

Нуркен Ерболатович АКТАЕВ<sup>1</sup>

Татьяна Андреевна ПЕНКИНА<sup>2</sup>

УДК 533.7

## ПРИМЕНИМОСТЬ СТОКСОВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА СКОРОСТИ ПАРОВОЗДУШНОЙ СТРУИ НАД ЛОКАЛЬНО НАГРЕТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВОДЫ\*

<sup>1</sup> кандидат физико-математических наук,  
Научно-исследовательская лаборатория микрогидродинамических технологий,  
Тюменский государственный университет  
n.e.aktaev@utmn.ru; ORCID: 0000-0002-9750-2183

<sup>2</sup> ассистент, кафедра документоведения  
и документационного обеспечения управления,  
Тюменский государственный университет  
t.a.penkina@utmn.ru

### Аннотация

В работе построена математическая модель паровоздушной струи, возникающей над локально нагретой поверхностью воды. Модель базируется на системе уравнений свободной конвекции в приближении Буссинеска и реализована в виде компьютерной программы на языке Си. В результате численного моделирования получены поля скоростей струи при различных значениях температуры поверхности воды. Проведено сравнение значений скоростей струи, полученных в рамках стоковского приближения, с расчетными значениями, опирающимися на результаты экспериментов по левитации микрокапель воды. В результате сравнения сформулировано условие применимости стоковского приближения для оценки скорости паровоздушной струи.

\* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-38-00232 мол\_а.

**Цитирование:** Актаев Н. Е. Применимость стоковского приближения для расчета скорости паровоздушной струи над локально нагретой поверхностью воды / Н. Е. Актаев, Т. А. Пенкина // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Том 6. № 1 (21). С. 166-175.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-1-166-175

### Ключевые слова

Уравнения Навье — Стокса, приближение Буссинеска, паровоздушная струя, микрокапли воды.

DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-1-166-175

### Введение

В настоящее время технологии, основанные на использовании микрокапель воды, притягивают большой интерес научных групп. Использование микрокапель существенно повышает скорость скрининга сложных биологических систем [1, 10]. В микрореакторах на основе микрокапель возрастает скорость химических реакций [3, 12]. Отсутствие в микрокаплях адсорбций реагента и пристенного катализа открывает возможности для систематического исследования колебательных ферментативных реакций [11]. Отдельным важным полем для исследований являются передовые технологии *labs-on-a-chip* [13].

В работах [2, 6-8] исследуется механизм формирования левитирующих микрокапель. Особенность механизма заключается в локальном характере нагрева поверхности воды. В результате этого над поверхностью возникает паровоздушная струя [9], обеспечивающая процесс левитации. В настоящее время теоретическая база существенно отстает от экспериментальной, что вынуждает использовать различные приближения для понимания механизмов левитации. Так, в работе [5] посредством стоковского приближения рассчитывается скорость паровоздушной струи, которая обтекает ансамбль микрокапель воды. Приближение основано на равенстве веса капли и силы Стокса, которое обеспечивает процесс левитации на определенной высоте. Применение приближения обусловлено отсутствием математической модели паровоздушной струи, в рамках которой можно рассчитывать скорость при различных параметрах эксперимента.

В рамках настоящей работы построена численная модель, позволяющая рассчитывать скорость паровоздушной струи в области левитации микрокапель. Путем сравнения результатов моделирования и обработки экспериментальных данных анализируется обоснованность применения стоковского приближения.

### Модель

Математическая модель паровоздушной струи описывается системой уравнений свободной конвекции в приближении Буссинеска:

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (1)$$

$$(v \cdot \nabla)v = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\nabla^2 v - [1 - \beta(T - T_0)]g, \quad (2)$$

$$v \cdot \nabla T = \chi\nabla^2 T, \quad (3)$$

$$v \cdot \nabla n = D\nabla^2 n, \quad (4)$$

$$p = p(\rho, T), \quad (5)$$

где  $v$  — скорость,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\beta = 4,58 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  — температурный коэффициент расширения водяного пара,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности,  $n$  — концентрация,  $D = 21,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  — коэффициент диффузии водяного пара в воздухе.

