

Моделирование нестационарного давления газа в трубопроводе с путевым отбором и подкачкой

Илья Федорович Чупров, Александр Анатольевич Лютоев[✉],
Мария Семеновна Пармузина

Ухтинский государственный технический университет, Ухта, Россия
Контакт для переписки: allyutoev@yandex.ru[✉]

Аннотация. В работе, на основе фундаментальных исследований И. А. Чарного по неустановившемуся движению реальной жидкости в трубах, составлено уравнение, описывающее динамику давления на сложном участке газопровода. Использование импульсной функции Дирака позволило описать одним уравнением динамику нестационарного давления в случае точечного отбора или подкачки в заданных точках. Линеаризация модели путем усреднения скорости движения газа позволила привести уравнение к гиперболическому виду. Если пренебречь силами инерции по сравнению с силами сопротивления, то математическая модель будет представлять уравнение в частных производных параболического типа второго порядка. Динамика давления в конкретных точках отбора и подкачки при граничных условиях второго рода (заданы расходы) получена с помощью конечного косинус-преобразования Фурье.

Рабочая формула, позволяющая определить давление в любой точке в заданный момент времени, представляет собой тригонометрические ряды. Ряды быстро сходящиеся, поэтому трудности работы с ними нет. Рассмотрены частные случаи (без отбора и подкачки). Осуществлена проверка выполнения краевых условий. Легко перестроить рабочую формулу на отбор и/или подкачку в нескольких точках заданного участка.

Произведены расчеты массового расхода и средней скорости. На практике обычно задается давление в начальной и конечной точках исследуемого участка. При этом появляется возможность перейти к расходам (к производным) на концах рассматриваемого участка.

Ключевые слова: трубопровод, нестационарные процессы, отбор, подкачка, косинус-преобразование Фурье, функция Дирака, массовый расход

Цитирование: Чупров И. Ф., Лютоев А. А., Пармузина М. С. 2023. Моделирование нестационарного давления газа в трубопроводе с путевым отбором и подкачкой // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 2 (34). С. 93–107. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-2-93-107>

Поступила 29.04.2023; одобрена 21.06.2023; принята 30.06.2023

The simulation of non-stationary gas pressure in a pipeline with pumping and injection

Ilya F. Chuprov, Alexander A. Lyutoev✉, Maria S. Parmuzina

Ukhta State Technical University, Ukhta, Russia

Corresponding author: allyutoev@yandex.ru✉

Abstract. In this work, based on the fundamental research of I. A. Charny on the unsteady movement of a real fluid in pipes, an equation that describes the pressure dynamics in a complex section of a gas pipeline was compiled. The use of the Dirac impulse function made it possible to describe the dynamics of unsteady pressure in a single equation in the case of point pumping and injection at given points. Linearization of the model by averaging the velocity of the gas made it possible to bring the equation to a hyperbolic form. If we neglect the forces of inertia compared to the forces of resistance, then the mathematical model will represent a partial differential equation of the second order parabolic type. The dynamics of pressure at specific points of pumping and injection under boundary conditions of the second kind (rates are given) was obtained using the finite cosine Fourier transform.

The working formula that allows you to determine the pressure at any point at a given point in time is a trigonometric series. The series are rapidly convergent, so there is no difficulty in working with them. Particular cases are considered (without pumping and injection). The fulfillment of the boundary conditions is checked. It is easy to rebuild the working formula for pumping and / or injection at several points in a given area.

Calculations of the mass flow and average velocity are made. In practice, the pressure is usually set at the start and end points of the area under study. In this case, it becomes possible to go to the costs (to derivatives) at the ends of the section under consideration.

Keywords: pipeline, non-stationary processes, pumping, injection, Fourier cosine transform, Dirac function, mass flow

Citation: Chuprov, I. F., Lyutoev, A. A., & Parmuzina, M. S. (2023). The simulation of non-stationary gas pressure in a pipeline with pumping and injection. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(2), 93–107. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-2-93-107>

Received April 29, 2023; Reviewed June 21, 2023; Accepted June 30, 2023

Введение

Развитие сети магистральных газопроводов должно сопровождаться совершенствованием техники и технологии, улучшением экономических показателей, системой мер по обеспечению надежности газоснабжения. Внутреннее давление является основным силовым воздействием, влияющим на прочность газопровода. На основе рабочего давления определяется толщина стенок трубопровода, формируется оборудование транспортной системы. В данной работе решается задача о динамике нестационарного давления газа на сложном участке газопровода. Причинами нестационарности транспортируемой среды могут быть подкачка или отбор продукта, изменение режима работы насосных станций и другие [Бобровский и др., 1972; Грачев и др., 1982].

