

## Численное исследование механической устойчивости течения в условиях естественной конвекции

Павел Иванович Томчик<sup>✉</sup>, Павел Тихонович Зубков,  
Анатолий Александрович Кислицын

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
Контакт для переписки: [p.i.tomchik@utmn.ru](mailto:p.i.tomchik@utmn.ru)<sup>✉</sup>

**Аннотация.** Изучение устойчивости естественной конвекции актуально во многих областях современной науки: астрофизике, метеорологии, теплофизике, ядерной энергетике, машинном обучении и др. Одним из направлений исследований в данной области является численное моделирование конвекции в моменты изменений режима течения жидкости или газа. В статье выполнено детальное моделирование одно- и двухвихревых режимов течения несжимаемой жидкости в квадратной области с разбиением расчетной сеткой с четным и нечетным числом узлов. Про моделированы переходы между этими режимами течения при внесении возмущения в определенные узлы сетки. В начальный момент времени жидкость находится в состоянии покоя. С течением времени в процессе передачи тепла от горячей стороны квадратной области начинается естественная конвекция жидкости, при определенных условиях принимающая форму одного или нескольких вихрей ламинарного течения. В ходе исследования с точки зрения механической устойчивости наблюдался эффект перехода от двухвихревого к одновихревому течению при внесении в начальный момент времени источника возмущения в виде кратного повышения температуры. В работе использована математическая модель естественной конвекции в приближении Буссинеска. Расчеты выполнялись до выхода на стационарный режим течения. Результаты моделирования, полученные для расчетных сеток  $20 \times 20$  и  $21 \times 21$  контрольных объемов представлены на графиках в виде полей давления и температуры, проекций скорости на оси координат, а также в виде изображений линий тока.

**Ключевые слова:** естественная конвекция, численные методы, алгоритм SIMPLER, математическая модель, приближение Буссинеска, механическая устойчивость

**Цитирование:** Томчик П. И., Зубков П. Т., Кислицын А. А. 2024. Численное исследование механической устойчивости течения в условиях естественной конвекции // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 10. № 3 (39). С. 71–87. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-3-71-87>

Поступила 09.09.2024; одобрена 21.09.2024; принята 02.10.2024

# Numerical study of the mechanical stability of the flow under the conditions of natural convection

Pavel I. Tomchik<sup>✉</sup>, Pavel T. Zubkov<sup>†</sup>, Anatoliy A. Kislitsin

University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: [p.i.tomchik@utmn.ru](mailto:p.i.tomchik@utmn.ru)<sup>✉</sup>

**Abstract.** Studying the stability of natural convection remains relevant in many areas of modern science: astrophysics, meteorology, thermal physics, nuclear power engineering, and machine learning, among others. One of such research areas is numerical modeling of convection during the changes in the flow regime of a liquid or gas. The article presents a detailed modeling of single- and double-vortex flow regimes of an incompressible fluid in a square region divided by a computational grid with an even and odd number of nodes. Transitions between these flow regimes are modeled when a disturbance is introduced into certain grid nodes. At start, the fluid is at rest; over time, during the heat transfer from the hot side of the square region, natural convection of the fluid begins, which forms under of one or more vortices of a laminar flow under certain conditions. The study has shown that as for the mechanical stability, the effect of the transition from a double-vortex to a single-vortex flow was observed when a disturbance source in the form of a multiple increase in temperature was introduced at the start. The authors have used a mathematical model of natural convection in the Boussinesq approximation; the calculations were performed until a steady-state flow regime was reached. The modeling results obtained for computational grids  $20 \times 20$  and  $21 \times 21$  control volumes are presented on graphs as pressure and temperature fields, velocity projections on coordinate axes, and streamline images.

**Keywords:** natural convection, numerical methods, SIMPLER algorithm, mathematical model, Boussinesq approximation, mechanical stability

---

<sup>†</sup> Deceased April 29, 2024.

