

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Андрей Андреевич СИДОРОВ¹

УДК 550.8

УЧЕТ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НАРУШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ГЕОКАРТИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

¹ кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией математического моделирования, Научно-аналитический центр рационального недропользования им. В. И. Шпильмана (г. Тюмень) darth@crru.ru; ORCID: 0000-0002-8639-2644

Аннотация

Методы построения цифровых сеточных моделей геологических поверхностей на основе аппроксимации бикубическими B -сплайнами нашли широкое применение в решении задач математической геологии. Вариационно-сеточный метод геокартирования является гибким и мощным инструментом, позволяющим учесть при построении карт большой объем разнообразных исходных данных, а также ввести в задачу априорные сведения о пространственном распределении картируемого параметра. Вместе с тем гладкость базисных функций не позволяет напрямую использовать этот эффективный

Цитирование: Сидоров А. А. Учет дизъюнктивных нарушений в задачах геокартирования с использованием метода граничных интегральных уравнений / А. А. Сидоров // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Том 6. № 2 (22). С. 110-126.
DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-2-110-126

метод при картировании геологических поверхностей, осложненных дизъюнктивными нарушениями (разломами). Это обстоятельство делает актуальным вопрос адаптации вариационно-сеточного подхода к задачам учета разрывных нарушений для дальнейшего развития компьютерных методов исследования строения геологических объектов.

В статье рассматривается метод раздельного построения разломной и пликативной (гладкой) компонент структурной карты. Разломная компонента представляется в виде поля антиплоского сдвига упругой мембраны, описывающегося в стационарной двумерной постановке уравнением Лапласа. Сеть разломов моделируется узкими контурами, на границах которых задаются значения тектонических смещений. Для уравнения Лапласа формулируется краевая задача, решение которой происходит методом граничных интегральных уравнений, который позволяет рассчитывать поле смещений в произвольной точке картируемой области, а также наиболее точно аппроксимировать сложную геометрию разломов. Моделирование пликативной составляющей структурной поверхности происходит в рамках вариационно-сеточного подхода с корректировкой на поле тектонических смещений.

Подход сочетает в себе преимущества сплайн-аппроксимационного метода и строгость полуаналитического решения для разломной компоненты. Он не накладывает ограничений на конфигурацию разломов, а также позволяет более эффективно производить математические операции со структурными поверхностями, рассчитывать их дифференциальные и интегральные характеристики.

Ключевые слова

Геокартирование, дизъюнктивные нарушения, метод граничных интегральных уравнений, вариационно-сеточный метод, сплайн-аппроксимация.

DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-2-110-126

Введение

В настоящее время существует множество методов картирования геологических поверхностей, основанных на различных математических подходах. Надежность каждого из них существенным образом зависит от размера и детальности задачи, объема исходной информации, характера ее расположения в области картирования, степени согласованности данных, разнообразия их цифрового представления, наличия или отсутствия априорной информации об изучаемом объекте. Решение задачи геокартирования может быть осуществлено в рамках вариационно-сеточного подхода [1, 5]. Этот метод является удобным инструментом восстановления полей геологических параметров как с точки зрения расчетной эффективности, так и в плане широких возможностей использования разнородной исходной информации. Априорные знания о свойствах изучаемого поля формулируются в виде дифференциальных уравнений в частных производных, что позволяет учесть физические особенности пространственного распределения картируемого параметра. Использование в качестве базисных

функций бикубических B -сплайнов обуславливает систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с сильно разреженной матрицей ленточного вида и помогает строить сеточные модели с большим числом узлов.

Вместе с тем гладкость бикубического сплайна, обеспечивающая неразрывность функции, а также ее первых и вторых производных, является серьезным препятствием при описании поверхностей, осложненных дизъюнктивными нарушениями и высокоградиентными областями. В связи с этим актуальным становится вопрос адаптации сплайн-аппроксимационного подхода к моделированию разломной тектоники.

Методы исследования

При наличии разломной тектоники существует два принципиальных подхода к картированию. Первый — это отказ от сплайнов и решение задачи, например, с помощью метода кригинга с корректировкой расстояний между точками исходных данных с учетом наличия разломов либо с применением стохастических методов [11]. Второй путь заключается в использовании сплайнов иных видов (например, DM -сплайнов) [10], сплайнов на треугольном базисе или в модификации классического сплайнового подхода.

Определенная трудность картирования с учетом разрывных нарушений заключается в том, что тектонические структуры на моделируемой поверхности должны максимальным образом соответствовать геометрии разломов, которая может быть довольно сложной. В этом смысле использование сплайнов на треугольном базисе оказывается весьма эффективным методом, т. к. триангуляцию области картирования всегда можно произвести таким образом, чтобы линии или берега разломов совпадали с ребрами треугольников. Однако сложная конфигурация разломов — ветвление под малым углом, близкое расположение берегов — может порождать специфические длинные и узкие треугольники, что, в свою очередь, приводит к вырождению матрицы СЛАУ.