Методы

Изотермическое неустановившееся движение реальных жидкостей в круглых трубах на горизонтальном участке с постоянным сечением описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных [Чарный, 1975]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\lambda \rho v^2}{8\sigma}, \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}, \end{cases} \quad (1)$$

где $P = P(x, t)$ — давление; t — время; c — скорость звука в транспортируемой среде; $Q = \rho \cdot v$ — массовая скорость; λ — коэффициент гидравлического сопротивления; ρ — плотность; v — скорость транспортируемой среды; σ — смоченный периметр трубопровода.

В системе (1) первое уравнение описывает движение среды, второе — уравнение неразрывности (сплошности) [Мирзаджанзаде, Гусейнзаде, 1971; Седов, 1978]. Система (1) содержит нелинейный член $\lambda \rho v^2 / 8\sigma$ (гидравлическое сопротивление), который сильно усложняет решение поставленной задачи [Альтимувль, 1970]. Существует несколько способов линеаризации системы (1). Один из способов, описанный И. А. Чарным [Чарный, 1975], заключается в следующем:

$$\frac{\lambda \rho v^2}{8\sigma} = \frac{\lambda \rho v}{8\sigma} \cdot v = \left(\frac{\lambda v}{8\sigma} \right)_{\text{сп}} \cdot \rho v = 2a \cdot \rho v = 2aQ,$$

где $2a = \left(\frac{\lambda \nu}{8\sigma}\right)_{\text{ср}}$. Для круглых труб с диаметром D : $\sigma = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{D}{4}$, поэтому $2a = \left(\frac{\lambda \nu}{2D}\right)_{\text{ср}}$.

Линеаризованная система (1) примет вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + 2aQ, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть на участке трубопровода длиной L в двух заданных точках производятся отбор в точке x_1 с массовым расходом G_{x1} и подкачка в точке x_2 с массовым расходом G_{x2} . Будем считать эти величины постоянными. Упрощенная схема рассматриваемого участка трубопровода представлена на рис. 1.

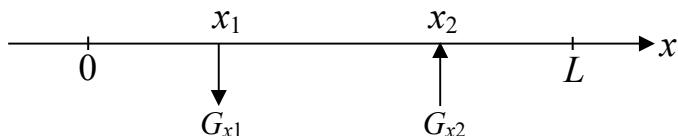


Рис. 1. Схема участка трубопровода с подкачкой и отбором

Fig. 1. Scheme of the pipeline section with pumping and injection

Уравнение неразрывности в случае сложного участка трубопровода изменится, и система (2) будет иметь вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + 2aQ, \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{G_{x1}}{S} \delta(x-x_1) + \frac{G_{x2}}{S} \delta(x-x_2), \end{cases} \quad (3)$$

где $\delta(x)$ — импульсная функция Дирака [Гельфанд, Шилов, 1957; Тихонов, Самарский, 1972; Широков, 1979]; S — площадь внутреннего сечения трубы.

Приведем систему (3) к одному уравнению. Первое уравнение дифференцируем по x , а второе — по переменной t :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} + 2a \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x}. \end{cases}$$

В уравнениях системы появились смешанные частные производные второго порядка относительно функции Q . Как известно, они в области непрерывности равны:

$$-\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Подставим вместо $\partial Q/\partial x$ его значение из второго уравнения системы (3) и получим:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{2a}{c^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{2aG_{x1}}{S} \cdot \delta(x-x_1) + \frac{2aG_{x2}}{S} \cdot \delta(x-x_2), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) является уравнением гиперболического типа [Годунов, 1991; Байков, Жибер, 2012]. Анализ этого уравнения показывает, что факторами противодействия потоку являются инерция и силы трения, которые описываются первым и вторым слагаемым правой части уравнения.

Если время соизмеримо с величиной $1/2a$, то нельзя пренебрегать инерционным слагаемым. Если $t \gg 1/2a$, то влияние инерционного слагаемого становится незначительным по сравнению с силами противодействия потоку, и этим слагаемым можно пренебречь (расчеты показывают, что для реальных газопроводов это время всегда меньше 1 ч). Тогда уравнение (4) примет вид [Бобровский и др., 1972, 1976; Чупров и др., 2021; Кувакина, Чупров, 2022]:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{2a}{c^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{2aG_{x1}}{S} \cdot \delta(x-x_1) + \frac{2aG_{x2}}{S} \cdot \delta(x-x_2), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (5)$$

Это уравнение уже параболического типа. Уравнение (5) будем решать при следующих условиях:

$$\text{— начальное условие} \quad P_{t=0} = P_0; \quad (6)$$

$$\text{— граничные условия} \quad \begin{cases} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{2a}{S} \cdot G_{x=0} = q_n, \\ \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{2a}{S} \cdot G_{x=L} = q_k, \end{cases} \quad (7)$$

где G — массовые расходы при $x = 0$ и $x = L$.