**Citation:** Tomchik, P. I., Zubkov, P. T., & Kislitsin, A. A. (2024). Numerical study of the mechanical stability of the flow under the conditions of natural convection. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 10(3), 71–87. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-3-71-87>

Received Sep. 9, 2024; Reviewed Sep. 21, 2024; Accepted Oct. 2, 2024

## Введение

Жидкость или газ, находящиеся в поле тяжести, могут сохранять механическое равновесие (т. е. отсутствие макроскопического движения) лишь при определенных условиях, а именно: распределение температуры ( $T$ ) должно быть функцией только одной координаты — высоты  $y$ , в то время как абсолютная величина градиента температуры должна удовлетворять неравенству [Ландау, Лифшиц, 1988]

$$-\frac{dT}{dy} < \frac{g\beta T}{c_p}, \quad (1)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении,  $\beta = [(\partial V/\partial T)_p]/V$  — коэффициент теплового расширения, который считается положительным. Другими словами, для сохранения равновесия необходимо, чтобы градиент температуры был либо направлен так же, как и ось  $y$ , вертикально вверх, либо, если градиент температуры направлен вниз, то его модуль должен быть меньше правой части неравенства (1). В обратном случае устойчивое равновесие невозможно, и в жидкости возникают течения, стремящиеся установить в ней постоянную температуру. Такие течения, обусловленные неоднородным нагревом, носят название *естественной конвекции*, в отличие от *вынужденной конвекции*, которая возникает в результате внешнего механического воздействия (насосов, вентиляторов и т. п.).

Естественная конвекция — самый распространенный вид течений газа и жидкости во Вселенной. Плазма звезд, атмосфера планет, в том числе Земли, находится в состоянии непрерывного конвективного движения, определяет климат и погоду планеты. Важную роль естественная конвекция играет в работе различных теплообменных аппаратов и других технических устройств. Например, в ядерных реакторах на быстрых нейтронах в аварийных режимах роль естественной конвекции становится решающей [Сорокин и др., 2020, 2022, 2024]. В биофизике актуальным направлением исследований являются математические модели термотаксиса [Нгуен-Кван, Аллу, 2019]. В теоретической термо-, газо- и гидродинамике задачи о конвекции дают материал для разработки новых идей, касающихся соотношения порядка и хаоса в структуре и поведении гидродинамических объектов [Короткий, Литвиненко, 2018; Маликов, Наврузов, 2024]. В актуальных направлениях развития машинного обучения, искусственного интеллекта и нейросетей эти задачи также могут найти применение в качестве обучающих и тестовых наборов данных. Таким образом, моделирование естественной конвекции и исследование ее особенностей актуально во многих областях современной науки.

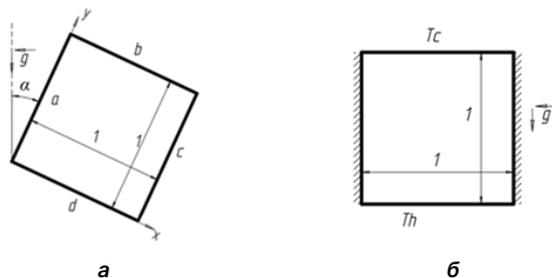
Впервые постановка задачи о конвекции в линейном приближении была сформулирована Рэлеем в 1916 г. За сто с небольшим лет, прошедших с этого времени, достигнуты, конечно, огромные успехи в изучении и моделировании этого явления. Главные достижения последнего десятилетия относятся к решению конкретных прикладных задач, полученных в основном численными методами. Однако теория устойчивости в гидродинамике и, в частности, естественной конвекции до сих пор не завершена, т. к. исследования в этой области сталкиваются с большими математическими трудностями.

Часто предметом изучения оказывается конвекция в плоском горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу, которую исторически не совсем правильно называют конвекцией Рэля — Бенара. В настоящее время установлено, что экспериментатор Бенар наблюдал явление, в котором главную роль играла температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения; сейчас этот вид конвекции называют *термокапиллярной конвекцией Бенара — Марангони* [Кислицын, Федорец, 2008]. В свою очередь, теоретик Рэлей рассматривал конвекцию, вызванную зависимостью плотности жидкости от температуры; различие этих механизмов проявляется в разной структуре течений [Гетлинг, 1991]. В данной статье рассмотрена конвекция, обусловленная рэлеевским механизмом.

Целью работы является изучение динамики развития вихрей после кратковременного возмущения температурного поля, произошедшего в некоторый момент времени. С практической точки зрения целью этих исследований является проверка возможности управления режимами стационарного конвективного течения, их формированием и сохранением устойчивости.

