МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Нина Николаевна БУТАКОВА[1]

УДК 532.591

ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ДИСПЕРСНОЙ ЖИДКОСТИ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ГЛУБИНЫ

[1] кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры фундаментальной математики и механики,
Тюменский государственный университет
n.n.butakova@utmn.ru

Аннотация

Целью работы является нахождение асимптотического решения краевой задачи о распространении волн по свободной поверхности дисперсной смеси неограниченной глубины. Многофазные среды, характеризующиеся наличием макроскопических (по сравнению с молекулярными масштабами) включений, встречаются в природе, широко распространены в технологических процессах. Дисперсные смеси, состоящие из двух фаз, являются самыми простыми из них. Математическое моделирование таких сред осложняется необходимостью учитывать эффекты межфазного взаимодействия, что значительно увеличивает число параметров, входящих в уравнения. Поэтому главную сложность при построении математической модели представляет получение замкнутой

Цитирование: Бутакова Н. Н. Волны на поверхности слоя дисперсной жидкости неограниченной глубины / Н. Н. Бутакова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2017. Том 3. № 4. С. 122-131.
DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-4-122-131

системы уравнений. В данной работе использована схема совместного деформирования фаз, предложенная Х. А. Рахматулиным (в качестве замыкающего условия использовано предположение о равенстве давлений в фазах). Рассмотрена нелинейная краевая задача о распространении поверхностных волн по слою двухфазной смеси бесконечной глубины; в качестве несущей фазы выбрана несжимаемая идеальная жидкость, дисперсная фаза — твердые недеформируемые частицы. Предполагается, что длина поверхностной волны много больше ее высоты. Найдено асимптотическое решение задачи в линейном приближении по малому амплитудному параметру в виде затухающих бегущих волн. Определены давление, скорости волнового движения дисперсной и несущей фазы, форма свободной поверхности. Показано, что возмущение концентрации второй фазы величина более высокого порядка малости по сравнению с волновыми возмущениями скоростей фаз и давлении. Получены дисперсионные соотношения для определения фазовой скорости и декремента затухания волны. Выполнены расчеты, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова

Гидродинамика, поверхностные волны, двухфазная смесь, асимптотическое решение, дисперсионные соотношения.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-4-122-131

Введение

Изучение волнового движения двухфазных смесей представляет как практический, так и теоретический интерес. Математическое моделирование многофазных, и в частности двухфазных сред, требует учета эффектов межфазного взаимодействия, что приводит к увеличению параметров, входящих в уравнения, а значит и к необходимости введения дополнительных условий для получения замкнутой системы уравнений. В качестве примера первых работ, посвященных этому вопросу, можно привести [4, 7, 8, 9]. Так замкнутая модель движения многофазной смеси впервые была получена в работе [9]; в качестве замыкающего условия использовалось предположение о равенстве давлений в несущей и дисперсной фазах

Данная работа посвящена нахождению асимптотического решения краевой задачи о распространении волн по свободной поверхности слоя дисперсной смеси неограниченной глубины и исследованию влияния примесей на параметры волны.

Математическая модель

Рассматривается слой двухфазной жидкости, несущая фаза – идеальная несжимаемая жидкость, дисперсная фаза – твердые частицы одного размера, плотность которых больше плотности несущей среды. Теплоперенос и массоперенос между фазами отсутствуют. Для моделирования силового взаимодействия и совместного деформирования фаз используется схема, предложенная в работе [9]. В этих предположениях, согласно [6], уравнения сохранения массы и импульса имеют вид

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\nabla(\rho_i\mathbf{v}_i)=0,\ \ \rho_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}=-\alpha_i\boldsymbol{\nabla}p+\rho_i\mathbf{g}+(-1)^i\alpha_1\alpha_2R(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2),$$
$$\alpha_1+\alpha_2=1,\ \ \rho_i=\rho_i^0\alpha_i,\ \ \rho_i^0=\mathrm{const},\ \ i=1{,}2. \qquad (1)$$

Здесь ρ_i — плотность, ρ_i^0 — истинная плотность, α_i — объемная концентрация, $\mathbf{v}_i$ — вектор скорости движения i-й фазы (индексы i = 1,2 относится к величинам, характеризующим несущую и дисперсную фазу соответственно), p — давление, $\mathbf{g}$ — вектор ускорения силы тяжести. Эмпирический коэффициент R характеризует силу вязкого трения Стокса, вызванную несовпадением скоростей фаз [6]. Свободная поверхность бесконечно глубокого слоя дисперсной жидкости граничит со средой пренебрежимо малой плотности, P_a — атмосферное давление.