Поставленную задачу (5)–(7) будем решать методом конечного косинус-преобразования Фурье [Диткин, Прудников, 1974; Арсенин, 1984]. При этом прямое преобразование:

$$\bar{P}_n(t) = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L P(x,t) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (8)$$

Обратное преобразование:

$$P(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_n(t) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{P_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n(t) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (9)$$

Все члены уравнения (5) умножим на ядро преобразования $\frac{2}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ и интегрируем на отрезке $[0; L]$.

$$\frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{4a}{c^2 L} \int_0^L \frac{\partial P}{\partial t} \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{4aG_{x1}}{LS} \int_0^L \delta(x-x_1) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{4aG_{x2}}{LS} \int_0^L \delta(x-x_2) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Вычислим интегралы.

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \left| \begin{array}{ll} \bar{u} = \cos \frac{n\pi x}{L} & d\bar{v} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dx \\ d\bar{u} = -\frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx & \bar{v} = \frac{\partial P}{\partial x} \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{L} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L + \frac{n\pi}{L} \int_0^L \frac{\partial P}{\partial x} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) = \frac{2}{L} \left((-1)^n q_k - q_n \right) + \\ &+ \frac{2n\pi}{L^2} \int_0^L \frac{\partial P}{\partial x} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \left| \begin{array}{ll} \bar{u} = \sin \frac{n\pi x}{L} & d\bar{v} = \frac{\partial P}{\partial x} dx \\ d\bar{u} = \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx & \bar{v} = P(x,t) \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{L} \left((-1)^n q_k - q_n \right) + \\ &+ \frac{2n\pi}{L^2} \left(P(x,t) \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \frac{n\pi}{L} \int_0^L P(x,t) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right) = \\ &= \frac{2}{L} \left((-1)^n q_k - q_n \right) - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{2}{L} \int_0^L P(x,t) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \\ &= \frac{2}{L} \left((-1)^n q_k - q_n \right) - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \bar{P}_n(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{4a}{c^2 L} \int_0^L \frac{\partial P}{\partial t} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{2a}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{L} \int_0^L P(x,t) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right) = \\ &= \frac{2a}{c^2} \frac{d\bar{P}_n(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Здесь использована теорема дифференцирования интеграла по параметру [Пискунов, 2001].

$$3. \quad \frac{4aG_{x1}}{LS} \int_0^L \delta(x-x_1) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{4aG_{x1}}{LS} \cos \frac{n\pi x_1}{L}.$$

$$4. \quad \frac{4aG_{x2}}{LS} \int_0^L \delta(x-x_2) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{4aG_{x2}}{LS} \cos \frac{n\pi x_2}{L}.$$

При вычислениях интегралов, связанных с дельта-функцией, использовано равенство [Гельфанд, Шилов, 1957; Тихонов, Самарский, 1972]:

$$\int_a^b f(x) \cdot \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \text{ при } a < x_0 < b.$$

Получили изображения уравнения (5).

$$\begin{aligned} \frac{2}{L} \left((-1)^n q_k - q_n \right) - \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \cdot \overline{P}_n(t) = \frac{2a}{c^2} \cdot \frac{d\overline{P}_n(t)}{dt} - \\ - \frac{4a \cdot G_{x1}}{LS} \cdot \cos \frac{n\pi x_1}{L} + \frac{4a G_{x2}}{LS} \cdot \cos \frac{n\pi x_2}{L}. \end{aligned} \quad (10)$$

Необходимо преобразовать и начальное условие (6):

$$\overline{P}_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L P_0 \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0. \quad (11)$$

Поставленная задача (5)–(7) в изображениях будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{P}_n(t)}{dt} + \frac{1}{2a} \left(\frac{n\pi c}{L} \right)^2 \cdot \overline{P}_n(t) = \frac{c^2}{a \cdot L} \cdot \left((-1)^n \cdot q_k - q_n \right) + \\ + \frac{2G_{x1} \cdot c^2}{L \cdot S} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi x_1}{L} - \frac{2G_{x2} \cdot c^2}{L \cdot S} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi x_2}{L} \end{aligned} \quad (12)$$

при начальном условии (11).