В цилиндрической системе координат с аксиальной симметрией система (1)-(5) запишется как

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = -\rho_0^{-1} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right], \quad (6)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\rho_0^{-1} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + [1 - \beta(T - T_0)]g, \quad (7)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right], \quad (8)$$

$$u \frac{\partial n}{\partial r} + v \frac{\partial n}{\partial z} = D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial n}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right], \quad (9)$$

$$0 < r < r_{\max}, \quad 0 < z < z_{\max}, \quad (10)$$

где  $u, v$  — проекции (радиальная и вертикальная) скорости на ось  $r$  и  $z$  соответственно,  $r_{\max} = 5 \text{ мм}$ ,  $z_{\max} = 0,14 \text{ мм}$ . Значения теплофизических параметров определяются параметрами влажного воздуха:  $\rho = 1,22 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 20 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\chi = 25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

При  $r = 0$  граничные условия для параметров  $u, v, T, n$  определяются аксиальной симметрией:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial n}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (11)$$

На термокапиллярной границе раздела «вода — воздух» выполняется условие непрерывности температуры:  $T^{(w)} \Big|_{z^{(w)}=z_{\max}^{(w)}} = T \Big|_{z=0}$ , где  $T^{(w)} \Big|_{z^{(w)}=z_{\max}^{(w)}}$  — температура поверхности воды (рассчитывается из модели [10]). При этом условие переноса тепла должно учитывать диффузионный поток массы пара на границе:

$$-\lambda^{(w)} \frac{\partial T^{(w)}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial T}{\partial z} = -LD \frac{M}{N_A} \frac{\partial n}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (12)$$

где  $\lambda^{(w)}$  — теплопроводность воды (задается в виде функции от температуры, см. [7]),  $T^{(w)}$  — температурное поле в слое воды (рассчитывается из модели [7]),  $\lambda = 2,81 \cdot 10^2$  Вт/(м · К) — теплопроводность воздуха,  $L = 2,26 \cdot 10^6$  Дж/кг — удельная теплота фазового перехода (испарения воды),  $M = 0,018$  кг/моль — молярная масса воды,  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> — постоянная Авогадро.

Согласно эксперименту [5], на условия которого мы ориентируемся, в воде имеются поверхностно-активные вещества, которые существенно ослабляют термокапиллярные течения. Поэтому  $u|_{z=0} = 0$ ,  $v|_{z=0} = 0$ . На нижней границе выполняется условие равенства вязкого напряжения и поверхностной силы:

$$\rho v \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad (13)$$

где  $\partial \sigma / \partial r = \sigma_T \nabla T$ ,  $\sigma_T = -0,1541 \cdot 10^{-3}$  Н/(м · К) — температурный коэффициент поверхностного натяжения воды.

Граничные значения концентрации пара могут быть рассчитаны как

$$n|_{z=0} = n_0 \exp \left[ \frac{LM}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T|_{z=0}} \right) \right], \quad (14)$$

где  $n_0 = 5,72 \cdot 10^{23}$  м<sup>-3</sup> — концентрация насыщенного пара при температуре  $T_0$ . Выражение (14) является следствием уравнений Клайперона — Клаузиуса и Менделеева — Клайперона.

На правой и верхней границах выполняются условия прилипания для скорости и абсорбции пара соответственно:  $u|_{r=r_{\max}} = v|_{r=r_{\max}} = u|_{z=z_{\max}} = v|_{z=z_{\max}} = 0$ ,  $n|_{r=r_{\max}} = n|_{z=z_{\max}} = 0$ , что соответствует конструкции экспериментальной установки [5]. Граничные условия для температуры на правой и верхней границах определяются режимом термостатирования:  $T|_{r=r_{\max}} = T|_{z=z_{\max}} = T_0$ .

Расчетная сетка определяется параметрами  $\Delta r = 10$  мкм,  $\Delta z = 5$  мкм. Максимальное значение координаты  $z_{\max} = 140$  мкм определяется максимальной высотой, на которой наблюдалась левитация микрокапель в экспериментах,  $r_{\max} = 5$  мм. Компьютерная программа, реализующая численное решение, написана на языке Си с использованием компилятора MinGW с открытым исходным кодом.

### Результаты и обсуждение

На рис. 1 представлены результаты расчетов температурных полей, векторных полей скоростей струи, радиальной и поперечной составляющих скоростей. Расчеты выполнены при различных значениях температуры в центре нагретого пятна: 41 °С (левая колонка) и 46 °С (правая колонка). Как видно из иллюстрации температурных полей, в области левитации кластера ( $r < 0,5$  мм) на фиксированной высоте поддерживается практически одинаковое значение температуры.