На свободной поверхности $z = \xi(t, x, z)$ должны выполняться условия непрерывности потока массы и потока импульса, известные как кинематическое и динамическое условия соответственно [1, 2, 3]

$$\alpha_1 v_{1n}+\alpha_2 v_{2n}=V_n,\qquad p=P_a, \qquad (2)$$

где $\alpha_1 v_{1n}+\alpha_2 v_{2n}$ — нормальная проекция объемной скорости смеси, V_n— нормальная скорость свободной поверхности.

Краевая задача

Декартова система координат вводится так, что в отсутствие волнового движения свободная поверхность слоя совпадает с плоскостью z = 0, ось Oz направлена противоположно вектору ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$. По свободной поверхности слоя в положительном направлении оси Ox распространяется волна длиной λ. Предполагается, что длина волны много больше высоты волны и характерного размера твердых включений. Движение предполагается плоскопараллельным в плоскости (x, z). В этом случае система (1) – (2) принимает вид

$$\rho_i^0\left(\frac{\partial v_{ix}}{\partial t}+v_{ix}\frac{\partial v_{ix}}{\partial x}+v_{iz}\frac{\partial v_{ix}}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}+(-1)^i(\alpha_1\alpha_2/\alpha_i)R(v_{2x}-v_{1x})=0,$$

$$\rho_i^0\left(\frac{\partial v_{iz}}{\partial t}+v_{ix}\frac{\partial v_{iz}}{\partial x}+v_{iz}\frac{\partial v_{iz}}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial z}+\rho_i^0 g+$$
$$+(-1)^i(\alpha_1\alpha_2/\alpha_i)R(v_{2z}-v_{1z})=0,$$

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}+\frac{\partial(\alpha_i v_{ix})}{\partial x}+\frac{\partial(\alpha_i v_{iz})}{\partial z}=0,\ \ i=1{,}2,\ \ \alpha_1+\alpha_2=1,$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}-\alpha_1 v_{1z}-\alpha_2 v_{2z}+\frac{\partial\xi}{\partial x}(\alpha_1 v_{1x}+\alpha_2 v_{2x})=0,\qquad p=P_a,\qquad z=\xi(t,x).$$

Полученная система уравнений и граничных условий нелинейна, поэтому для ее решения требуется применение асимптотических методов [5]. Предполагая, что все волновые возмущения одного порядка малости, для постановки краевой задачи вводятся безразмерные переменные и волновые возмущения неизвестных величин при помощи замены

$$x = x^*/k,\ \ z = z^*/k,\ \ t = t^*/kc,\ \ \xi = \varepsilon\xi^*/k,\ \ v_{ix} = \varepsilon c V_{ix}\ (i = 1{,}2),$$

$$v_{1z} = \alpha_0(\rho_2^0 - \rho_1^0)g/R + \varepsilon c V_{1z},\ \ v_{2z} = (1-\alpha_0)(\rho_1^0 - \rho_2^0)g/R + \varepsilon c V_{2z},$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_0\gamma,\ \ \alpha_1 = 1 - \alpha_2,\ \ p = P_a - \rho^0 g z^*/k + \varepsilon\rho^0 c^2 P,$$

$$G = (\rho_2^0 - \rho_1^0)g/Rc,\ \ r = R/\rho^0 kc,\ \ \mu_i = \rho_i^0/\rho^0\ \ (i = 1{,}2).$$

