов перебирать можно не все параметры, а только  $\tau_1, \dots, \tau_{NP}$ , которых в практически важных случаях может быть на 2-3 порядка меньше. В то же время для каждого фиксированного набора  $\tau_1, \dots, \tau_{NP}$  можно получить гарантированно наилучший выбор остальных параметров задачи.

При выборе метода оптимизации  $\Phi(\tau_1, \dots, \tau_{NP})$  следует принимать во внимание следующие особенности задачи:

- 1) функция  $\Phi(\tau_1, \dots, \tau_{NP})$  почти всюду имеет непрерывные производные любого порядка (доказывается аналогично предыдущему пункту). Однако получить частные производные  $\Phi(\tau_1, \dots, \tau_{NP})$  в аналитическом виде не представляется возможным;
- 2) вычисление  $\Phi(\tau_1, \dots, \tau_{NP})$  для каждого набора  $\tau_1, \dots, \tau_{NP}$  — ресурсоемкая операция. Если предположить, что число потенциально ненулевых  $f_{ij}$  для каждой добывающей скважины будет порядка 10, а коэффициент продуктивности и интенсивность акьюфера заданы заранее, то число параметров в задаче квадратичного программирования будет порядка  $10NP$ , а сложность метода перебора граней —  $O(n^2)$  (согласно (9)).

Исходя из этого, следует признать, что перебор  $\tau_1, \dots, \tau_{NP}$ , даже с достаточно большим шагом, при практически значимых значениях  $NP$  будет невозможен в связи с необходимостью большого числа вычислений  $\Phi(\tau_1, \dots, \tau_{NP})$ . Из тех же соображений неэффективными будут и методы Монте-Карло, а также метод имитации отжига.

Как показали проведенные эксперименты, наилучшие по производительности результаты показал метод покоординатного спуска в следующем варианте:

- 1) задаем шаг  $\Delta\tau = 1$ ;
- 2) выбираем начальную точку  $(\tau_1, \dots, \tau_{NP})$ ;
- 3) вычисляем значение  $\Phi(\tau_1, \dots, \tau_{NP})$ ;
- 4) случайно выбираем одно из  $\tau_j$ . Вычисляем значение  $\Phi(\tau_1, \dots, \tau_{NP})$ , заменив  $\tau_j$  на  $\tau_j + \Delta\tau$ , и смотрим изменение знака:
  - если в направлении увеличения  $\tau_j$  функция уменьшается, то делаем шаги по  $10 \cdot \Delta\tau$ , пока она не начнет увеличиваться;
  - в другом случае делаем аналогичные шаги в противоположном направлении;
- 5) повторяем п. 4 до тех пор, пока не останется направлений ни по одной координате, при которых шаг в  $\Delta\tau$  приводит к уменьшению целевой функции;
- 6) задаем  $\Delta\tau = 0,1$  и повторяем с п. 4, после чего выходим из алгоритма.

По итогам алгоритма все  $\tau$  будут определены с точностью до 0,1, что является вполне приемлемой точностью. Вообще говоря, можно выполнить указанный алгоритм многократно с различными начальными точками  $(\tau_1, \dots, \tau_{NP})$ , но, как показали эксперименты, достаточно хорошими являются решения, полученные при выборе в качестве начальной точки «естественного» решения. Его же можно использовать в качестве регуляризатора целевой функции (по аналогии с (8)). Кроме того, еще одним доводом за использование «естественного» решения может служить то, что при его нахождении будут получены графики, подобные приведенным на рис. 1 и 2, которые помогают проанализировать задачу на предмет неоднозначности решения. Как показывает практика использования этого алгоритма, зачастую неоднозначность можно устранить за счет расширения интервала настройки, расширения диапазонов изменения параметра

тров  $\tau$ ,  $J$  и  $e$  либо добавления новых потенциальных связей между скважинами (увеличения радиуса влияния).

### Результаты экспериментов

В рамках эксперимента рассматривались три синтетические модели с одинаковым расположением скважин, но различным строением пласта (рис. 3).