## Постановка задачи

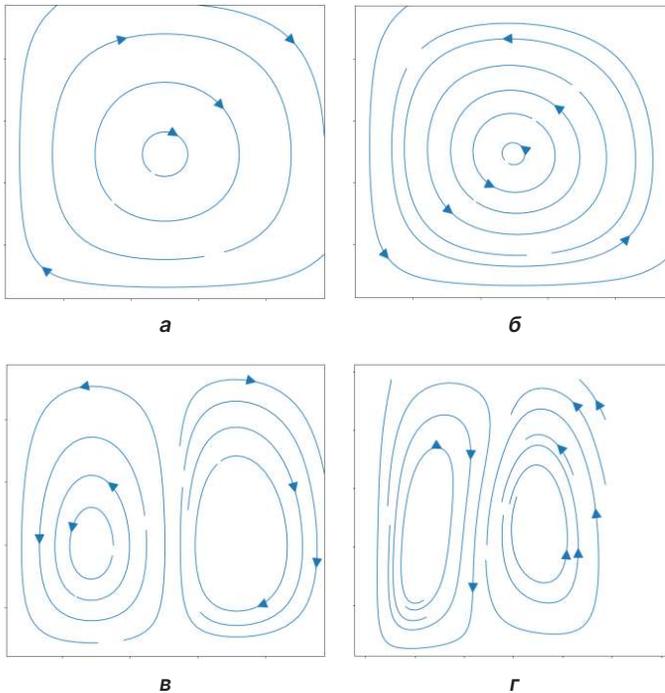
Рассматривается конвективное движение несжимаемой жидкости в квадратной области  $x, y$  с теплоизолированными боковыми стенками. Размер стороны квадрата обозначен буквой  $L$  и принят за единицу длины; в направлении третьей координаты область не ограничена. Сила тяжести направлена вертикально вниз, а ось  $y$  — вертикально вверх (рис. 1б). Все теплофизические параметры жидкости предполагаются постоянными.



**Рис. 1.** Изучаемая область: а — общая формулировка; б — задача естественной конвекции в квадратной области с адиабатическими боковыми стенками, угол  $\alpha = 0$

**Fig. 1.** The study area: а — the general statement; б — the problem of natural convection in a square area with adiabatic side walls, angle  $\alpha = 0$

В исходном состоянии жидкость неподвижна, а ее температура в области моделирования всюду постоянна и равна  $T_c$ . В начальный момент времени температура нижней стенки («дна») быстро («скачком») устанавливается равной  $T_h > T_c$  и затем поддерживается на этом уровне, а температура верхней стенки («крышки») остается более холодной и также поддерживается постоянной на прежнем уровне  $T_c$ . Внутри квадратной области начинается прогрев жидкости, в некоторый момент времени условие равновесия (1) нарушается, и начинается конвекция жидкости. Еще через некоторое время поток тепла от нижней стенки к верхней достигает стационарного значения, а линии тока конвективного течения приобретают стационарную форму в виде одного или нескольких вихрей. В качестве примера линии тока разнонаправленных одно- и двухвихревых стационарных решений системы уравнений математической модели конвективного движения жидкости в квадратной области показаны на рис. 2.



**Рис. 2.** Линии тока типовых стационарных решений: а, б — разнонаправленные одновихревые течения; в, г — разнонаправленные двухвихревые течения

**Fig. 2.** The current lines of typical stationary solutions: а, б — multidirectional single-vortex flows; в, г — multidirectional two-vortex flows

## Математическая модель

Полная система уравнений, описывающих естественную конвекцию в несжимаемой жидкости, была сформулирована в 1903 г. Буссинеском. Кратко она может быть записана в следующем виде [Ландау, Лифшиц, 1988]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta\mathbf{g}T', \quad (2)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T' = a\Delta T', \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

В этих уравнениях  $a$  — коэффициент теплопроводности жидкости,  $t$  — текущее время,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения жидкости,  $T'$  и  $p'$  — отклонение температуры и давления от значений, соответствующих механическому равновесию,  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости,  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения (векторы выделены жирным шрифтом).

Уравнение (2) получено из уравнения Навье — Стокса в предположении, что отклонения температуры и давления жидкости мало отличаются от значений, соответствующих механическому равновесию, и поэтому членами, содержащими произведения  $T'$  и  $p'$ , можно пренебречь как величинами второго порядка малости. Уравнение (3) получено из уравнения теплопроводности в движущейся среде с учетом того, что при естественной конвекции тепловыделением вязкого трения по сравнению с другими членами уравнения можно пренебречь. Уравнение (4) — это уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости. При естественной конвекции изменением плотности жидкости из-за изменения давления можно пренебречь по сравнению с тепловым расширением, поэтому жидкость можно считать несжимаемой.