Здесь * обозначены соответствующие безразмерные переменные; $\gamma(t^*, x^*, z^*)$, $P(t^*, x^*, z^*)$, $\mathbf{V}_i(t^*, x^*, z^*) = \{V_{ix}, V_{iz}\}$, $i = 1{,}2$ — волновые возмущения концентрации дисперсной фазы, давления и скоростей фаз соответственно; α_0 — концентрация дисперсной фазы в отсутствие волнового движения; c — фазовая скорость волны; ε — малый волновой параметр. В результате задача приводится к виду

$$-\alpha_0\frac{\partial\gamma}{\partial t^*} + (1-\alpha_0)\left(\frac{\partial V_{1x}}{\partial x^*} + \frac{\partial V_{1z}}{\partial z^*}\right) - \alpha_0^2 G\frac{\partial\gamma}{\partial z} - \varepsilon\alpha_0\left(\gamma\left(\frac{\partial V_{1x}}{\partial x^*} + \frac{\partial V_{1z}}{\partial z^*}\right) + V_{1x}\frac{\partial\gamma}{\partial x^*} + V_{1z}\frac{\partial\gamma}{\partial z^*}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t^*} + \frac{\partial V_{2x}}{\partial x^*} + \frac{\partial V_{2z}}{\partial z^*} - (1-\alpha_0)G\frac{\partial\gamma}{\partial z^*} + \varepsilon\left(\gamma\left(\frac{\partial V_{2x}}{\partial x^*} + \frac{\partial V_{2z}}{\partial z^*}\right) + V_{2x}\frac{\partial\gamma}{\partial x^*} + V_{2z}\frac{\partial\gamma}{\partial z^*}\right) = 0,$$

$$\mu_1\frac{\partial V_{1x}}{\partial t^*} + \alpha_0\mu_1 G\frac{\partial V_{1x}}{\partial z^*} + \frac{\partial P}{\partial x^*} + \alpha_0 r(V_{1x} - V_{2x}) + \varepsilon\left(\mu_1\left(V_{1x}\frac{\partial V_{1x}}{\partial x^*} + V_{1z}\frac{\partial V_{1x}}{\partial z^*}\right) + \alpha_0 r\gamma(V_{1x} - V_{2x})\right) = 0,$$

$$\mu_1\frac{\partial V_{1z}}{\partial t^*} + \alpha_0\mu_1 G\frac{\partial V_{1z}}{\partial z^*} + \frac{\partial P}{\partial z^*} + \alpha_0 r(V_{1z} - V_{2z}) + \alpha_0 G r\gamma + \varepsilon\left(\mu_1\left(V_{1x}\frac{\partial V_{1z}}{\partial x^*} + V_{1z}\frac{\partial V_{1z}}{\partial z^*}\right) + \alpha_0 r\gamma(V_{1z} - V_{2z})\right) = 0,$$

$$\mu_2\frac{\partial V_{2x}}{\partial t^*} - (1-\alpha_0)\mu_2 G\frac{\partial V_{2x}}{\partial z^*} + \frac{\partial P}{\partial x^*} - (1-\alpha_0)r(V_{1x} - V_{2x}) + \varepsilon\left(\mu_2\left(V_{2x}\frac{\partial V_{2x}}{\partial x^*} + V_{2z}\frac{\partial V_{2x}}{\partial z^*}\right) + \alpha_0 r\gamma(V_{1x} - V_{2x})\right) = 0,$$

$$\mu_2\frac{\partial V_{2z}}{\partial t^*} - (1-\alpha_0)\mu_2 G\frac{\partial V_{2z}}{\partial z^*} + \frac{\partial P}{\partial z^*} - (1-\alpha_0)r(V_{1z} - V_{2z}) + \alpha_0 G r\gamma + \varepsilon\left(\mu_2\left(V_{2x}\frac{\partial V_{2z}}{\partial x^*} + V_{2z}\frac{\partial V_{2z}}{\partial z^*}\right) + \alpha_0 r\gamma(V_{1z} - V_{2z})\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t^*} - (1-\alpha_0)V_{1z} - \alpha_0 V_{2z} + \alpha_0 G\gamma + \varepsilon\Bigg(\Big((1-\alpha_0)V_{1x} + \alpha_0 V_{2x}\Big)\frac{\partial \xi}{\partial x^*} +$$

$$+\alpha_0\gamma(V_{1z} - V_{2z})\Big) + \varepsilon^2\alpha_0\gamma\frac{\partial \xi}{\partial x^*}(V_{2x} - V_{1x}) = 0, \qquad z^* = \varepsilon\xi^*(t^*, x^*, z^*),$$

$$P - \tfrac{g}{kc^2}\xi^* = 0,\ z^* = \varepsilon\xi^*(t^*, x^*, z^*). \tag{3}$$