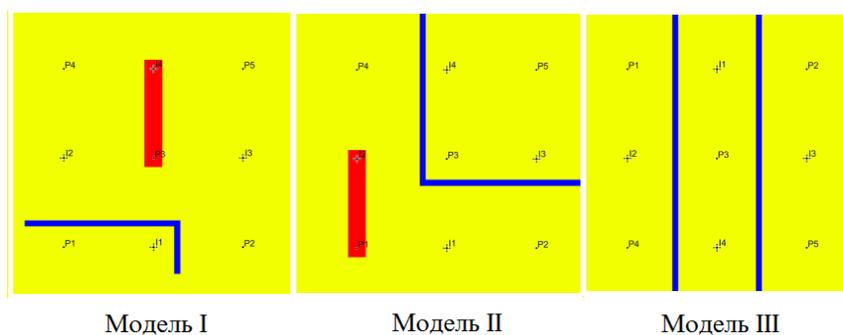


Рис. 3. Геологическое строение синтетических моделей в эксперименте

Fig. 3. Synthetic models geology in numeric experiment

На рис. 3 желтый цвет соответствует проницаемости 20 мД, синий — 0,02 мД, красный — 100 мД. Для каждой из этих моделей в гидродинамическом симуляторе было рассчитано 5 вариантов разработки на 36 месяцев. При этом исходные данные (приемистости, забойные давления) в первые 24 месяца в каждом варианте совпадали — этот период использовался для настройки CRM-моделей. В последующие 12 месяцев исходные данные были различны — они использовались для проведения ретроспективных тестов, т. е. оценки прогностических свойств настроенных CRM-моделей. Графики приемистостей для интервалов настройки и прогноза приведены на рис. 4-7.