Векторное поле скоростей, наложенное на скалярное поле, показывает, что характер движения струи соответствует наблюдаемому в эксперименте [4]. Следует отметить, что в центре нагретого пятна отсутствует радиальная составляющая

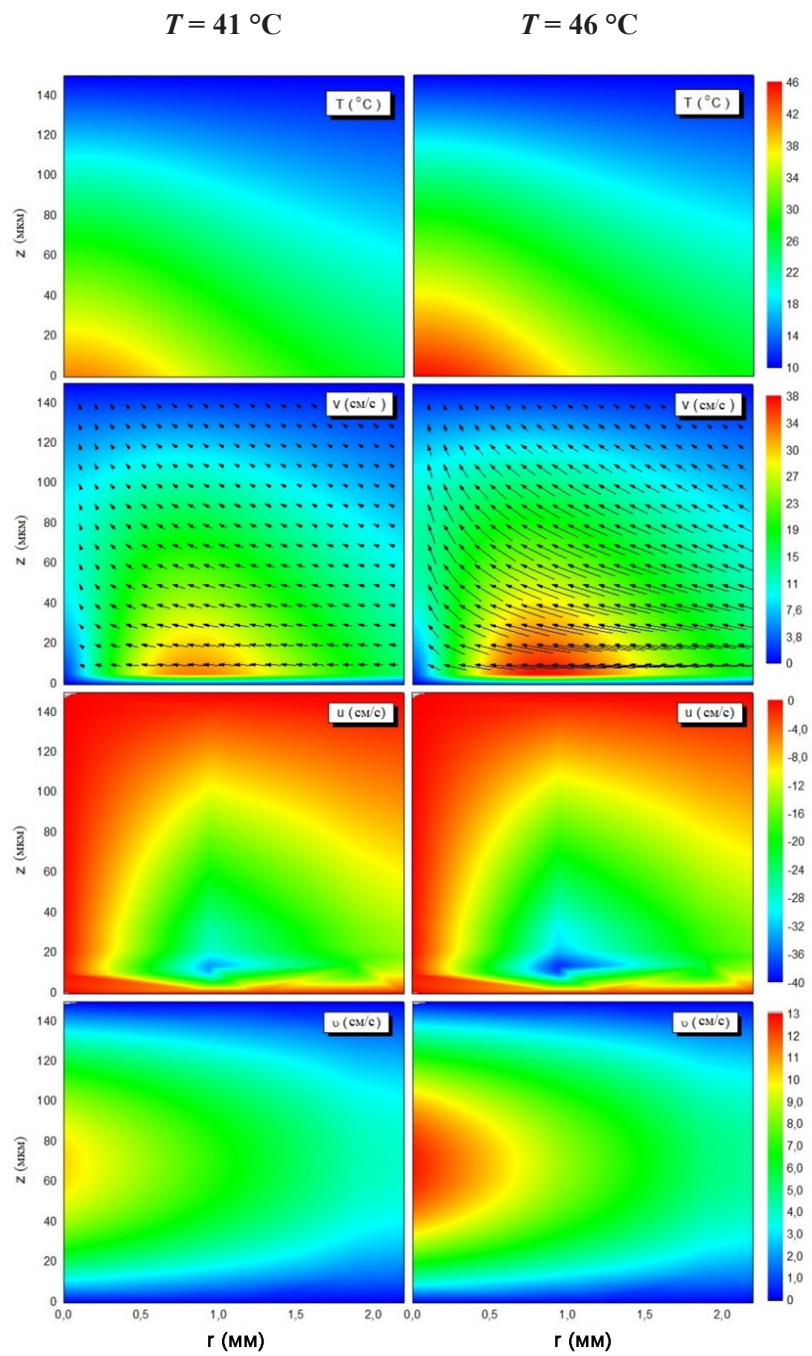


Рис. 1. Поля температур, скоростей, радиальной и поперечной составляющих скорости

Fig. 1. Fields of temperature, velocity, radial and lateral velocity components

скорости. В противном случае за счет встречных потоков наблюдались бы вихри, в условиях которых левитация невозможна. Поперечная составляющая скорости, ответственная непосредственно за процесс левитации, испытывает максимум в диапазоне высот ( $30 \leq z \leq 110$ ). В подавляющем большинстве экспериментов кластер левитирует в данном диапазоне.