В результате получена нелинейная краевая задача (3), позволяющая получить асимптотические разложения неизвестных скоростей волнового движения фаз, давления, возмущения концентрации и формы свободной поверхности.

Линейная задача

Предполагается, что высота волны мала по сравнению с длиной, в этом случае в (3) можно пренебречь слагаемыми порядка ε и рассматривать линейную задачу

$$-\alpha_0\frac{\partial \gamma}{\partial t^*} + (1-\alpha_0)\left(\frac{\partial V_{1x}}{\partial x^*} + \frac{\partial V_{1z}}{\partial z^*}\right) - \alpha_0^2 G\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t^*} + \frac{\partial V_{2x}}{\partial x^*} + \frac{\partial V_{2z}}{\partial z^*} - (1-\alpha_0)G\frac{\partial \gamma}{\partial z^*} = 0,$$

$$\mu_1\frac{\partial V_{1x}}{\partial t^*} + \alpha_0\mu_1 G\frac{\partial V_{1x}}{\partial z^*} + \frac{\partial P}{\partial x^*} + \alpha_0 r(V_{1x} - V_{2x}) = 0,$$

$$\mu_1\frac{\partial V_{1z}}{\partial t^*} + \alpha_0\mu_1 G\frac{\partial V_{1z}}{\partial z^*} + \frac{\partial P}{\partial z^*} + \alpha_0 r(V_{1z} - V_{2z}) + \alpha_0 Gr\gamma = 0,$$

$$\mu_2\frac{\partial V_{2x}}{\partial t^*} - (1-\alpha_0)\mu_2 G\frac{\partial V_{1x}}{\partial z^*} + \frac{\partial P}{\partial x^*} - (1-\alpha_0)r(V_{1x} - V_{2x}) = 0,$$

$$\mu_2\frac{\partial V_{2z}}{\partial t^*} - (1-\alpha_0)\mu_2 G\frac{\partial V_{2z}}{\partial z^*} + \frac{\partial P}{\partial z^*} - (1-\alpha_0)r(V_{1z} - V_{2z}) + \alpha_0 Gr\gamma = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t^*} - (1-\alpha_0)V_{1z} - \alpha_0 V_{2z} + \alpha_0 G\gamma = 0, \qquad z^* = 0,$$

$$P - \frac{g}{kc^2}\xi^* = 0, \qquad z^* = 0. \tag{4}$$

Необходимо, чтобы при равенстве истинных плотностей фаз, а также в отсутствие второй фазы решение задачи (4) переходило в известные [10]. Поэтому неизвестные величины определялись в виде затухающих бегущих волн вида

$$e^{-bt^*}(C_1(z^*)\sin(x^* - t^*) + C_2(z^*)\cos(x^* - t^*)),$$

где $b = \beta/kc$ — безразмерный декремент затухания волны (β — размерный декремент). С учетом требования затухания волнового движения на глубине, получено решение ($i = 1,2$)

$$P = e^{-bt^*}(M\cos(x^* - t^*) + N\sin(x^* - t^*))e^{z^*},$$

$$\gamma = 0,$$

$$V_{ix} = e^{-bt^*}\big((m_iM + n_iN)\cos(x^* - t^*) + (m_iN - n_iM)\sin(x^* - t^*)\big)e^{z^*},$$

$$V_{iz} = e^{-bt^*}\big((n_iM - m_iN)\cos(x^* - t^*) + (m_iM + n_iN)\sin(x^* - t^*)\big)e^{z^*},$$

$$\xi^* = e^{-bt^*}\big((s_1M + s_2N)\cos(x^* - t^*) + (s_1N - s_2M)\sin(x^* - t^*)\big),$$