Построение карт с учетом разломов также возможно и с использованием классических бикубических сплайнов на регулярной сетке [4]. Аппроксимация разрыва может осуществляться либо кратным (2^n) сгущением расчетной сетки в приразломной зоне, либо через модификацию базисных функций, что аналогично раздельным решениям для подобластей, расположенных по разные стороны разлома. Достоинством этого подхода является возможность использования всех преимуществ вариационно-сеточного метода не только в пликативной, но и в приразломной области. К недостаткам в случае локального сгущения сетки картирования можно отнести увеличение времени расчетов, а также трудности, связанные с заданием управляющих параметров для каждой детализирующей итерации. При всей своей естественности подход, связанный с использованием модифицированных базисных функций и выделением пликативных подобластей, также имеет ряд недостатков. При увеличении числа разломов и усложнении их конфигурации возрастает число подобластей, затрудняется предварительный анализ данных. Кроме того, имеется ряд ограничений на

расположение концевых точек и точек ветвления разлома: они могут располагаться только на ребрах сетки, но не внутри ячеек.

Иной подход — это посмотреть на задачу картирования с учетом дизъюнктивных нарушений с точки зрения физического моделирования. Представим искомую структурную поверхность в виде суммы влияния двух комплексов факторов:

$$U(x, y) = U_f(x, y) + U_p(x, y), \quad (1)$$

где $U_f(x, y)$ — слагаемое, обусловленное сдвигом тектонических блоков; $U_p(x, y)$ — суммарное влияние иных тектонических, эрозионных, седиментационных процессов, которое можно описать дифференцируемой гладкой функцией. Если представить упрощенно, то $U_f(x, y)$ представляет собой поле смещений, порожденное движением тектонических блоков, а $U_p(x, y)$ — ненарушенную структурную поверхность.

Таким образом, задача картирования с учетом разломов разбивается на две части и сводится к расчету полей $U_f(x, y)$ и $U_p(x, y)$. Поскольку $U_p(x, y)$ является дифференцируемой гладкой функцией, она может быть восстановлена с помощью вариационно-сеточного метода картирования; для расчета поля $U_f(x, y)$ необходимо применять иные методы, учитывающие физические основы тектонических процессов.

Поле тектонических сдвигов упрощенно можно представить в виде тонкой упругой пластины, деформации которой описываются вектором смещения $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$. Его компоненты u_x, u_y, u_z характеризуют движение тектонических блоков вдоль соответствующих осей координат. Запишем уравнение движения упругого тела в векторной форме:

$$(\gamma + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} = 0, \quad (2)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа; γ, μ — коэффициенты Лямэ. Далее, оставаясь в рамках плоской задачи (где $(\partial u_z)/(\partial z) = 0$), исходя из предположения, что дизъюнктивная составляющая является порождением антиплоского сдвига тектонических блоков, принимаем: $u_x = 0, u_y = 0, u_z \equiv U_f$. В этом случае система уравнений (2) принимает вид уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Однородное уравнение (2) и его частный случай (3) вытекают из условия равновесия массовых сил и механических напряжений в деформируемом упругом теле. При этом нулевая правая часть означает, что плотность массовых сил внутри области моделирования Ω равна нулю, и их действие выражается через задание смещений на границах области.

Область моделирования

При решении задач в вариационно-сеточной постановке область моделирования всегда является прямоугольной. Распределение внутри нее тектонических на-

рушений разнообразно: разломы могут быть расположены либо более-менее равномерно, либо плотно сгруппированы в центральной части или с краю, линии нарушений могут пересекать область целиком, деля ее на отдельные блоки.

С точки зрения оптимизации расчетов при локальном и плотном расположении разломов нет необходимости искать решение задачи (3) далеко за пределами зоны их влияния. Таким образом, целесообразно ввести две разных области моделирования: Ω_p — область решения пликративной задачи, совпадающую с областью картирования, и Ω_f — область решения уравнения (3). В реализованном подходе Ω_p и Ω_f могут совпадать полностью либо частично.

В рамках двумерной задачи дизъюнктивные нарушения обычно представляются в виде множества точек, определяемого пересечением поверхности разлома и картируемого горизонта. Это множество точек в плане имеет вид контура, замкнутого на концах разлома, оно совпадает с границами приподнятого и опущенного блоков и составляет берега дизъюнктивного нарушения — условно левый и правый берега. Между берегами картируемая поверхность совпадает с поверхностью сместителя. Иногда разломы моделируются так называемыми центральными линиями, т. е. множеством точек, равноудаленных от берегов. Это является хорошим приближением для субвертикальных дизъюнктивных нарушений, а также в случаях, когда расстоянием между берегами в рассматриваемом масштабе можно пренебречь.

В предлагаемом методе искомое поле тектонических смещений является решением уравнения (3), а это значит, что оно по определению не может иметь ни экстремумов, ни разрывов внутри Ω_f . По этой причине разрывные нарушения рассматриваются в качестве элементов внутренней границы многосвязной области моделирования Ω_f , на которой задаются краевые условия для уравнения (3).