Для количественного анализа справедливости стоксовского приближения воспользуемся предположением, что левитация микрокапли обусловлена равновесием сил, действующих на нее. Ограничимся силой тяжести  $F_{mg} = 4\pi r_d^3 \rho^{(w)} g / 3$  и силой вязкого трения, которая согласно закону Стокса определяется как  $F_S = -6\pi r_d \nu \rho v_S$ , где  $\rho^{(w)} = 1\,000$  кг/м<sup>3</sup> — плотность воды,  $r_d$  — радиус капли,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $v_S$  — скорость микрокапли (стоксовская скорость). Очевидно, что для более качественного анализа необходимо также учитывать силу, удерживающую каплю над поверхностью воды за счет создания между ними вихревого паровоздушного слоя. Тогда в рамках приближения скорость можно рассчитать как

$$v_S = \frac{2\rho^{(w)} g r_d^2}{9\nu\rho}. \quad (15)$$

Соответствующая зависимость от радиуса капли представлена на рис. 2 черной кривой.

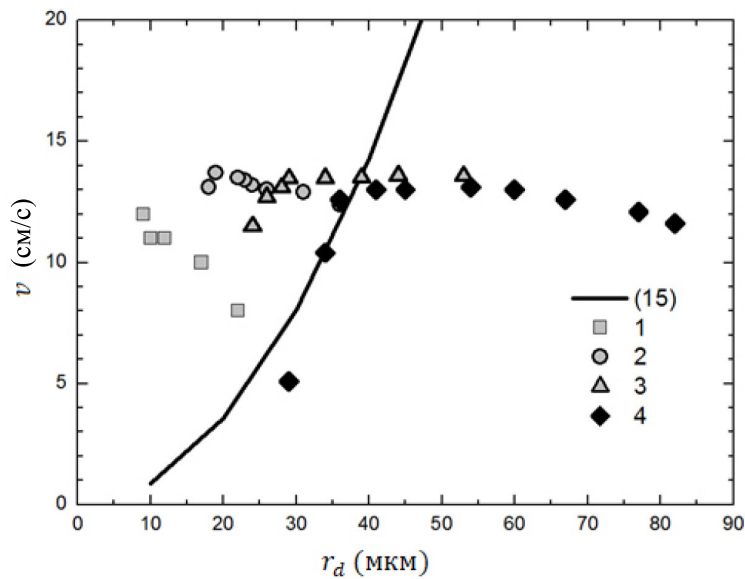


Рис. 2. Соответствие радиуса капли и скорости паровоздушной струи при различных значениях температуры поверхности воды:

- 1 —  $T = 73,4$  °C,
- 2 —  $T = 82,6$  °C,
- 3 —  $T = 86,6$  °C,
- 4 —  $T = 92,8$  °C

Fig. 2. Correspondence of the radius of the droplet and the velocity of the air steam flow at various values of the water surface temperature:

- 1 —  $T = 73.4$  °C,
- 2 —  $T = 82.6$  °C,
- 3 —  $T = 86.6$  °C,
- 4 —  $T = 92.8$  °C

В работе [5, рис. 2] представлена экспериментальная зависимость высоты левитации микрокапли от ее радиуса при различных значениях температуры в центре нагретого пятна поверхности воды: 73,4, 82,6, 86,6 и 92,8 °С. Мы провели численное моделирование, обеспечивая соответствующие значения температуры, и получили значения скоростей струи на высотах левитации микрокапель различного радиуса. Указанные наборы точек представлены на рис. 2.

Как видно из рис. 2, стоксовское приближение применимо для микрокапель с радиусом в диапазоне  $30 < r_d < 40$  мкм. За пределами указанного диапазона на других высотах левитации, по-видимому, проявляются дополнительные физические эффекты, которые требуют дальнейшего теоретического исследования.