$$m_1 = \frac{1}{\Delta}\Big((b^2 + 1)\mu_1\mu_2^2 + 2b\mu_1\mu_2(G\mu_2(1 - \alpha_0) - r) + G\mu_1\mu_2(r(3\alpha_0 - 2) + G\mu_2(1 - \alpha_0)^2) + r^2\Big),$$

$$m_2 = \frac{1}{\Delta}\Big((b^2 + 1)\mu_1^2\mu_2 - 2b\mu_1\mu_2(G\mu_1\alpha_0 + r) + G\mu_1\mu_2(r(3\alpha_0 - 1) + G\mu_1{\alpha_0}^2) + r^2\Big),$$

$$n_1 = \frac{1}{\Delta}\Big(b(b^2 + 1)\mu_1\mu_2^2 - b^2\mu_1\mu_2(G\mu_2(3\alpha_0 - 2) + r) - b^2r\mu_2 + bG\mu_1\mu_2(r(3\alpha_0 - 2) + G\mu_2(1 - \alpha_0)^2) + br^2 - \alpha_0\big(G\mu_1\mu_2 + r(\mu_2 - \mu_1)\big)\big(\mu_2 + 2bG\alpha{\mu_2}_0(1 - \alpha_0) - Gr(1 - \alpha_0) + G^2\mu_2(1 - \alpha_0)^2\big)\Big),$$

$$n_2 = \frac{1}{\Delta}\Big(b(b^2 + 1)\mu_1^2\mu_2 - \beta^2\mu_1\mu_2(G\mu_1(3\alpha_0 - 1) + r) - b^2r\mu_1 + bG\mu_1\mu_2(r(3\alpha_0 - 1) + G\mu_1{\alpha_0}^2) + br^2 + (1 - \alpha_0)\big(G\mu_1\mu_2 + r(\mu_2 - \mu_1)\big)(\mu_1 - 2bG\mu_1\alpha_0 + Gr\alpha_0 + G^2\mu_1{\alpha_0}^2)\Big),$$

$$s_1 = (1 - \alpha_0)(m_1 - bn_1) + \alpha_0(m_2 - bn_2)/(b^2 + 1),$$

$$s_2 = (1 - \alpha_0)(bm_1 + n_1) + \alpha_0(bm_2 + n_2)/(b^2 + 1),$$

$$\Delta = \Big((b^2 + 1)\mu_1\mu_2 - \alpha_0(1 - \alpha_0)G\big(G\mu_1\mu_2 + r(\mu_2 - \mu_1)\big) - b\big(r + G\mu_1\mu_2(2\alpha_0 - 1)\big)\Big)^2 + ((G\mu_1\mu_2 - r)^2 + 4\alpha_0Gr\mu_1\mu_2^2).$$

Возмущение концентрации дисперсной фазы $\gamma = 0$, то есть является величиной более высокого порядка малости по сравнению с возмущением давления и скоростями волнового движения фаз. Коэффициенты M и N определяются из дополнительных начальных условий. Из динамического условия получены дисперсионные соотношения для определения неизвестных декремента затухания β и фазовой скорости волны c

$$(b^2+1)kc^2 + gb\big((1-\alpha_0)n_1+\alpha_0 n_2\big) + g\big((1-\alpha_0)m_1+\alpha_0 m_2\big) = 0,$$

$$b\big((1-\alpha_0)m_1+\alpha_0 m_2\big) + \big((1-\alpha_0)n_1+\alpha_0 n_2\big) = 0,\ \ b = \beta/kc.$$

Для иллюстрации полученных результатов были выполнены расчеты параметров волнового движения при распространении по поверхности слоя смеси волны длиной $\lambda = 1$ м. Предполагается, что несущая фаза имеет плотность $\rho_1^0 = 1\,000$ кг/м^3 и динамическую вязкость $\eta = 1{,}004 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с), дисперсная фаза — недеформируемые сферические частицы радиуса $a = 10^{-3}$ м. На рисунке 1 представлена зависимость фазовой скорости волны c от концентрации дисперсной фазы α_0. При $\alpha_0 = 0$ фазовая скорость волны равна $c_0 = 1{,}2495$ м/с (фазовая скорость гравитационной волны для моносреды). С увеличением концентрации дисперсной фазы фазовая скорость падает.