На рис. 1 приведено схематическое представление разломов различных конфигураций в виде замкнутых щелевидных контуров шириной d . Пунктиром обозначены центральные линии нарушений. Разлом представляет собой внутреннюю границу многосвязной области, внешний контур которой показан прямоугольным. Многосвязная область идентична односвязной области с бесконечно узким разрезом, как это отображено на рис. 1а. Стрелки характеризуют направление обхода границы области. Таким образом, область моделирования поля тектонического сдвига Ω_f представлена в виде набора замкнутых контуров; при этом ориентация внешнего контура выбрана в направлении движения часовой стрелки, ориентация контуров разломов — против. При сложном характере взаимного расположения разломов, например ветвлении, внутренняя граница представляется в виде объединения контуров отдельных нарушений (рис. 1б). В случае выхода дизъюнктивных нарушений за пределы области картирования (а это возможно в случае магистральных региональных разломов) многосвязная область Ω_f разбивается на несколько подобластей (рис. 1в) для каждой из которых ищется решение задачи (3).

Существует достаточное количество математических методов для решения уравнения (3), как численных, так и полуаналитических. В простейшем случае

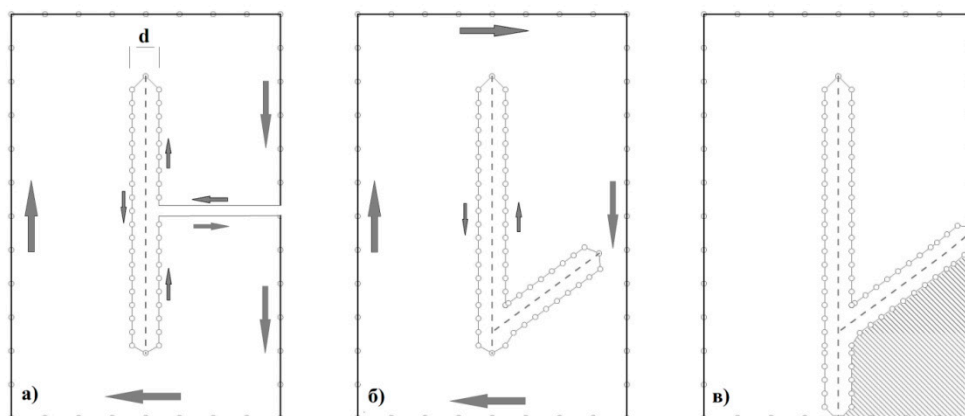


Рис. 1. Представление разломов как внутренней границы многосвязной области: а) многосвязная область в виде односвязной с бесконечно узким разрезом; б) ветвление разломов; в) выход разломов за пределы области моделирования

Fig. 1. Representation of faults as the internal contour of a multiply connected area: а) multiply connected region in the form of a simply connected with an infinitely narrow cut; б) branching faults; в) faults beyond the modeling domain

уравнение Лапласа может быть решено методом конечных разностей на регулярной прямоугольной сетке, при этом линии разломов аппроксимируются ребрами ячеек. Такое приближение геометрии может быть вполне оправдано, однако в случае сложной формы разломов и высокой плотности нарушений могут возникнуть естественные сложности, связанные с необходимостью сильного измельчения расчетной сетки. Кроме того, отдельные данные, например скважины, которые нельзя игнорировать, могут располагаться в непосредственной близости от разлома, и при подобной аппроксимации существует риск «перескока» точки из опущенного блока в приподнятый или наоборот.

Из сказанного следует, что при картировании очень важно сохранить исходную геометрию разломов. Подобное возможно при использовании адаптивных сеток [2] либо конечно-элементных методов решения подобных задач. В первом случае существенным ограничением является проблема вырожденных ячеек, которые неизбежно появятся в местах ветвления разломов под острым углом. Второй вариант подразумевает разбиение области на конечные, например треугольные, элементы с заданием для каждого из них условия равновесия объемных сил и механических напряжений. Однако при детализации задачи число конечных элементов возрастет квадратично с соответствующим увеличением вычислительных затрат.

Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) является полуаналитическим методом и имеет широкое применение, когда решаемое уравнение имеет фундаментальное решение [3]. В его основе лежит соотношение, вытекающее из формулы Грина, имеющее вид:

$$u_z(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial F}{\partial n} \cdot f d\Gamma - \frac{1}{2\pi} \oint F \cdot g d\Gamma, \quad (4)$$

где Γ — граница многосвязной области Ω_f ; F — фундаментальное решение уравнения Лапласа; f и g — значения смещений и нормальных производных поля смещений на границе Γ .

Т. е., зная граничные условия f и g , интегрированием по замкнутому контуру можно рассчитать поле смещения внутри области Ω_f . Поскольку, как правило, одновременно не известны значения смещений и производных, недостающие значения функций f и g также должны быть определены. Для этого устремим произвольную точку с координатами (x, y) к границе области. Сингулярные интегралы в (4) берутся в смысле главного значения Коши, и значение функции на границе выражается соотношением:

$$u_z(x, y) \equiv f = \frac{1}{\pi} \oint \frac{\partial F}{\partial n} \cdot f d\Gamma - \frac{1}{\pi} \oint F \cdot g d\Gamma. \quad (5)$$

Для кусочно-постоянных граничных условий выражение (5) записывается в дискретном виде:

$$f \cdot \left[\sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial F}{\partial n} d\Gamma - \pi \right] = g \cdot \sum_{i=1}^n \int_a^b F d\Gamma. \quad (6)$$

Суммирование происходит по всем сегментам границы числом n , а интеграл от фундаментального решения берется вдоль каждого из них. Выражение (6) записывается для каждого сегмента границы, на основе чего составляется система линейных уравнений, решение которой дает недостающие значения функций f, g . Матрица СЛАУ является полной с количеством строк и столбцов, равным числу элементов границы области Ω_f .