Для стационарного движения система уравнений (2)–(4) принимает вид:

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p'}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta\mathbf{g}T', \quad (5)$$

$$\mathbf{v}\nabla T' = a\Delta T', \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (7)$$

Важнейшим предметом исследований в данной постановке является устойчивость стационарного течения и величина установившегося теплового потока. В качестве признака адекватности [Башев, 2018] данной модели выбрана потенциальная энергия. По результатам ранее проведенных исследований модели течения в условиях естественной конвекции при различных положениях расчетной области в поле силы тяжести [Сагитов, Шарифулин, 2017, 2018; Вертгейм и др., 2019] установлено, что обладающая большей потенциальной энергией жидкость механически менее устойчива [Зубков и др., 2004а, б]. Наблюдаемый в математической модели эффект перехода между одновихревым и двухвихревым течением позволяет сделать предположение о различной степени механической устойчивости вихрей вследствие различия потенциальной энергии.

В качестве системы дифференциальных уравнений для математического моделирования естественного конвективного течения в произвольно расположенной в поле силы тяжести квадратной области (общая формулировка рис. 1а) выбрана система

нестационарных уравнений (2)–(4), записанная для проекций  $u$  и  $v$  вектора скорости  $\mathbf{v}$  на оси  $x$  и  $y$  соответственно [Зубков и др., 2004а, б, 2007; Kanashina и др., 2004]:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0 u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_0 v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \rho_0 g [1 - \beta(T - T_0)] \sin(\alpha), \\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_0 u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho_0 v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \\ &- \rho_0 g [1 - \beta(T - T_0)] \cos(\alpha), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

где для зависимости плотности от температуры использовано линейное приближение:  $\rho = \rho_0 (1 - \beta(T - T_0))$ ,  $\rho_0 = \text{const}$  — начальное значение плотности,  $\beta = \text{const} = (-1/\rho)(\partial\rho/\partial T)_p$  — коэффициент объемного теплового расширения,  $T_0$  — средняя температура стенок квадратной области.

Моделирование выполнялось для значения угла  $\alpha = 0$ , средняя температура стенок ( $T_0$ ) определялась как среднее арифметическое постоянных температур верхней и нижней стенки квадратной области [Зубков, Нарыгин, 2018]:

$$T_0 = \frac{T_h + T_c}{2}, \quad T_h > T_c. \quad (9)$$

Система уравнений (8) была приведена к безразмерному виду:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \text{Gr} \cdot \Theta \cdot \sin \alpha, \quad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \text{Gr} \cdot \Theta \cdot \cos \alpha, \quad (11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right), \quad (13)$$

где  $U = u/\bar{v}$ ,  $V = v/\bar{v}$  — безразмерные проекции скорости  $\mathbf{v}$  на оси  $x$  и  $y$  соответственно,  $X = x/L$ ,  $Y = y/L$  — безразмерные координаты  $x$  и  $y$ ,  $\Theta = (T - T_c)/(T_h - T_c)$  — безразмерная температура,  $\bar{p} = (p + \rho_0 g(x \sin \alpha + y \cos \alpha))/\rho_0 \bar{v}^2$  — безразмерное давление,  $\tau = t/\bar{\tau}$  — безразмерное время, а в качестве характерных параметров взяты следующие величины:  $L$  — характерная длина (сторона квадрата области моделирования),  $(T_h - T_c)$  — характерная температура,  $\rho_0 \bar{v}^2$  — характерное давление,  $\bar{\tau} = L^2/\nu$  — характерное время (время, за которое скачок  $y$ -компонента скорости  $v$  распространяется за счет вязкого трения на расстояние  $L$  в перпендикулярном направлении, т. е. по оси  $x$ ),  $\bar{v} = L/\bar{\tau} = \nu/L$  — характерная скорость (средняя скорость, с которой за счет вязкого трения движется скачок скорости в перпендикулярном направлении).

Начальные и граничные условия поставленной задачи имеют вид:

$$\text{При } \tau = 0: \quad \theta = 1, \quad U = V = 0, \quad (14)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{При } X = 0: \\ \text{При } X = 1: \\ \text{При } Y = 0: \\ \text{При } Y = 1: \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \\ \theta = 1 \\ \theta = 1 \\ \theta = 0 \end{array} \right\} U = V = 0. \quad (15)$$

В систему уравнений (10)–(13) входят два безразмерных параметра — число Прандтля ( $Pr$ ) и число Грасгофа ( $Gr$ ):

$$Pr = \frac{\nu}{a}, \quad (16)$$

$$Gr = \frac{g\beta(T_h - T_c)L^3}{\nu^2}, \quad (17)$$

поэтому результат решения задач естественной конвекции выражается через эти два числа. Два течения подобны, если их значения  $Pr$  и  $Gr$  одинаковы [Ландау, Лифшиц, 1988].