Обозначим:

$$\begin{aligned} A_n = \frac{c^2}{a \cdot L} \cdot \left((-1)^n \cdot q_k - q_n \right) + \frac{2G_{x1} \cdot c^2}{L \cdot S} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi x_1}{L} - \\ - \frac{2G_{x2} \cdot c^2}{L \cdot S} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi x_2}{L}. \end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнения (12) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \overline{P}_n(t) = \exp \left(-\frac{1}{2a} \left(\frac{c\pi n}{L} \right)^2 t \right) \times \\ \times \left(A_n \cdot 2a \left(\frac{L}{c\pi n} \right)^2 \cdot \exp \left(\frac{1}{2a} \left(\frac{c\pi n}{L} \right)^2 t \right) + B_n \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где B_n — произвольная постоянная. Подчиним решение условию (11) и получим:

$$\begin{aligned} B_n = -A_n \cdot 2a \left(\frac{L}{c\pi n} \right)^2 = \\ = \frac{2L}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \left(q_n - (-1)^n \cdot q_k \right) - \frac{4aL \cdot G_{x1}}{n^2 \pi^2 \cdot S} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi x_1}{L} + \\ + \frac{4aL \cdot G_{x2}}{n^2 \pi^2 \cdot S} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi x_2}{L}. \end{aligned} \quad (14)$$

Частное решение уравнения (12) при условии (11) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \overline{P}_n(t) &= A_n \cdot 2a \left(\frac{L}{c\pi n} \right)^2 + B_n \exp \left(-\frac{1}{2a} \left(\frac{c\pi n}{L} \right)^2 t \right) = \\ &= \frac{2L}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \left((-1)^n \cdot q_k - q_n \right) + \frac{4aL \cdot G_{x_1}}{n^2 \pi^2 \cdot S} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi x_1}{L} - \\ &\quad - \frac{4aL \cdot G_{x_2}}{n^2 \pi^2 \cdot S} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi x_2}{L} + B_n \exp \left(-\frac{1}{2a} \left(\frac{c\pi n}{L} \right)^2 t \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где B_n задается выражением (14).

Для выполнения обратного преобразования необходимо предварительно найти $P_0(t)$, т. е. выполнить косинус-преобразование при $n = 0$. Преобразуем уравнение (5) при $n = 0$, а именно: умножим все члены на $\frac{2}{L} \cos \frac{0 \cdot \pi x}{L} dx = \frac{2}{L} dx$ и интегрируем от 0 до L :

$$\begin{aligned} \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dx &= \frac{2a}{c^2} \cdot \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial P}{\partial t} dx - \frac{2aG_{x_1}}{S} \cdot \frac{2}{L} \int_0^L \delta(x - x_1) dx + \\ &\quad + \frac{2aG_{x_2}}{S} \cdot \frac{2}{L} \int_0^L \delta(x - x_2) dx. \end{aligned} \quad (16)$$

В результате интегрирования получим:

$$\frac{\partial \overline{P}_0(t)}{\partial t} = \frac{c^2}{aL} (q_k - q_n) + \frac{2c^2}{S \cdot L} \cdot (G_{x_1} - G_{x_2}). \quad (17)$$

При вычислении интегралов использовано свойство функции Дирака [Гельфанд, Шилов, 1957; Тихонов, Самарский, 1972]:

$$\int_a^b \delta(x - c) dx = \begin{cases} 1, & \text{при } c \in [a, b], \\ 0, & \text{при } c \notin [a, b]. \end{cases}$$

Для уравнения (16) начальным условием будет $P_{t=0} = P_0$. Фурье-образ этого условия, т. е. начальное условие для (17):

$$P_0(0) = \frac{2}{L} \int_0^L P_0 dx = 2P_0. \quad (18)$$

Решая уравнение (17) при условии (18), получим:

$$P_0(t) = \left(\frac{c^2}{aL} (q_k - q_n) + \frac{2c^2}{S \cdot L} \cdot (G_{x_1} - G_{x_2}) \right) t + 2P_0. \quad (19)$$

Выполним обратное преобразование согласно равенству (9):

$$P(x, t) = P_0 + \left(\frac{c^2}{2aL} (q_k - q_n) + \frac{c^2}{S \cdot L} \cdot (G_{x_1} - G_{x_2}) \right) t +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2 \cdot Lq_k}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L}}{n^2} - \frac{2 \cdot Lq_n}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi x}{L}}{n^2} + \\
 & + \frac{4a \cdot LG_{x1}}{S\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{n\pi x_1}{L}}{n^2} - \\
 & - \frac{4a \cdot LG_{x2}}{S\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{n\pi x_2}{L}}{n^2} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \cdot \exp \left(-\frac{1}{2a} \cdot \left(\frac{n\pi c}{L} \right)^2 t \right) \cdot \cos \frac{n \cdot \pi x}{L} \right]. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай решения поставленной задачи. Пусть $G_{x1} = G_{x2} = 0$, т. е. на рассматриваемом участке газопровода нет отбора и подкачки. В этом случае в силу неразрывности потока будет выполняться $q_n = q_k = q$. При этом просуммируем ряды в (20), не содержащие экспоненту, по формулам [Градштейн, Рыжик, 2011]:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{n\pi x}{L}}{n^2} &= \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{3} \right) \text{ при } -L \leq x \leq L; \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi x}{L}}{n^2} &= \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{L} + \frac{x^2}{2L^2} \right) \text{ при } 0 \leq x \leq 2L.
 \end{aligned} \quad (21)$$