Метод ГИУ с точки зрения картирования разломной тектоники [7] имеет ряд преимуществ в сравнении с описанными выше подходами, например методом конечных разностей. Граница многосвязной области Ω_f аппроксимируется кусочно-ломанной кривой, а граничные условия задаются кусочно-постоянными функциями, что полностью соответствует представлению исходной геологической информации. Расчет смещений происходит в произвольной точке, т. е. результаты моделирования могут быть пересчитаны на любую сетку должной детальности.

Разломы рассматриваются как внутренняя граница многосвязного контура и представляют собой замкнутые полигоны; вертикальные нарушения аппроксимируются узкой щелью, ширина которой может быть существенно меньше шага сетки пликативной задачи. Ограничения, связанные со сложностью формы разлома, интенсивностью и характером ветвления трещин, их взаимным расположением, в данной постановке задачи практически отсутствуют.

Особенность метода заключается в том, что для нахождения значения смещения в заданной точке необходимо произвести процедуру интегрирования по

замкнутому контуру Γ , а в случае детальной границы это накладные по времени вычисления. Т. е. интерактивный расчет по формуле (4), например, при движении мыши, отображении данных или иных вычислениях с точки зрения быстрогодействия является малоэффективным. По этой причине для ускорения расчетов целесообразно произвести сеточную аппроксимацию поля смещений (более подробно об этом будет сказано ниже).

Идея моделирования структурных поверхностей, осложненных дизъюнктивными нарушениями, с использованием метода ГИУ была реализована в программе картирования Sigma и подробно изложена в [8]. Задача формулировалась таким образом, что неизвестные коэффициенты сплайна для пликативной составляющей, а также значения смещений и нормальных производных на разломах определялись в рамках единой вариационной постановки. Граничные условия f, g рассчитывались так, чтобы для пликативной составляющей обеспечивался принцип минимума кривизны (или другого подобного условия) и результирующая поверхность соответствовала исходным данным. Однако такая совместная постановка оказалась не очень эффективной с точки зрения быстрогодействия, и, кроме того, возникали определенные сложности в балансировке значений весовых коэффициентов на исходные данные и априорную информацию.

В данной работе предлагается подход раздельного расчета поля тектонических смещений и пликативной составляющей структурной поверхности. Поле U_f находится в рамках решения краевой задачи, граничные условия для которой определяются из исходных данных, расположенных вблизи разломов. Пликативная добавка моделируется вариационно-сеточным методом картирования с учетом U_f . Оба этих алгоритма реализованы в программном комплексе GST [9]. Расчет поля U_f сводится к последовательности нескольких шагов.

Подготовка области моделирования

Граница многосвязной области Ω_f состоит из внешнего контура, ограничивающего область влияния разломов, и набора внутренних контуров, описывающих сами дизъюнктивные нарушения. Разломы могут также пересекать внешний контур, разбивая его на несколько частей, но это не меняет принципиально постановку задачи.

Разломы, выгуженные из интерпретационных пакетов или иного программного обеспечения, представленные центральными линиями, средствами редактирования GST трансформируются в щелевидные контуры, ширина которых определяется детальностью решаемой задачи (рис. 1). В случаях ветвления разломов или образования ими замкнутых структур производится автоматическая процедура объединения нарушений в единую связанную сеть и выделения изолированных блоков.

Триангуляция

Решение методом ГИУ происходит в пределах векторизованной многосвязной области Ω_f , и результирующее поле смещений может быть рассчитано в произвольной точке. Но, как было отмечено выше, расчет одной точки подразумевает

интегрирование по контуру, обрамляющему Ω_f , и в конечном счете с увеличением детальности границы использование выражения (4) для вычислений «на лету» становится малоэффективным с точки зрения временных затрат. Для ускорения дальнейших расчетов поле U_f преобразуется в сеточную функцию на треугольном базисе.

Триангуляция области происходит таким образом, чтобы сегменты границы (внешнего контура и разломов) совпадали с ребрами треугольников. Поле смещений при нулевой правой части уравнения (3) не может иметь экстремумов внутри Ω_f — только на границе Γ . Степень изменчивости U_f максимальна вблизи границы и определяется граничными условиями, поэтому наибольшая детальность триангуляции должна быть именно там. При удалении от разломов или внешнего контура размер треугольников в целях получения оптимальной по числу ячеек сетки увеличивается.