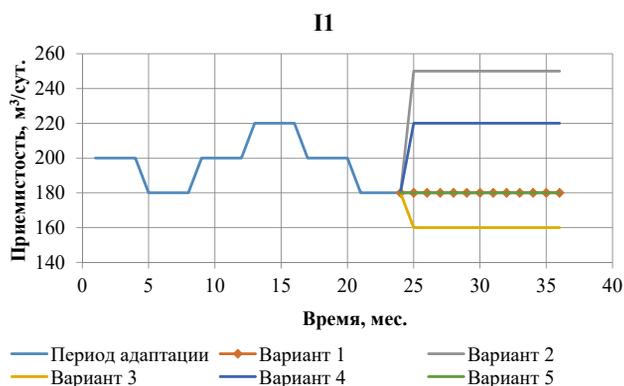


Рис. 4. Приемистость нагнетательной скважины II

Fig. 4. Water injection rates for injector II

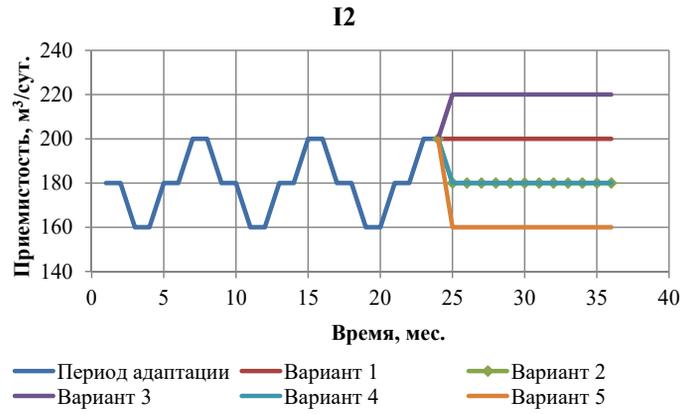


Рис. 5. Приемистость нагнетательной скважины I2

Fig. 5. Water injection rates for injector I2

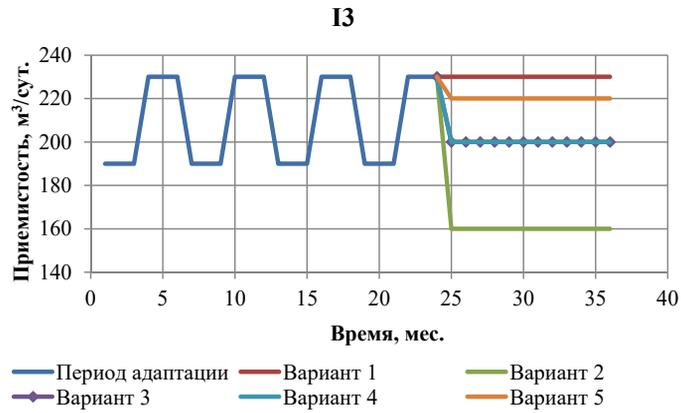


Рис. 6. Приемистость нагнетательной скважины I3

Fig. 6. Water injection rates for injector I3

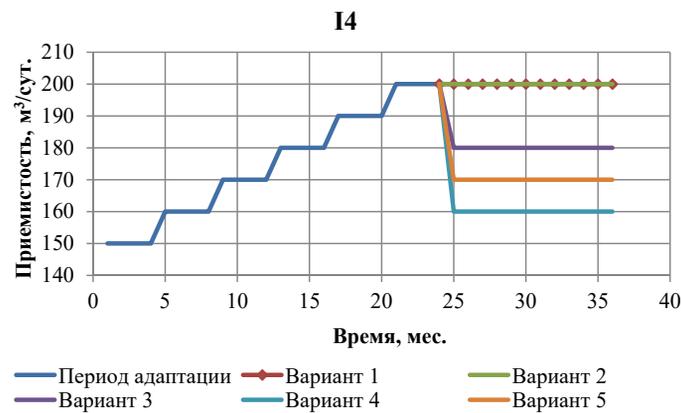


Рис. 7. Приемистость нагнетательной скважины I4

Fig. 7. Water injection rates for injector I4

Для каждой синтетической модели коэффициенты модели CRM определялись следующими методами (в скобках приведена аббревиатура для краткого обозначения метода в тексте):

- методом Монте-Карло. 100 случайных точек (MC100);
- методом Нелдера — Мида. 50 стартов со случайными начальными приближениями, 50 шагов при минимизации целевой функции (NM50/50);
- методом имитации отжига. Все неизвестные разыгрываются совместно. 1 старт, 100 шагов (SA100);
- методом имитации отжига. Неизвестные варьируются независимо. 20 стартов со случайными начальными приближениями, 100 шагов (MSA20/100);
- дифференциальной эволюцией, генетическим алгоритмом. Параметр мутации: 1,8 (DE50);
- авторским методом с использованием метода перебора граней (GQP).

Все методы, кроме последнего, носят вероятностный характер, поэтому для каждого из них выполнялось 30 запусков. Последний метод запускался для каждой синтетической модели однократно, т. к. является детерминированным. Параметры для всех методов, кроме последнего, выбраны исходя из опыта авторов: именно такие параметры, как правило, давали наилучшие решения по сочетанию «временные затраты/качество» для задач небольшой размерности (менее 10 добывающих скважин). Полученные решения оценивались по следующим параметрам:

- среднее время выполнения;
- максимальная невязка модельного дебита от фактического на интервале настройки по отдельной скважине согласно формуле:

$$D_j = \min_j \sum_{n=1}^T \frac{|\tilde{q}_j(t_n) - q_j(t_n)|}{\tilde{q}_j(t_n)}, \quad j = \overline{1, NP}. \quad (10)$$

В таблицах приведено среднее значение этого параметра по результатам 30 запусков ( $D_{j,avg}$ ) и минимальное из них ( $D_{j,min}$ );

- средняя невязка модельного дебита от фактического на интервале настройки по всем скважинам модели:

$$D_{all} = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{n=1}^T \frac{|\tilde{q}_j(t_n) - q_j(t_n)|}{\tilde{q}_j(t_n)}. \quad (11)$$

В таблицах приведено среднее значение этого параметра по результатам 30 запусков ( $D_{all,avg}$ ) и минимальное из них ( $D_{all,min}$ );

- погрешность прогноза по результатам ретроспективного теста:
  - а) максимальная невязка модельного дебита от фактического на интервале прогноза по отдельной скважине (по формуле (10)),
  - б) средняя невязка модельного дебита от фактического на интервале прогноза по всем скважинам модели (по формуле (11)).

Для каждого численного метода по результатам оптимизации (настройки CRM-модели) фиксировалось решение с минимальным значением максимального отклонения модельного дебита от фактического ( $D_{j,\min} = \min_j D_j$ ). Именно эти решения использовались в ретроспективном тестировании.