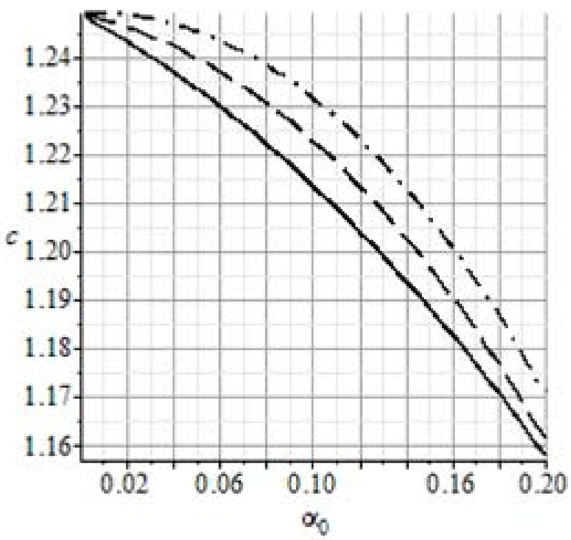

Рис. 1. Зависимость фазовой скорости волны c (м/с) от концентрации дисперсной фазы α_0:
——— $\rho_2^0 = 1\,700$ кг/м^3,
– – – – $\rho_2^0 = 2\,000$ кг/м^3,
– · – · – $\rho_2^0 = 2\,200$ кг/м^3

Fig. 1. Dependence of the phase velocity of the wave c (m/s) on the concentration of the dispersed phase α_0:
——— $\rho_2^0 = 1{,}700$ kg/m^3,
– – – – $\rho_2^0 = 2{,}000$ kg/m^3,
– · – · – $\rho_2^0 = 2{,}200$ kg/m^3

Заключение

На основе схемы совместного деформирования фаз Х.А. Рахматулина поставлена нелинейная краевая задача о распространении поверхностных волн по слою двухфазной смеси неограниченной глубины. В линейном приближении найдено решение задачи в виде затухающих бегущих волн, получены дисперсионные соотношения для определения фазовой скорости и декремента затухания волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алешков Ю. З. Нелинейные поверхностные волны на слое двухфазной среды / Ю. З. Алешков, В. А. Баринов, Н. Н. Бутакова // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. Математика. Механика. Астрономия. 2003. № 25. С. 64-75.
2. Баринов В. А. Распространение волн по свободной поверхности двухфазной смеси / В. А. Баринов, Н. Н. Бутакова // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 6. С. 94-102.
3. Баринов В. А. Исследование распространения волн по свободной поверхности двухфазной жидкой смеси / В. А. Баринов, Н. Н. Бутакова// Вестник Тюменского государственного университета. 2001. № 2. С. 182-190.
4. Иорданский С. В. О движении частиц жидкости, содержащей мелкие частицы / С. В. Иорданский, А. Г. Куликовский // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1977. № 4. С. 12-20.
5. Найфэ А. Х. Введение в методы возмущений / А. Х. Найфэ. М.: Мир, 1984. 536 с.
6. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1 / Р. И. Нигматулин. М.: Наука, 1987. 464 с.
7. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигматулин. М.: Наука, 1978. 336 с.
8. Рахматулин Х. А. Газовая и волновая динамика / Х. А. Рахматулин. М.: Издательство МГУ, 1983. 200 с.
9. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред / Х. А. Рахматулин // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 2. С. 184-195.
10. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости / Л. Н. Сретенский. М.: Наука, 1977. 816 с.