Интерполяция U_f внутри треугольника происходит по линейному закону, поэтому вычислительные проблемы, связанные с вырожденными длинными и узкими треугольниками, не появляются. Тем не менее наличие таких треугольников способно ухудшить качество аппроксимации поля смещения. Поэтому в GST реализован богатый инструментарий, позволяющий при подготовке векторизованной границы для области Ω_f обеспечить корректные пропорции треугольников.

Задание граничных условий и расчет поля смещений

Поле U_f рассчитывается через решение краевой задачи, для чего необходимо задание соответствующих условий на всех сегментах многосвязной границы. Это может быть задача Дирихле, когда по всей границе Γ задаются значения смещений, но также и смешанная краевая задача, где для части границы задаются значения смещений, а для части — условие на нормальные производные. На практике чаще применяется задача Дирихле; условие $\partial U_f / \partial \vec{n} = 0$ для смешанной задачи означает ненагруженную, свободную границу и используется в случаях, о которых будет сказано ниже.

Значения смещений на берегах разлома определяется амплитудой дизъюнктивного нарушения, которая, в свою очередь, может быть получена из интерпретационных сейсмических пакетов или рассчитана на основе исходных данных в непосредственной близости от разлома. В конце концов, она может быть задана специалистом, исходя из его знаний о предмете моделирования. Амплитуда есть разность смещений в ближайших узлах, находящихся на разных берегах разлома. Знак смещения, т. е. что принимать за опущенный или приподнятый блок, зависит от выбора направления вертикальной оси.

Внешний контур, в отличие от разломов, не является границей, имеющей какой-либо геологический смысл. Он задается специалистом для ограничения области решения краевой задачи. Поэтому есть два варианта условий на внешнем контуре: нулевые смещения и «свободная граница»; также возможна комбинация этих вариантов. Нулевые смещения обязательно задаются на фрагмен-

тах границы области Ω_f , лежащих внутри прямоугольника картопостроения, т. к. это необходимо для гладкой состыковки пликативной и разломной задачи. Для фрагментов границы, лежащих вне или на гранях прямоугольника картирования, возможно условие нулевых нормальных производных. Последнее желательно в тех случаях, когда разлом выходит за пределы области картирования.

Стоит отметить, что амплитуды характеризуют смещение берегов разлома друг относительно друга, но не поле смещения U_f , которое может являться результатом действия нескольких разломов. Если некоторое дизъюнктивное нарушение находится в зоне влияния более крупного соседа, например в приподнятом блоке, тогда значения смещений на берегах разлома относительно нулевого внешнего контура будут складываться из амплитуды разлома и поля смещений, порождаемого соседом. Таким образом, U_f выражается в виде суперпозиции:

$$U_f(x, y) = \sum_{i=1}^M u_i(x, y), \quad (7)$$

где M — число односвязных контуров разломов; $u_i(x, y)$ — решение краевой задачи для i -го разлома и внешнего контура. Выражение (7) соответствует известному принципу аддитивности векторов скоростей и перемещений.

Разделение расчета поля смещений на M -краевых задач является важным аспектом, определяющим высокую вычислительную производительность обсуждаемого метода. При большом количестве разломов этот прием помогает обойти узкое место в методе ГИУ, связанное с размерностью полной матрицы СЛАУ, равной числу сегментов границы многосвязной области. Увеличение числа разломов приведет к линейному росту времени расчетов, но не к возникновению критической ситуации по объему используемой памяти.

Самый тонкий и неоднозначно решаемый вопрос — это определение относительных смещений берегов дизъюнктивного нарушения на всем его протяжении по исходным геологическим и геофизическим данным. Это автономная задача, и ее решение зависит от объема, плотности, качества и типа используемой при построении карты информации. В простейшем случае (при наличии данных в непосредственной близости от разлома) амплитуда в некоторой точке границы может быть приближенно принята как разность абсолютных отметок или времен. При наличии результатов интерпретации 2D-сейсморазведки амплитуда определяется через разность времен в окрестности пересечения разлома с соответствующим профилем, но разность времен между пикетами разных профилей не учитывается. Такой подход помогает избежать влияния на результат сейсмических невязок в крестах профилей. Вообще, задача восстановления граничных условий на разломах требует дальнейшего совершенствования, в первую очередь в направлении возможности учета нерегулярных точечных данных, таких как скважины и оцифрованные изолинии.

Еще одна тонкость заключается в расчете смещений в узлах, расположенных внутри контуров разломов, т. е. на сместителе. Формально эти узлы располага-

ются вне многосвязной области Ω_f , и смещения, рассчитанные по формуле (4), будут равны нулю. В случае субвертикальных разломов, когда расстояние между берегами трещины мало, это обстоятельство не вызывает проблем, т. к. узлы триангуляции располагаются только на границах контура, но не внутри него, а поле смещения интерполируется линейно между граничными значениями. Однако для наклонных разломов, когда ширина сместителя в плане уже не мала, вполне характерна ситуация, в которой расчетные узлы попадают внутрь контуров, и для них также необходимо определить значение смещения.

Эта задача решается на основе предположения, что поле U_f в области сместителя также является решением уравнения (3). При этом значения смещений на границе Γ , естественно, должны совпадать. Интегральное соотношение (4) записывается для многосвязной области $\bar{\Omega}_f$, такой, что $\Omega_f \cap \bar{\Omega}_f = \emptyset$. Краевая задача формулируется в виде задачи Дирихле, для которой значения смещений на границе берутся из решения для области Ω_f .