### Выводы

В работе построена численная модель паровоздушной струи, основанная на системе уравнений свободной конвекции, включающей в себя уравнения Навье — Стокса и диффузии пара. В рамках численного моделирования получено поле температур и скоростей в паровоздушной среде. Показано, что характер струи, описываемый векторным полем скоростей, соответствует наблюдаемому в экспериментах. Численное значение вертикальной составляющей скорости по порядку величины совпадает с результатом обработки экспериментальных данных, рассчитанным в рамках стоксовского приближения. Выявлено, что стоксовское приближение применимо для микрокапель с радиусом в диапазоне  $30 < r_d < 40$  мкм. Ожидается, что полученные результаты позволят углубить понимание механизмов, лежащих в основе левитации микрокапель воды.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agresti J. J. Ultrahigh-throughput screening in drop-based microfluidics for directed evolution / J. J. Agresti, E. Antipov, A. R. Abate, K. Ahn, A. C. Rowat, J.-C. Baret, M. Marquez, A. M. Klibanov, A. D. Griffiths, D. A. Weitz // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2010. Vol. 107. № 9. Pp. 4004-4009.
2. Aktaev N. E. Langevin approach to modeling of small levitating ordered droplet clusters / N. E. Aktaev, A. A. Fedorets, E. Y. Bormashenko, M. Nosonovsky // *Journal of Physical Chemistry Letters*. 2018. Vol. 9. № 14. Pp. 3834-3838.
3. Chowdhury M. S. Dendronized fluorosurfactant for highly stable water-in-fluorinated oil emulsions with minimal inter-droplet transfer of small molecules / M. S. Chowdhury, W. Zheng, S. Kumari, J. Heyman, X. Zhang, P. Dey, D. A. Weitz, R. Haag // *Nature Communications*. 2019. Vol. 10. № 1. Article № 4546.
4. Fedorets A. A. Generation of levitating droplet clusters above the locally heated water surface: a thermal analysis of modified installation / A. A. Fedorets, L. A. Dombrovsky // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2017. Vol. 104. Pp. 1268-1274.
5. Fedorets A. A. Mechanism of stabilization of location of a droplet cluster above the liquid-gas interface / A. A. Fedorets // *Technical Physics Letters*. 2012. Vol. 38. № 11. Pp. 988-990.

6. Fedorets A. A. Oscillatory motion of a droplet cluster / A. A. Fedorets, N. E. Aktaev, D. N. Gabyshev, E. Yu. Bormashenko, L. A. Dombrovsky, M. Nosonovsky // *Journal of Physical Chemistry C*. 2019. Vol. 123. Pp. 23572-23576.
7. Fedorets A. A. Suppression of the condensational growth of droplets of a levitating cluster using the modulation of the laser heating power / A. A. Fedorets, N. E. Aktaev, L. A. Dombrovsky // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2018. Vol. 127. Pp. 660-664.
8. Jiao L. Highly flexible and ultraprecise manipulation of light-levitated femtoliter/picoliter droplets / L. Jiao, R. Chen, X. Zhu, Q. Liao, H. Wang, L. An, J. Zhu, X. He, H. Feng // *Journal of Physical Chemistry Letters*. 2019. Vol. 10. № 5. Pp. 1068-1077.
9. Kabov O. A. Locally heated shear-driven liquid films in microchannels and minichannels / O. A. Kabov, Yu. V. Lyulin, I. V. Marchuk, D. V. Zaitsev // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2007. Vol. 28. № 1. Pp. 103-111.
10. Nightingale A. M. Monitoring biomolecule concentrations in tissue using a wearable droplet microfluidic-based sensor / A. M. Nightingale, C. L. Leong, R. A. Burnish, S.-U. Hassan, Y. Zhang, G. F. Clough, M. G. Boutelle, D. Voegeli, X. Niu // *Nature Communications*. 2019. Vol. 10. № 1. Article № 2741.
11. Scheeline A. Potential of levitated drops to serve as microreactors for biophysical measurements / A. Scheeline, R. L. Behrens // *Biophysical Chemistry*. 2012. Vols. 165-166. Pp. 1-12.
12. Song H. A microfluidic system for controlling reaction networks in time / H. Song, J. D. Tice, R. F. Ismagilov // *Angewandte Chemie*. 2003. Vol. 42. № 7. Pp. 768-772.
13. Stone H. A. Engineering flows in small devices: microfluidics toward a lab-on-a-chip / H. A. Stone, A. D. Stroock, A. Ajdari // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2004. Vol. 36. Pp. 381-411.