В этом случае формула (20) примет вид:

$$P(x, t) = P_0 + Lq \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2Lq}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2a} \cdot \left(\frac{n\pi c}{L} \right)^2 t \right) \cdot \cos \frac{n \cdot \pi x}{L} \right]. \quad (22)$$

Здесь уже хорошо видно, что выполняются граничные условия:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = q + \frac{2Lq}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2a} \cdot \left(\frac{n\pi c}{L} \right)^2 t \right) \cdot \left(-\frac{n\pi}{L} \right) \sin \frac{n \cdot \pi x}{L} \right].$$

При $x = 0$ и $x = L$ ряд обращается в нуль.

При $t = 0$ равенство (22) примет вид:

$$P(x, 0) = P_0 + Lq \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2Lq}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi x}{L} \right]. \quad (23)$$

Если суммировать ряды в (23) по формулам (21), то получим:

$$P(x, 0) = P_0 + Lq \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) + Lq \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) = P_0.$$

Таким образом, доказано, что начальное условие тоже выполняется.

Рабочая формула для расчета динамики давления также упрощается, если на рассматриваемом участке есть только подкачка или только отбор.

Результаты и обсуждение

В качестве примера рассмотрим участок газопровода со следующими характеристиками: начальное давление $P_0 = 4,2$ МПа; на границах $P_{x=0} = 5,4$ МПа и $P_{x=L} = 4,2$ МПа; длина трубопровода $L = 100$ км = 10^5 м; внутренний диаметр трубопровода $D = 1,196$ м; плотность газа $\rho = 37$ кг/м³ при $P = 5$ МПа [ГСССД 160–93]; коэффициент сжимаемости газа 0,91; скорость звука в транспортируемой среде $c = 427$ м/с; газовая постоянная $R = 500$ Н·м/кг·°С; абсолютная средняя температура газа $T = 293$ К (20 °С); коэффициент гидравлического сопротивления $\lambda = 0,02$. Точки сосредоточенного отбора $x_1 = 3 \cdot 10^4$ м и закачки $x_2 = 6 \cdot 10^4$ м. Для определения $2a = \left(\frac{\lambda v}{2D}\right)_{\text{ср}}$ необходимо найти усредненную скорость v .

Массовая скорость на единицу площади будет равна:

$$Q = \sqrt{\frac{(P_n^2 - P_k^2)D}{\lambda ZRTL}} = \sqrt{\frac{(5,4^2 - 4,2^2) \cdot 10^{12} \cdot 1,196}{0,02 \cdot 0,91 \cdot 500 \cdot 293 \cdot 10^5}} = 227,32 \text{ кг}/(\text{с} \cdot \text{м}^2).$$

$$\text{Средняя скорость: } v = \frac{Q}{\rho} = \frac{227,32}{37} = 6,14 \text{ м/с}.$$

$$\text{Тогда } 2a = \frac{\lambda v}{2D} = \frac{0,02 \cdot 6,14}{2 \cdot 1,196} = 0,05 \frac{1}{\text{с}}.$$

Граничные условия задачи $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2a}{S} \cdot G = q$ при $x = 0$ и $x = L$. Перейдем от потока к давлению:

$$\int_0^L \frac{\partial P}{\partial x} dx = \int_0^L \frac{2a}{S} \cdot G dx; \quad P|_0^L = P_{x=L} - P_{x=0} = \Delta P = \frac{2a}{S} GL.$$

Из последнего равенства можно определить массовый расход в начале и конце участка газопровода при заданных выше параметрах:

$$G = \frac{\Delta P \cdot S}{2aL} = \frac{(4,2 - 5,4) \cdot 10^6 \pi \cdot \frac{1,196^2}{4}}{0,051 \cdot 10^5} = -269,63 \text{ кг/с}.$$

$$\text{Находим } q_n = q_k = \frac{2a \cdot G}{S} = \frac{0,051 \cdot (-269,63)}{\left(\pi \cdot \frac{1,196^2}{4}\right)} = -12 \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м}^2).$$

Массовый расход газа, в отличие от объемного расхода через любое поперечное сечение в единицу времени, вследствие неразрывности остается неизменным [Рабинович,

1980]. Из проведенных выше расчетов следует, что для простого участка газопровода при заданных условиях массовый расход через любое сечение будет равным 269,63 кг/с. Если на этом участке будет отбор и/или подкачка, то будет меняться расход через сечение $x = L$ и, следовательно, q_k .