Результаты приведены в таблицах 1-6 (в таблицах 1, 3 и 5 зеленый цвет соответствует времени выполнения менее 2 с и невязкам менее 5%, желтый цвет — невязкам более 5%, но менее 15%; в таблицах 2, 4 и 6 серый цвет соответствует значениям средней невязки менее 3% и максимальной — менее 15%, синий цвет соответствует значениям средней невязки менее 2% и максимальной — менее 10%).

Таблица 1

**Время построения CRM-модели  
разными методами оптимизации  
и невязки по модели I**

Table 1

**Model I CRM calculation time  
for several optimizers  
and the correspondent residuals**

Методы	Время, с	$D_{all,avg}, \%$	$D_{j,avg}, \%$	$D_{all,min}, \%$	$D_{j,min}, \%$
MC100	1,8	21,6	44,2	10,6	15,9
NM50/50	24,6	11,1	22,0	5,0	9,3
SA100	0,3	11,1	19,1	6,7	11,2
MSA20/100	16,5	44,9	94,9	20,1	38,4
DE50	43,8	11,5	19,8	4,7	7,1
GQP	0,4	3,0	4,5	3,0	4,5

Таблица 2

**Качество прогноза по модели I**

Table 2

**Model I forecast quality**

Методы	Средняя невязка прогноза по всем скважинам, %					Макс. невязка прогноза по отдельной скважине, %				
	Варианты расчета					Варианты расчета				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
MC100	2,0	2,8	0,0	1,0	2,6	11,8	6,7	14,2	7,3	12,1
NM50/50	4,8	4,4	5,8	4,9	4,8	9,9	12,9	11,5	14,5	16,8
SA100	0,3	2,9	1,5	1,4	0,1	3,4	13,1	4,7	7,7	8,5
MSA20/100	2,7	1,7	2,7	1,8	1,9	31,1	35,1	31,3	25,9	27,5
DE50	0,2	3,4	3,3	1,6	1,9	8,7	10,6	20,9	8,8	5,1
GQP	0,0	0,2	0,4	0,4	0,9	5,1	3,6	9,5	8,1	6,8

Таблица 3

Время построения CRM-модели  
различными методами  
оптимизации и невязки по модели II

Методы	Время, с	$D_{all,avg}$ , %	$D_{j,avg}$ , %	$D_{all,min}$ , %	$D_{j,min}$ , %
MC100	1,8	31,3	76,5	13,7	14,9
NM50/50	21,3	19,7	42,0	9,2	13,2
SA100	0,3	17,4	31,5	6,3	8,7
MSA20/100	24,1	84,1	169,0	32,0	58,4
DE50	27,0	15,8	30,3	8,6	14,6
GQP	0,2	2,9	4,7	2,9	4,7

Table 3

Model II CRM calculation  
time for several optimizers  
and the correspondent residuals

Таблица 4

Качество прогноза по модели II

Методы	Невязка прогноза по модели, %					Макс. невязка прогноза по отдельной скважине, %				
	Варианты расчета					Варианты расчета				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
MC100	5,4	15,8	5,3	8,8	5,4	15,1	33,8	12,7	18,6	10,7
NM50/50	1,9	2,7	2,2	1,9	2,0	11,4	22,6	12,2	16,4	10,6
SA100	2,7	1,0	1,8	2,4	3,6	8,3	8,3	11,7	6,6	8,1
MSA20/100	14,8	16,1	13,8	15,9	15,7	50,1	49,0	49,6	49,1	49,8
DE50	6,2	5,6	6,5	6,7	6,1	11,8	15,3	13,3	14,3	13,1
GQP	1,1	1,2	1,8	2,0	2,2	3,1	9,2	8,7	10,5	5,4

Table 4

Model II forecast quality

Как видно из таблиц 1-6, авторский численный метод значительно превосходит остальные численные методы по производительности. Даже в тех случаях, когда время выполнения другими методами сопоставимо с GQP (например, SA100), следует учитывать, что это время выполнения одного расчета, а для получения решения приемлемого качества, как правило, приходится выполнять десятки попыток. Также заметно, что авторский алгоритм показывает устойчиво низкие значения невязок как на интервале настройки, так и на интервале прогноза, в то время как остальные методы показывают худшие результаты.