Число Прандтля (отношение кинематической вязкости жидкости к коэффициенту ее температуропроводности) — это свойство вещества жидкости, табличное значение. Основной характеристикой естественной конвекции является число Грасгофа. При этом многочисленные исследования показывают, что очень часто результат может быть выражен через произведение этих чисел. Поэтому для краткости это произведение часто обозначают как новый безразмерный параметр, который называется числом Рэлея ( $Ra$ ):

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g\beta(T_h - T_c)L^3}{\nu \cdot a}. \quad (18)$$

Расчеты выполнялись численным методом контрольных объемов в соответствии с каноническим алгоритмом SIMPLER [Патанкар, 1984; Нарыгин, Зубков, 2023], исходный код программ адаптирован для компилятора GNU Fortran. Адекватность адаптированного программного кода подтверждена тестовым решением системы уравнений математической модели конвективного течения. Результаты тестовых расчетов линий тока типовых стационарных решений приведены выше на рис. 2.

Для получения дискретного аналога уравнение непрерывности умножено на  $\theta$  и просуммировано с уравнением энергии:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \Big| \times \theta, \quad \theta \frac{\partial U}{\partial X} + \theta \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \left( U \frac{\partial \theta}{\partial X} + \theta \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \left( V \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \theta \frac{\partial V}{\partial Y} \right) - \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \left( \frac{\partial(U\theta)}{\partial X} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right) + \left( \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X} \left( U\theta - \frac{1}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( V\theta - \frac{1}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = 0. \quad (22)$$

Дискретный аналог уравнений (19)–(22) для произвольного контрольного объема (рис. 3) в таком случае имеет следующий вид:

$$\frac{(\theta_p - \theta_p^0) \delta X \delta Y}{\delta \tau} + J_e - J_w + J_n - J_s = 0,$$

где 
$$J_e = \int_0^{\delta Y} J_x dY, \quad J_w = \int_0^{\delta Y} J_x dY, \quad J_n = \int_0^{\delta X} J_y dX, \quad J_s = \int_0^{\delta X} J_y dX$$

являются суммарными потоками через грани  $e, w, n$  и  $s$  контрольного объема (рис. 3).

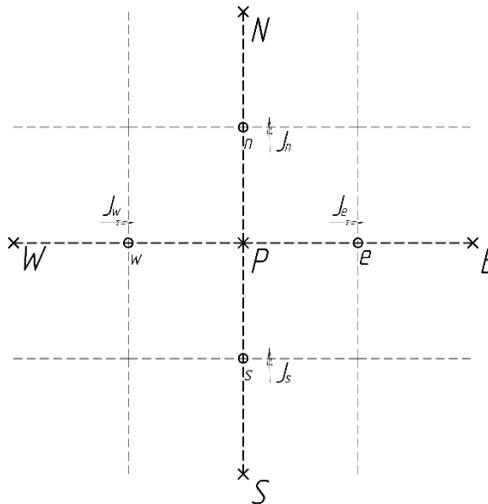


Рис. 3. Произвольный контрольный объем

Fig. 3. A random control volume

Профиль конвективно-диффузионных потоков [Патанкар, 1984]

$$J_x = U\theta - \frac{1}{Pr} \frac{d\theta}{dX}, \quad J_y = V\theta - \frac{1}{Pr} \frac{d\theta}{dY} \quad (23)$$

аппроксимирован степенной интерполяцией точного решения уравнений

$$\frac{d}{dX} \left( U\theta - \frac{1}{Pr} \frac{d\theta}{dX} \right) = 0, \quad \frac{d}{dY} \left( V\theta - \frac{1}{Pr} \frac{d\theta}{dY} \right) = 0.$$

Из уравнения непрерывности системы уравнений (8) следует, что  $U, V = \text{const}$ , и уравнения принимают вид

$$\frac{d}{dX} \left( \theta - \frac{1}{Pe_x} \frac{d\theta}{dX} \right) = 0, \quad \frac{d}{dY} \left( \theta - \frac{1}{Pe_y} \frac{d\theta}{dY} \right) = 0, \quad (24)$$

где  $Pe_x = U \cdot Pr = uL/a$  и  $Pe_y = V \cdot Pr = vL/a$  — числа Пекле.