Пусть в точке $x_1 = 3 \cdot 10^4$ м отбор $G_{x_1} = 50$ кг/с, а в точке $x_2 = 6 \cdot 10^4$ м подкачка $G_{x_2} = 100$ кг/с. Тогда массовый расход через сечение $x = L$ будет $269,63 - 50 + 100 = 319,63$. Необходимо пересчитать q_k , а q_n остается неизменным:

$$q_k = \frac{2a \cdot G}{S} = \frac{0,051 \cdot (-319,63)}{\left(\pi \cdot \frac{1,196^2}{4}\right)} = -14 \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м}^2).$$

Выше было отмечено, что нестационарный режим может наблюдаться при изменении режима работы или при подкачке, отборе. Вычислим по формуле (20) давление (МПа) в нескольких точках в разные моменты времени. На рис. 2 приведены графики давлений в разных точках газопровода в промежутке времени от 60 до 3 600 сек (1 ч).

Из рис. 2 видно, что давление стабилизируется уже через 900 сек (15 мин) после начала работы.

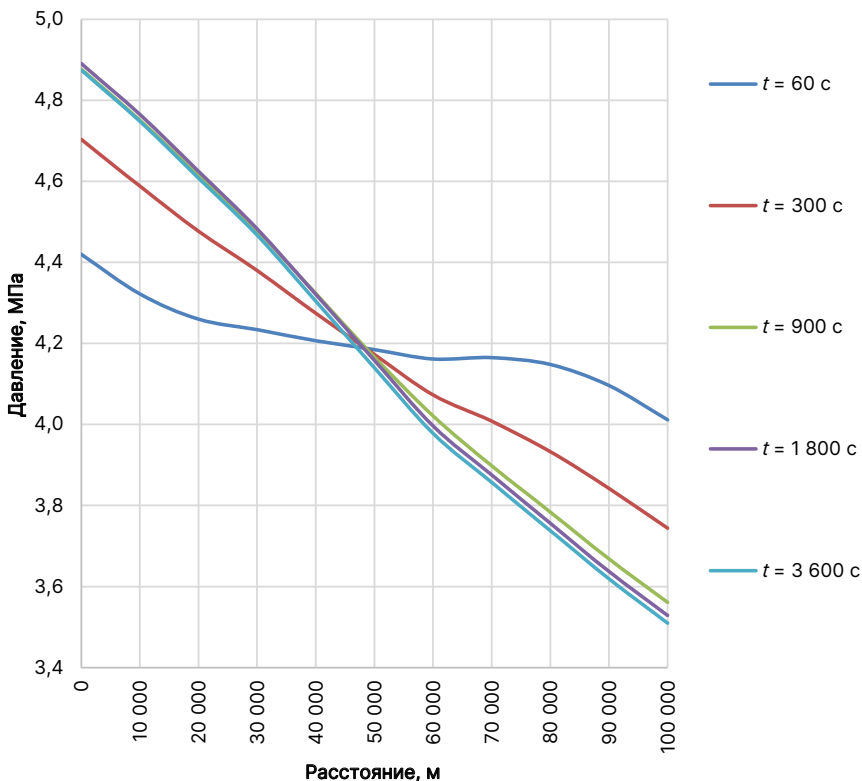


Рис. 2. Давления в различные моменты времени

Fig. 2. Pressures at different times

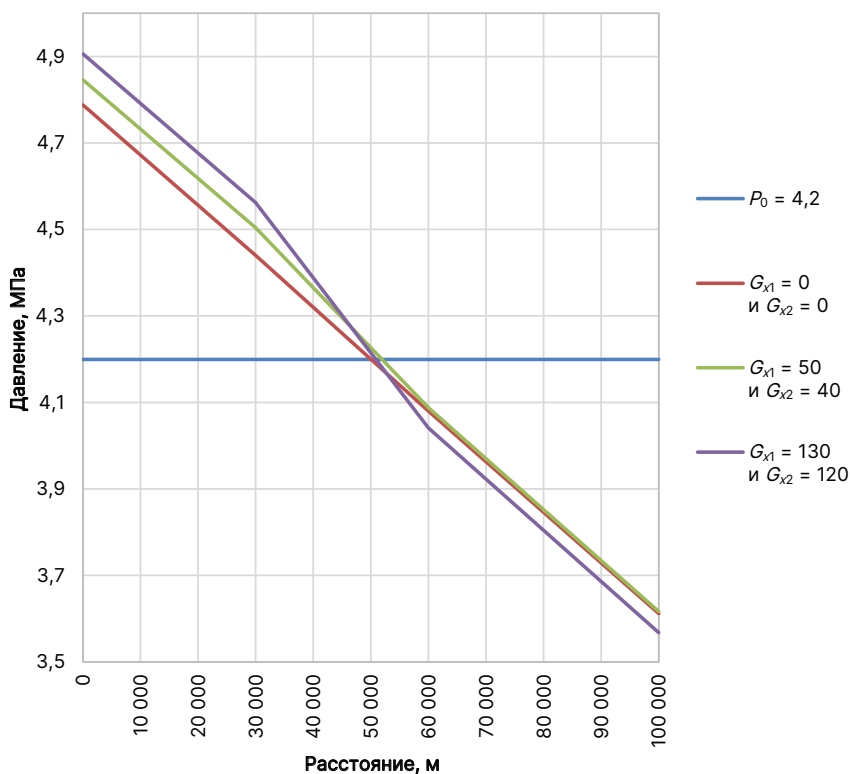


Рис. 3. Динамика давления газа при различных уровнях отбора и подкачки

Fig. 3. Dynamics of gas pressure at different levels of pumping and injection

На рис. 3 представлена динамика давления газа по длине участка газопровода при различных уровнях отбора в точке $x_1 = 3 \cdot 10^4$ м и подкачки в точке $x_2 = 6 \cdot 10^4$ м.

Функция Дирака предусматривает точечный сток или источник. На первый взгляд кажется, что давления в окрестностях точек x_1 и x_2 должны иметь резкий скачок. Но на самом деле в зонах подкачки и отбора давление изменяется плавно в зависимости от величины G . При этом резкого скачка нет, что важно для практики.

Заключение

Основываясь на результатах исследования И. А. Чарного о движении реальной жидкости в трубах, мы сформулировали задачу для динамики давления. Рассматривается случай, когда в заданных точках осуществляется отбор и подкачка. Задача решена при граничных условиях второго рода методом конечного косинус-преобразования Фурье.

В качестве частного случая получены результаты для простого участка газопровода. Сделана проверка выполнения граничных и начальных условий. Представлены результаты в виде графиков при конкретных параметрах для реального объекта. Табличные значения показали, что стационарный режим наступает уже через 15 мин после начала процесса перекачки.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- Альгимуль А. Д. 1970. Гидравлическое сопротивление. М.: Недра. 216 с.