Таблица 5

Время построения CRM-модели  
различными методами оптимизации  
и невязки по модели III

Методы	Время, с	$D_{all,avg}, \%$	$D_{j,avg}, \%$	$D_{all,min}, \%$	$D_{j,min}, \%$
MC100	1,8	18,5	40,4	11,0	18,2
NM50/50	23,1	9,0	15,1	4,4	5,1
SA100	0,3	10,7	18,1	8,0	9,7
MSA20/100	22,3	39,2	73,2	19,2	26,2
DE50	41,0	10,9	19,7	6,3	9,6
GQP	0,3	4,5	6,1	4,5	6,1

Table 5

Model III CRM calculation time  
for several optimizers  
and the correspondent residuals

Таблица 6

Качество прогноза по модели III

Методы	Невязка прогноза по модели, %					Макс. невязка прогноза по отдельной скважине, %				
	Варианты расчета					Варианты расчета				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
MC100	5,4	6,7	5,2	4,6	4,8	16,0	20,6	15,2	19,7	15,1
NM50/50	1,1	1,7	0,9	1,3	1,3	9,0	11,4	12,0	7,7	4,0
SA100	3,6	2,3	3,0	4,2	4,1	7,8	17,6	11,7	13,3	6,0
MSA20/100	0,9	0,6	1,5	0,3	1,0	24,7	29,8	23,2	27,0	24,6
DE50	0,8	3,4	1,2	0,8	0,5	7,9	16,9	10,2	12,7	8,6
GQP	1,4	1,3	1,8	2,3	2,9	4,0	7,1	6,1	9,9	7,1

Table 6

Model III forecast quality

Далее на рис. 8 приведены коэффициенты взаимного влияния скважин для модели III, полученные по CRM-модели по авторскому методу оптимизации GQP и по гидродинамической модели (ГДМ). Коэффициенты по ГДМ посчитаны в коммерческом гидродинамическом симуляторе по линиям тока. Как видно из рис. 8, коэффициенты, полученные по модели CRM, не только качественно повторяют те, что получены по ГДМ, но и близки к ним по значениям. Влияния, отсутствующие в модели CRM, но присутствующие в ГДМ, соответствуют значениям менее 2% и не являются принципиальными.

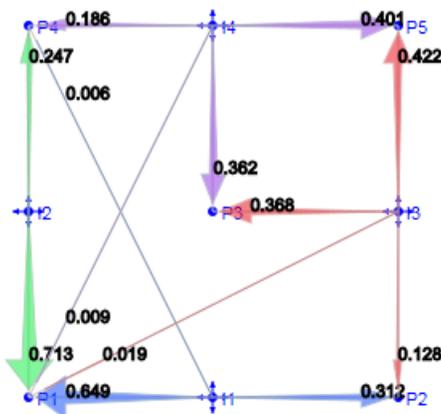


Рис. 8. Коэффициенты взаимного влияния скважин по линиям тока (слева) и по CRM-модели (справа)

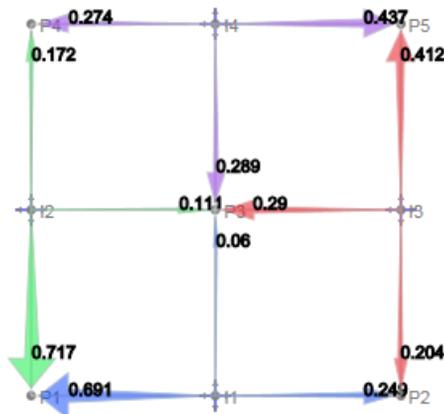


Fig. 8. Gains calculated by hydrodynamic simulation (left image) and by CRM (right image)

Как видно из приведенных таблиц и иллюстраций, предлагаемый авторами метод GQP выгодно отличается от других сочетанием таких качеств, как производительность, высокая степень соответствия исходным данным и результатам гидродинамического моделирования, хорошие прогностические качества. Кроме того, получаемые при решении графики (рис. 1 и 2) помогают исследователю проанализировать потенциальные неоднозначности решения.