Пликативная составляющая искомой структурной поверхности $U_p(x, y)$, описывающая деформационные и седиментационные факторы неразрывного характера, восстанавливается решением стандартной задачи картирования с использованием всех возможностей, предоставляемых вариационно-сеточным методом [5]. Вариационная задача сводится к минимизации функционала, который схематически записывается в виде:

$$F = \rho \|LU_p - (z - LU_f)\|^2 + \sigma S + \beta \|AU_p - BG\|^2. \quad (8)$$

Слагаемое при весовом коэффициенте ρ отвечает за соответствие картируемой пликативной составляющей U_p измерениям искомого поля U в точках наблюдения, например в скважинах. Замеры для картируемой структурной поверхности, обозначаемые переменной z , вводятся в задачу через оператор L :

$$L = a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_5 \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (9)$$

Коэффициенты a_i линейного дифференциального оператора L определяют физический смысл измерений картируемого поля. Это могут быть значения глубин, градиентов, кривизны, а также их произвольная линейная комбинация.

Поле смещений U_f входит в задачу картирования в качестве поправки к данным измерений.

Оператор S при весовом коэффициенте σ , называемый стабилизирующим, определяет поведение картируемой поверхности вне точек наблюдения согласно принципу минимума кривизны или минимума поверхности. Слагаемое при весовом коэффициенте β позволяет ввести в задачу более сложную модель априорных знаний о пространственном распределении картируемого поля. Параметр G представляет собой косвенную информацию, например другие геологические поверхности, связанные с картируемым полем U_p через линейные дифференциальные операторы A, B , также имеющие вид (9).

Результаты

В задачах картирования, когда поле геологического параметра восстанавливается в значительной мере на основе косвенных данных и экспертных оценок, важнейшую роль играет соответствие результатов построений физической природе моделируемых геологических процессов. В этом смысле решение краевой задачи для антиплоского сдвига упругой пластины является хорошим, хотя и упрощенным приближением описания разломной тектоники. Граничные условия естественным образом определяются из исходных данных, а метод граничных интегральных уравнений позволяет наиболее точно аппроксимировать геометрию разломов и не накладывает ограничений на конфигурацию нарушений.

Факторы, воздействие которых на структурную поверхность можно описать дифференцируемыми функциями, учитываются в рамках вариационно-сеточной постановки. Здесь остаются доступными все преимущества этого метода геокартирования в использовании разнородной исходной информации и априорных знаний о пространственном распределении моделируемого параметра. Для больших сеток, когда матрица СЛАУ становится критичной по размеру, остается доступным вариант разбиения области на несколько подобластей и решения задачи картирования для каждой из них с условием «сшивки» на примыкающих границах.

В техническом плане структурная карта представляет собой совокупность регулярной сетки коэффициентов сплайнов для пликативной составляющей и сетки на треугольниках для дизъюнктивной (рис. 2). В произвольной точке значение результирующей функции, а также ее производные рассчитываются как сумма интерполированных значений по этим двум сеткам. В итоге обеспечивается полная совместимость с конфигурацией разломов: если точка геометрически находится, например, в приподнятом блоке, то она не «провалится», как это может случиться, если производить интерполяцию по сгущенной регулярной сетке.

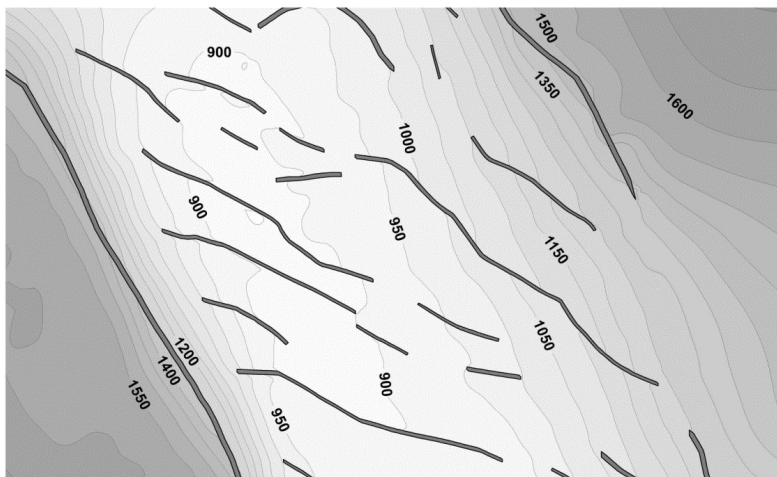


Рис. 2. Структурная карта с учетом дизъюнктивных нарушений

Fig. 2. Structural map with faults

Раздельный расчет и хранение пликативной и разломной составляющей позволяют строго производить с гридами, содержащими разломы, математические операции. Это важно, например, при расчете карты толщин между двумя структурными поверхностями, осложненными не совпадающими друг с другом системами разломов. При вычитании или сложении пликативных гридов можно произвести предварительный пересчет на единую, как правило, более детальную сетку. Однако пересчет на регулярную сетку разломной составляющей приведет к неточностям интерполяции в ячейках, примыкающих к разломам. Эти отклонения могут спровоцировать появление на итоговой карте различных «артефактов», а также повлиять на точность расчета интегральных характеристик, например объема пород. Поэтому алгебраические операции, в первую очередь сложение и вычитание, производятся раздельно между пликативными и дизъюнктивными составляющими. При этом фактического суммирования или вычитания треугольных сеток не происходит: в результирующий грид переносятся обе системы треугольников. Значение толщины в произвольной точке определяется по схеме:

$$H(x, y) = h_{1-2} + [U_{f1} + (-U_{f2})], \quad (10)$$

где h_{1-2} — разность пликативных составляющих гридов кровли и подошвы интервала; U_{f1}, U_{f2} — разломные составляющие. При этом системы треугольников для U_{f1}, U_{f2} могут быть совершенно различны, а произвольной точке внутри области моделирования может соответствовать более одного треугольника.

Интеграл по произвольному полигону представляется в виде суммы интегралов, посчитанных отдельно для пликативной и дизъюнктивной составляющих высокоточными полуаналитическими методами. Эффективная процедура интегрирования позволяет с высокой надежностью рассчитывать объемы горных пород, что является основой оперативного подсчета запасов.

Безусловно, описанный выше подход требует некоторого усложнения программного представления гридов, а также дополнительных затрат по памяти, но принципиальная возможность производить точные алгебраические действия, а также операции дифференцирования и интегрирования является преимуществом, перекрывающим этот небольшой недостаток.

Заключение

Раздельное представление и расчет пликативной и дизъюнктивной составляющих моделируемой структурной поверхности позволяет решать задачу картирования в рамках вариационно-сеточной сплайновой постановки с применением всех возможностей данного подхода в плане использования разнородных исходных данных и априорной информации. При этом дизъюнктивная составляющая, будучи результатом решения соответствующей краевой задачи, в целом характеризует антиплоский сдвиг тектонических блоков. Применение метода граничных интегральных уравнений позволяет понизить размерность задачи и рассчитывать поле смещений для конфигурации разломов практически любой сложности. Пе-

решение задачи расчета поля смещений на нерегулярную треугольную сетку дает возможность ускорить расчет смещений в заданной точке и, кроме того, наиболее оптимально аппроксимировать поле смещений в области, осложненной разрывными нарушениями разной степени детальности. Выделение расчета дизъюнктивной составляющей в отдельную задачу и самостоятельный элемент технологической цепочки дает возможность согласованного построения нескольких структурных поверхностей, характеризующихся единой системой разломов.

Конечное цифровое представление структурной поверхности в виде суперпозиции двух сеток улучшает детальность построений, а также существенно повышает точность расчета дифференциальных и интегральных характеристик карты.

Определение смещений на берегах разломов выносится в отдельную задачу, которая может быть решена автоматически на основе анализа исходных данных, либо решение по амплитудам разломов принимает специалист, исходя из геологических знаний. Разработка оптимального метода автоматического определения амплитуд разломов остается перспективным направлением для дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков А. М. Геологическое картирование нефтегазоносных территорий с помощью ЭВМ / А. М. Волков. М.: Недра, 1988. 221 с.
2. Лапковский В. В. Построение сеточных моделей сложноразрывных осадочных толщ / В. В. Лапковский // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. 2014. № 1. С. 22-26.
3. Линьков А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А. М. Линьков. М.: Наука, 1999. 372 с.
4. Плавник А. Г. К задаче учета дизъюнктивных нарушений в рамках в ариационно-сеточного метода геокартирования / А. Г. Плавник // Нефть и газ: опыт и инновации. 2017. Том 1. № 1. С. 3-8.
5. Плавник А. Г. К оценке достоверности картирования свойств геологических объектов в рамках сплайн-аппроксимационного подхода / А. Г. Плавник, А. Н. Сидоров // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Том XV. № 1. С. 66-76.
6. Райс Дж. Механика очага землетрясений / Дж. Райс. М.: Мир, 1982. 210 с.
7. Сидоров А. А. Компьютерная модель упруго-хрупкого разрушения горных пород / А. А. Сидоров // Геология и геофизика. 2000. Том 41. № 12. С. 1798-1803.
8. Сидоров А. Н. Моделирование структурных поверхностей, осложненных дизъюнктивными нарушениями, методом граничных интегральных уравнений / А. Н. Сидоров, С. В. Торопов // Строение земной коры Западной Сибири. Тюмень: Труды ЗапСибНИГНИ, 1989. С. 90-96.
9. Сидоров А. Н. Свидетельство о регистрации программы GST № 2005612939 / А. Н. Сидоров, А. Г. Плавник, А. А. Сидоров и др. М.: Роспатент, Реестр программ для ЭВМ, 2005.