- Арсенин В. Я. 1984. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука. 383 с.
- Байков В. А., Жибер А. В. 2012. Уравнения математической физики. Ижевск: Институт компьютерных исследований. 254 с.
- Бобровский С. А., Щербаков С. Г., Гусейн-заде М. А. 1972. Движение газа в газопроводах с путевым отбором. М.: Наука. 192 с.
- Бобровский С. А., Щербаков С. Г., Яковлев Е. И. 1976. Трубопроводный транспорт газа. М.: Наука. 595 с.
- Гельфанд И. М., Шилор Г. Е. 1957. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз. 471 с.
- Годунов С. К. 1991. Уравнения математической физики. М.: Наука. 387 с.
- Градштейн И. С., Рыжик И. М. 2011. Таблицы интегралов, рядов и производений. СПб.: БХВ-Петербург. 1232 с.
- Грачев В. В., Гусейн-заде М. А., Ксенз Б. И., Яковлев Е. И. 1982. Сложные трубопроводные системы. М.: Недра. 256 с.
- ГСССД 160–93. 1993. Таблицы стандартных справочных данных. Газ природный расчетный. Плотность, фактор сжимаемости, энтальпия, энтропия, изобарная теплоемкость, скорость звука, показатель адиабаты и коэффициент объемного расширения при температурах 250...450 К и давлениях 0,1...12 МПа. М.: Комитет Российской Федерации по стандартизации, метрологии и сертификации. 20 с.
- Диткин А. В., Прудников А. П. 1974. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука. 542 с.
- Кувакина А. О., Чупров И. Ф. 2022. Давление газа в трубопроводе с отбором или подкачкой // Нефтегазовое дело. Том 20. № 3. С. 176–181. <https://doi.org/10.17122/ngdelo-2022-3-176-181>
- Мирзаджанзаде А. Х., Гусейнзаде М. А. 1971. Решение задач нефтегазопромысловых механики. М.: Недра. 200 с.
- Пискунов Н. С. 2001. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пос. для вузов. В 2 т. Том 1. М.: Интеграл-Пресс. 416 с.
- Рабинович Е. З. 1980. Гидравлика. М.: Недра. 278 с.
- Седов Л. И. 1978. Механика сплошной среды. М.: Наука. 336 с.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1972. Уравнения математической физики. М.: Наука. 735 с.
- Чарный И. А. 1975. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра. 296 с.
- Чупров И. Ф., Секутов В. В., Пармузина М. С. 2021. Динамика давления газа в газопроводе с путевым отбором и подкачкой // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. № 3 (131). С. 67–75. <https://doi.org/10.17122/ntj-oil-2021-3-67-75>
- Широков Ю. М. 1979. Алгебра одномерных обобщенных функций // Теоретическая и математическая физика. Том 39. № 3. С. 291–301.