### Заключение

Предложены оригинальные численные методы для определения коэффициентов CRM-моделей для задач с одной добывающей скважиной и со многими добывающими скважинами. Для задачи с одной добывающей скважиной указаны условия, при выполнении которых задача имеет единственное решение, и оно будет найдено предложенным алгоритмом. Для задачи со многими добывающими скважинами по результатам численных экспериментов продемонстрированы высокое качество получаемых решений и преимущество в производительности в сравнении с другими численными методами.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ручкин А. А. Исследование особенностей оценки взаимовлияния скважин на примере модели CRM / А. А. Ручкин, С. В. Степанов, А. В. Князев, А. В. Степанов, А. В. Корытов, И. Н. Авсянко // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Том 4. № 4. С. 148-168. DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-4-148-168
2. Степанов С. В. Проблематика оценки взаимовлияния добывающих и нагнетательных скважин на основе математического моделирования / С. В. Степанов, С. В. Соколов,

- А. А. Ручкин, А. В. Степанов, А. В. Князев, А. В. Корытов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Том 4. № 3. С. 146-164. DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-3-146-164
3. Artun E. Characterizing reservoir connectivity and forecasting waterflood performance using data-driven and reduced-physics models / E. Artun // SPE Western Regional Meeting (23-26 May 2016, Anchorage, Alaska, USA). SPE-180488-MS. DOI: 10.2118/180488-MS
  4. Fletcher R. A. General quadratic programming algorithm / R. A. Fletcher // IMA Journal of Applied Mathematics. 1971. Vol. 7. № 1. Pp. 76-91. DOI: 10.1093/imamat/7.1.76
  5. Holanda R. W. A state-of-the-art literature review on capacitance resistance models for reservoir characterization and performance forecasting / R.W. Holanda, E. Gildin, J. L. Jensen, L. W. Lake, C. S. Kabir // Energies. 2018. Vol. 11. № 12. Article 3368. DOI: 10.3390/en11123368
  6. Jamali A. Application of capacitance resistance models to determining interwell connectivity of large-scale mature oil fields / A. Jamali, A. Eftehadtavakkol // Petroleum Exploration and Development. 2017. Vol. 44. № 1. Pp. 132-138. DOI: 10.1016/S1876-3804(17)30017-4
  7. Valko P. P. Development and application of the multiwell productivity index (MPI) / P. P. Valko, L. E. Doublet, T. A. Blasingame // SPE Journal. 2000. Vol. 5. № 1. SPE-51793-PA. DOI: 10.2118/51793-PA
  8. Weber D. Improvements in capacitance-resistive modeling and optimization of large scale reservoirs / D. Weber, T. F. Edgar, L. W. Lake, L. S. Lasdon, S. Kawas, M. Sayarpour // SPE Western Regional Meeting (24-26 March 2009, San Jose, California). SPE-121299-MS. DOI: 10.2118/121299-MS
  9. Yousef A. A. A Capacitance model to infer interwell connectivity from production and injection rate fluctuations / A. A. Yousef, P. H. Gentil, J. L. Jensen, L. W. Lake // SPE Annual Technical Conference and Exhibition (9-12 October 2005, Dallas, Texas). SPE-95322-MS. DOI: 10.2118/95322-MS

**Alexander D. BEKMAN<sup>1</sup>**  
**Sergey V. STEPANOV<sup>2</sup>**  
**Alexander A. RUCHKIN<sup>3</sup>**  
**Dmitry V. ZELENIN<sup>4</sup>**

UDC 622.276

### A NEW ALGORITHM FOR FINDING CRM-MODEL COEFFICIENTS

<sup>1</sup> Cand. Sci. (Math), Senior Manager,  
Tyumen Petroleum Research Center  
adbekman@tnc.rosneft.ru; ORCID: 0000-0002-5907-523X

<sup>2</sup> Dr. Sci. (Tech.), Professor,  
Department of Applied and Technical Physics,  
University of Tyumen; Senior Expert,  
Tyumen Petroleum Research Center  
svstepanov@tnc.rosneft.ru

<sup>3</sup> Cand. Sci. (Tech.), Expert,  
Tyumen Petroleum Research Center  
aaruchkin@tnc.rosneft.ru