10. Gout C. Approximation of surfaces with fault(s) and/or rapidly varying data, using a segmentation process, D^m -splines and the finite element method / C. Gout, C. Le Guyader, L. Romani, A.-G. Saint-Guirons // Numerical Algorithms. 2008. Vol. 48. No. 1. Pp. 67-92. DOI: 10.1007/s11075-008-9177-8
11. Holden L. Stochastic structural modeling / L. Holden, P. Mostad, B. F. Nielsen et al. // Mathematical Geology. 2003. Vol. 35. Pp. 899-914. DOI: 10.1023/B:MATG.0000011584.51162.69

Andrei A. SIDOROV¹

UDC 550.8

**USING THE METHOD OF BOUNDARY INTEGRAL
EQUATIONS IN SOLVING OF THE GEOLOGICAL
MAPPING PROBLEMS WITH FAULTS**

¹ Cand. Sci. (Phys.-Math.), Chief of Laboratory of the Mathematical Modeling,
V. I. Shpilman Research and Analytical Center for Rational Use of the Subsoil (Tyumen)
darth@cr.ru; ORCID: 0000-0002-8639-2644

Abstract

Methods for creating digital grid models of geological surfaces based on approximation by bicubic *B*-splines are widely used in solving problems of mathematical geology. The variational-gridding method of geological mapping is a flexible and powerful tool that allows to use a large amount of source data for mapping, as well as a priori information about the spatial distribution of the mapped parameter. The smoothness of the basis functions does not allow the direct use of this effective method for mapping geological surfaces complicated by faults. This fact requires adaptation of the variational-gridding method to mapping with faults.

The article discusses the technology of separate construction of the fault and plicative (smooth) components of the structural map. The fault component is represented in the form of an antiplane shear field of an elastic membrane described in a stationary two-dimensional Laplace equation. The fault network is modeled by narrow contours, at the boundaries of which the values of tectonic displacements are set. The Laplace equation is solved by the method of boundary integral equations, which allows one to calculate the displacement field at an arbitrary point of the mapped region, as well as to most accurately approximate the complex geometry of faults. Modeling of the plicative component of the structural surface takes place on the basis of a variational-gridding approach with adjustment of tectonic displacements.

The approach combines the advantages of the spline approximation method and the accuracy of the semi-analytical solution for the fault component. It does not impose restrictions on the

Citation: Sidorov A. A. 2020. "Using the method of boundary integral equations in solving of the geological mapping problems with faults". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 6, no. 2 (22), pp. 110-126.
DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-2-110-126

geometry of faults, and also allows for more efficient mathematical operations with structural surfaces, and their differential and integral characteristics.

Keywords

Geological mapping, disjunctive disorders, the method of boundary integral equations, variational-gridding method, spline approximation.

DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-2-110-126

REFERENCES

1. Volkov A. M. 1988. Geologicheskoe kartirovanie neftegazonosnykh territoriy s pomoshch'yu EVM. Moscow: Nedra, 221 pp. [In Russian]
2. Lapkovckiy V. V. 2014. "Postroenie setochnykh modeley slozhnodislotsirovannykh osadochnykh tolshch". Geologiya, geofizika i razrabotka neftyanykh i gazovykh mestorozhdeniy, no. 1, pp. 22-26. [In Russian]
3. Linkov A. M. 1999. The Complex Method of Boundary Integral Equations of Elasticity Theory. Moscow: Nauka, 372 pp. [In Russian]
4. Plavnik A. G. 2017. "To the problem of accounting for disjunctive disturbances in the framework of the variational-grid method of geo-mapping". Neft i gaz: opyt i innovatsii, vol. 1, no. 1, pp. 3-8. [In Russian]
5. Plavnik A. G., Sidorov A. N. 2012. "On the assessment of the reliability of mapping the properties of geological objects in the framework of the spline approximation approach". Sibirskiy zhurnal industrialnoy matematiki, vol. 15, no. 1, pp. 66-76. [In Russian]
6. Rays D. 1982. Earthquake Focal Mechanics. Moscow: Mir, 210 pp. [In Russian]
7. Sidorov A. A. 2000. "Computer model of elastic-brittle fracture of rocks". Geologiya i geofizika, vol. 12, no. 41, pp. 1798-1803. [In Russian]
8. Sidorov A. N., Toropov S. V. 1989. "Modeling of structural surfaces complicated by disjunctive disturbances by the method of boundary integral equations". Stroenie zemnoy kory Zapadnoy Sibiri. Tyumen: Trudy ZapSibNIGNI, pp. 90-96. [In Russian]
9. Sidorov A. N., Plavnik A. G., Sidorov A. A. et al. 2005. GST Program Registration Certificate No. 2005612939. Moscow: Rospatent, Reestr programm dlya EVM. [In Russian]
10. Gout C., Le Guyader C., Romani L., Saint-Guirons A.-G. 2008. "Approximation of surfaces with fault(s) and/or rapidly varying data, using a segmentation process, D^m -splines and the finite element method". Numerical Algorithms, vol. 48, no. 1, pp. 67-92. DOI: 10.1007/s11075-008-9177-8
11. Holden L., Mostad P., Nielsen B. F. et al. 2003. "Stochastic structural modeling". Mathematical Geology, vol. 35, pp. 899-914. DOI: 10.1023/B:MATG.0000011584.51162.69