Nina N. BUTAKOVA[1]

WAVES ON THE FREE SURFACE OF A LAYER OF A TWO-PHASE MIXTURE OF UNLIMITED DEPTH

[1] Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor,
Department of Fundamental Mathematics and Mechanics,
University of Tyumen
n.n.butakova@utmn.ru

Abstract

This article considers the problem of the propagation of waves on the free surface of a two-phase mixture of infinite depth. The author finds the asymptotic solution of the problem in the linear approximation. Multiphase media characterized by the presence of macroscopic inclusions (in comparison with molecular scales) are present in nature, widely distributed in technological processes. Disperse mixtures consisting of two phases are the simplest of them. Mathematical modeling of such media is complicated by the need to take into account the effects of interfacial interaction; that significantly increases the number of parameters in the equations.

Therefore, the main difficulty in constructing a mathematical model is the creation of a closed system of equations. This paper uses the scheme of joint phase deformation proposed by H. A. Rakhmatullin (as a closing condition, the assumption of equal pressure in phases is used). The author considers a nonlinear boundary value problem of the propagation of surface waves along a layer of a two-phase mixture of infinite depth; as the carrier phase, an incompressible ideal liquid is chosen, the dispersed phase is solid non-deformable particles. The author assumes that the length of the surface wave is much greater than its height. The asymptotic solution of the problem in the linear approximation with respect to a small amplitude parameter in the form of damped traveling waves is found. The pressure, the velocity of the wave motion of the dispersed and carrier phase, and the shape of the free surface are determined. The paper shows that the perturbation of the concentration of the second phase is of a higher order of smallness in comparison with the wave perturbations of the phase and pressure velocities. Dispersion relations are obtained to determine the phase velocity and the damping decrement of the wave. Calculations are performed to illustrate the results obtained.

Citation: Butakova N. N. 2017. "Waves on the Free Surface of a Layer of a Two-Phase Mixture of Unlimited Depth". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 3, no 4, pp. 122-131.
DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-4-122-131

Keywords
Hydrodynamics, waves, two-phase mixture, asymptotic solution, dispersion relation.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-4-122-131

REFERENCES

1. Aleshkov Yu. Z, Barinov V. A., Butakova N. N. 2003. "Nelineynye poverkhnostnye volny na sloe dvukhfaznoy sredy" [Nonlinear Surface Waves on a Layer of a Two-Phase Medium]. Vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya, no 25, pp. 64-75.
2. Barinov V. A., Butakova N. N. 2003. "Rasprostranenie voln po svobodnoy poverkhnosti dvukhfaznoy smesi" [Wave Propagation on the Free Surface of a Two-Phase Mixture]. Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza, no 6, pp. 94-102.
3. Barinov V. A., Butakova N. N. 2001. "Issledovanie rasprostraneniya voln po svobodnoy poverkhnosti dvukhfaznoy zhidkoy smesi" [Study of Wave Propagation along the Free Surface of a Two-Phase Liquid Mixture]. Tyumen State University Herald, no 2, pp. 182-190.
4. Iordanskiy S. V., Kulikovskiy A. G. 1977. "O dvizhenii chastits zhidkosti, soderzhashchey melkie chastitsy" [On the Motion of Particles of a Liquid Containing Small Particles]. Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza, no 4, pp. 12-20.
5. Nayfe A. Kh. 1984. Vvedenie v metody vozmushcheniy [Introduction into Perturbation Techniques]. Moscow: Mir.
6. Nigmatulin R. I. 1987. Dinamika mnogofaznykh sred [Dynamics of Multiphase Media], vol. 1. Moscow: Nauka.
7. Nigmatulin R. I. 1978. Osnovy mekhaniki geterogennykh sred [Fundamentals of Mechanics of Heterogeneous Media]. Moscow: Nauka.
8. Rakhmatulin Kh. A. 1983. Gazovaya i volnovaya dinamika [Gas and Wave Dynamics]. Moscow: Izdatel'stvo MGU.
9. Rakhmatulin Kh. A. 1956. "Osnovy gazodinamiki vzaimopronikayushchikh dvizheniy szhimaemykh sred" [Fundamentals of Gas Dynamics of Interpenetrating Motions of Compressible Media]. Prikladnaya matematika i mekhanika, vol. 20, no 2, pp. 184-195.
10. Sretenskiy L. N. 1977. Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti [Theory of Wave Motions of a Fluid]. Moscow: Nauka.