<sup>4</sup> Senior Expert,  
Tyumen Petroleum Research Center  
dvzelenin@tnc.rosneft.ru; ORCID: 0000-0002-5918-2377

#### Abstract

The quantitative evaluation of producer and injector well interference based on well operation data (profiles of flow rates/injectivities and bottomhole/reservoir pressures) with the help of CRM (Capacitance-Resistive Models) is an optimization problem with large set of variables and constraints. The analytical solution cannot be found because of the complex form of the objective function for this problem. Attempts to find the solution with stochastic algorithms take unacceptable time and the result may be far from the optimal solution. Besides, the use of universal (commercial) optimizers hides the details of step

---

**Citation:** Bekman A. D., Stepanov S. V., Ruchkin A. A., Zelenin D. V. 2019. "A new algorithm for finding CRM-model coefficients". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 5, no 3, pp. 164-185.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-164-185

---

by step solution from the user, for example — the ambiguity of the solution as the result of data inaccuracy.

The present article concerns two variants of CRM problem. The authors present a new algorithm of solving the problems with the help of “General Quadratic Programming Algorithm”. The main advantage of the new algorithm is the greater performance in comparison with the other known algorithms. Its other advantage is the possibility of an ambiguity analysis. This article studies the conditions which guarantee that the first variant of problem has a unique solution, which can be found with the presented algorithm. Another algorithm for finding the approximate solution for the second variant of the problem is also considered. The method of visualization of approximate solutions set is presented. The results of experiments comparing the new algorithm with some previously known are given.

### **Keywords**

Capacitance-Resistive Models, CRM, General Quadratic Programming Algorithm.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-164-185**

### **REFERENCES**

1. Ruchkin A. A., Stepanov S. V., Knyazev A. V., Stepanov A. V., Korytov A. V., Avsyanko I. N. 2018. “Applying CRM model to study well interference”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 4, no 4, pp. 148-168. DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-4-148-168 [In Russian]
2. Stepanov S. V., Sokolov S. V., Ruchkin A. A., Stepanov A. V., Knyazev A. V., Korytov A. V. 2018. “Considerations on mathematical modeling of producer-injector interference”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 4, no 3, pp. 146-164. DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-3-146-164 [In Russian]
3. Artun E. 2016. “Characterizing reservoir connectivity and forecasting waterflood performance using data-driven and reduced-physics models”. SPE Western Regional Meeting (23-26 May, Anchorage, Alaska, USA). SPE-180488-MS. DOI: 10.2118/180488-MS
4. Fletcher R. A. 1971. “A general quadratic programming algorithm”. IMA Journal of Applied Mathematics, vol. 7, no 1, pp. 76-91. DOI: 10.1093/imamat/7.1.76
5. Holanda R. W., Gildin E., Jensen J. L., Lake L. W., Kabir C. S. 2018. “A state-of-the-art literature review on capacitance resistance models for reservoir characterization and performance forecasting”. Energies, vol. 11, no 12, art. 3368. DOI: 10.3390/en11123368
6. Jamali A., Ettehadtavakkol A. 2017. “Application of capacitance resistance models to determining interwell connectivity of large-scale mature oil fields”. Petroleum Exploration and Development, vol. 44, no 1, pp. 132-138. DOI: 10.1016/S1876-3804(17)30017-4

7. Valko P. P., Doublet L. E., Blasingame T. A. 2000. "Development and application of the multiwell productivity Index (MPI)." SPE Journal, vol. 5, no 1. SPE-51793-PA. DOI: 10.2118/51793-PA
8. Weber D., Edgar T. F., Lake L. W., Lasdon L. S., Kawas S., Sayarpour M. 2009. "Improvements in capacitance-resistive modeling and optimization of large scale reservoirs". SPE Western Regional Meeting (24-26 March, San Jose, California). SPE-121299-MS. DOI: 10.2118/121299-MS
9. Yousef A. A., Gentil P. H., Jensen J. L., Lake L. W. 2005. "A capacitance model to infer interwell connectivity from production and injection rate fluctuations". SPE Annual Technical Conference and Exhibition (9-12 October, Dallas, Texas). SPE-95322-MS. DOI: 10.2118/95322-MS