References

- Altimul, A. D. (1970). *Hydraulic resistance*. Nedra. [In Russian]
- Arsenin, V. Ya. (1984). *Methods of mathematical physics and special functions*. Nauka. [In Russian]
- Baykov, V. A., & Zhiber, A. V. (2012). *Equations of mathematical physics*. Izhevsk Institute of Computer Science. [In Russian]
- Bobrovskiy, S. A., Shcherbakov, S. G., & Guseyn-zade, M. A. (1972). *Movement of gas in gas pipelines with line extraction*. Nauka. [In Russian]
- Bobrovskiy, S. A., Shcherbakov, S. G., & Yakovlev, E. I. (1976). *Pipeline transport of gas*. Nauka. [In Russian]
- Gelfand, I. M., & Shilov, G. E. (1957). *Generalized functions and actions on them*. Fizmatgiz. [In Russian]
- Godunov, S. K. (1991). *Equations of mathematical physics*. Nauka. [In Russian]
- Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (2011). *Tables of integrals, series and products*. BKhV-Peterburg. [In Russian]
- Grachev, V. V., Guseyn-zade, M. A., Ksenz, B. I., & Yakovlev, E. I. (1982). *Complex piping systems*. Nedra. [In Russian]
- GSSSD 160–93. (1993). *Tables of standard reference data. Natural gas rated. Density, compressibility factor, enthalpy, entropy, isobaric specific heat, velocity of sound, index of adiabate and coefficient of volume thermal expansion in the temperature range 230...430 K and pressure range 0.1...12 MPa*. Russian Federation Committee for Standardization, Metrology and Certification. [In Russian]
- Ditkin, A. V., & Prudnikov, A. P. (1974). *Integral transformations and operational calculus*. Nauka. [In Russian]
- Kuvakina, A. O., & Chuprov, I. F. (2022). Gas pressure in the pipeline with extraction or pumping. *Petroleum Engineering*, 20(3), 176–181. <https://doi.org/10.17122/ngdelo-2022-3-176-181> [In Russian]
- Mirzadzhanzade, A. Kh., & Guseynzade, M. A. (1971). *Solving problems of oil and gas field mechanics*. Nedra. [In Russian]
- Piskunov, N. S. (2001). *Differential and integral calculus: a textbook for universities. In 2 vols. Vol. 1*. Integral-Press. [In Russian]
- Rabinovich, E. Z. (1980). *Hydraulics*. Nedra. [In Russian]
- Sedov, L. I. (1978). *Continuum mechanics*. Nauka. [In Russian]
- Tikhonov, A. N., & Samarskiy, A. A. (1972). *Equations of mathematical physics*. Nauka. [In Russian]
- Charnyy, I. A. (1975). *Unsteady motion of a real fluid in pipes*. Nedra. [In Russian]
- Chuprov, I. F., Sekutov, V. V., & Parmuzina, M. S. (2021). Dynamics of gas pressure in a gas pipeline with a in-line sampling and pumping. *Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products*, (3), 67–75. <https://doi.org/10.17122/ntj-oil-2021-3-67-75> [In Russian]
- Shirokov, Yu. M. (1979). Algebra of one-dimensional generalized functions. *Theoretical and Mathematical Physics*, 39(3), 471–477. <https://doi.org/10.1007/BF01017992>

Информация об авторах

Илья Федорович Чупров, доктор технических наук, профессор кафедры «Высшая математика», Ухтинский государственный технический университет, Ухта, Россия
ichuprov@ugtu.net

Александр Анатольевич Лютоев, кандидат технических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Ухтинский государственный технический университет, Ухта, Россия
allyutoev@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0003-4781-2540>

Мария Семеновна Пармузина, кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Ухтинский государственный технический университет, Ухта, Россия
mparmuzina@ugtu.net, <https://orcid.org/0000-0003-3790-4743>

Information about the authors

Ilya F. Chuprov, Dr. Sci. (Tech.), Professor, Department of Higher Mathematics, Ukhta State Technical University, Ukhta, Russia
ichuprov@ugtu.net

Alexander A. Lyutoev, Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Ukhta State Technical University, Ukhta, Russia
allyutoev@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0003-4781-2540>

Maria S. Parmuzina, Cand. Sci. (Ped.), Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Ukhta State Technical University, Ukhta, Russia
mparmuzina@ugtu.net, <https://orcid.org/0000-0003-3790-4743>