Nurken E. AKTAEV<sup>1</sup>  
Tatiana A. PENKINA<sup>2</sup>

UDC 533.7

**APPLICABILITY OF THE APPROXIMATION OF STOKES  
FOR CALCULATING THE VELOCITY OF A STEAM-AIR JET  
OVER A LOCALLY HEATED WATER SURFACE\***

<sup>1</sup> Cand. Sci. (Phys.-Math.), Microhydrodynamic Technology Research Laboratory,  
University of Tyumen  
n.e.aktaev@utmn.ru; ORCID: 0000-0002-9750-2183

<sup>2</sup> Assistant, Department of Record Management  
and Document Management Support, University of Tyumen  
t.a.penkina@utmn.ru

**Abstract**

This paper presents a mathematical model of an air steam flow arising above a locally heated water surface. The model is based on the system of equations of free convection in the Boussinesq approximation and is implemented as a computer program in C language. Numerical simulation aided in obtaining the velocity fields of the jet are obtained at various values of the water surface temperature. The values of the flow velocities obtained in the framework of the Stokes approximation are compared with the calculated values based on the results of experiments on the levitation of water droplets. As a result of the comparison, the condition of the applicability of the approximation of Stokes to estimate the velocity of an air steam flow is formulated.

---

\* The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) in the framework of the scientific project No. 18-38-00232 mol\_a.

---

**Citation:** Aktaev N. E., Penkina T. A. 2020. “Applicability of the approximation of Stokes for calculating the velocity of a steam-air jet over a locally heated water surface”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 6, no. 1 (21), pp. 166-175.

DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-1-166-175

**Keywords**

Navier — Stokes equations, Boussinesq approximation, air steam flow, microdroplets of water.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-1-166-175**

**REFERENCES**

1. Agresti J. J., Antipov E., Abate A. R., Ahn K., Rowat A. C., Baret J. C., Marquez M., Klibanov A. M., Griffiths A. D., Weitz D. A. 2010. "Ultrahigh-throughput screening in drop-based microfluidics for directed evolution". *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 107, no. 9, pp. 4004-4009.
2. Aktaev N. E., Fedorets A. A., Bormashenko E. Y., Nosonovsky M. 2018. "Langevin approach to modeling of small levitating ordered droplet clusters". *Journal of Physical Chemistry Letters*, vol. 9, no. 14, pp. 3834-3838.
3. Chowdhury M. S., Zheng W., Kumari S., Heyman J., Zhang X., Dey P., Weitz D. A., Haag R. 2019. "Dendronized fluorosurfactant for highly stable water-in-fluorinated oil emulsions with minimal inter-droplet transfer of small molecules". *Nature Communications*, vol. 10, no. 1, art. 4546.
4. Fedorets A. A., Dombrovsky L. A. 2017. "Generation of levitating droplet clusters above the locally heated water surface: a thermal analysis of modified installation". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 104, pp. 1268-1274.
5. Fedorets A. A. 2012. "Mechanism of stabilization of location of a droplet cluster above the liquid-gas interface". *Technical Physics Letters*, vol. 38, no. 11, pp. 988-990.
6. Fedorets A. A., Aktaev N. E., Gabyshev D. N., Bormashenko E. Yu., Dombrovsky L. A., Nosonovsky M. 2019. "Oscillatory motion of a droplet cluster". *Journal of Physical Chemistry*, vol. 123, pp. 23572-23576.
7. Fedorets A. A., Aktaev N. E., Dombrovsky L. A. 2018. "Suppression of the condensational growth of droplets of a levitating cluster using the modulation of the laser heating power". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 127, pp. 660-664.
8. Jiao L., Chen R., Zhu X., Liao Q., Wang H., An L., Zhu J., He X., Feng H. 2019. "Highly flexible and ultraprecise manipulation of light-levitated femtoliter/picoliter droplets". *Journal of Physical Chemistry Letters*, vol. 10, no. 5, pp. 1068-1077.
9. Kabov O. A., Lyulin Yu. V., Marchuk I. V., Zaitsev D. V. 2007. "Locally heated shear-driven liquid films in microchannels and minichannels". *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 28, no. 1, pp. 103-111.
10. Nightingale A. M., Leong C. L., Burnish R. A., Hassan S. U., Zhang Y., Clough G. F., Boutelle M. G., Voegeli D., Niu X. 2019. "Monitoring biomolecule concentrations in tissue using a wearable droplet microfluidic-based sensor". *Nature Communications*, vol. 10, no. 1, art. 2741.
11. Scheeline A., Behrens R. L. 2012 "Potential of levitated drops to serve as microreactors for biophysical measurements". *Biophysical Chemistry*, vols. 165-166, pp. 1-12.
12. Song H., Tice J. D., Ismagilov R. F. 2003. "A Microfluidic system for controlling reaction networks in time". *Angewandte Chemie*, vol. 42, no. 7, pp. 768-772.
13. Stone H. A., Stroock A. D., Ajdari A. 2004. "Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip". *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 36, pp. 381-411.