Точное решение уравнений (24) для следующих граничных условий

$$\begin{aligned} X = 0, \quad Y = 0 : \theta &= \theta_0 \\ X = 1, \quad Y = 1 : \theta &= \theta_1 \end{aligned}$$

имеет вид

$$\frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} = \frac{\exp(Pe_x \cdot X) - 1}{\exp(Pe_x) - 1}, \quad \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} = \frac{\exp(Pe_y \cdot Y) - 1}{\exp(Pe_y) - 1}. \quad (25)$$

Заменяя  $\theta_0, \theta_1$  на соответствующие граниям контрольного объема  $\theta_E, \theta_W, \theta_N, \theta_S$  и  $\theta_P$  в точном решении (25) и подставляя его в уравнения (23), получим соответствующие выражения суммарных потоков:

$$\begin{aligned} J_w &= \theta_W - \frac{\theta_P - \theta_W}{\exp(Pe_w) - 1}, \quad J_e = \theta_P - \frac{\theta_E - \theta_P}{\exp(Pe_e) - 1}, \\ J_s &= \theta_S - \frac{\theta_P - \theta_S}{\exp(Pe_s) - 1}, \quad J_n = \theta_P - \frac{\theta_N - \theta_P}{\exp(Pe_n) - 1} \end{aligned}$$

где  $Pe_w, Pe_e, Pe_s, Pe_n$  — числа Пекле для граней  $w, e, s$  и  $n$  соответственно.

Подставляя полученные выражения в уравнение дискретного аналога и приводя подобные, получим

$$\begin{aligned} a_P \cdot \theta_P &= a_E \cdot \theta_E + a_W \cdot \theta_W + a_N \cdot \theta_N + a_S \cdot \theta_S + a_P^0 \cdot \theta_P^0, \\ \text{где} \quad a_P^0 &= \frac{\delta X \delta Y}{\delta \tau}, \quad a_E = \frac{1}{\exp(Pe_e) - 1}, \quad a_W = \frac{\exp(Pe_w)}{\exp(Pe_w) - 1}, \\ a_N &= \frac{1}{\exp(Pe_n) - 1}, \quad a_S = \frac{\exp(Pe_s)}{\exp(Pe_s) - 1}, \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0. \end{aligned}$$

Аналогично определены дискретные аналоги прочих уравнений системы (10)–(13).

## Результаты моделирования

Моделирование выполнялось в два этапа. Вначале в покоящуюся жидкость в один из контрольных объемов вносилось возмущение, начиналась конвекция, и моделирование продолжалось от момента внесения возмущения до выхода на одно- или двухвихревой режим течения. Далее в этот установившийся режим вновь вносилось возмущение, и наблюдались переходы между этими режимами также от момента внесения возмущения до выхода на стационарный режим.

Результаты первого этапа моделирования были представлены П. Т. Зубковым, Э. И. Нарыгиным [2018]. Результаты второго этапа публикуются впервые: на рис. 4–9 представлены поля скоростей  $U$  и  $V$ , распределения температуры  $\theta$  и давления  $\bar{p}$ , а также линии тока в различные моменты времени в процессе перехода от двухвихревого режима течения к одновихревому.

На рис. 4–6 представлен переход от двухвихревого течения к одновихревому, который наблюдался на расчетной сетке  $21 \times 21$  при внесении в начальный момент времени возмущения  $\theta = 2$  в контрольный объем с координатами  $(2; 11)$  для значений чисел Прандтля  $Pr = 9,46$  и Грасгофа  $Gr = 400,15$ . Как видно, переход выражался в постепенном увеличении левого вихря и уменьшении правого до полного заполнения левым вихрем расчетной области.

Похожий результат был получен для перехода от двухвихревого течения к одновихревому на расчетной сетке  $20 \times 20$  при внесении в начальный момент времени такого же возмущения  $\theta = 2$  в контрольный объем с почти такими же координатами  $(2; 10)$  и для тех же значений чисел Прандтля  $Pr = 9,46$  и Грасгофа  $Gr = 400,15$ . Первое отличие заключалось в том, что в этом случае переход произошел в 5 раз быстрее (за 1,385 единиц характерного времени вместо 6,925 единиц в предыдущем случае), а второе — этот переход выражался в увеличении правого вихря и уменьшении левого до полного заполнения правым вихрем расчетной области (последовательность рис. 7–9).

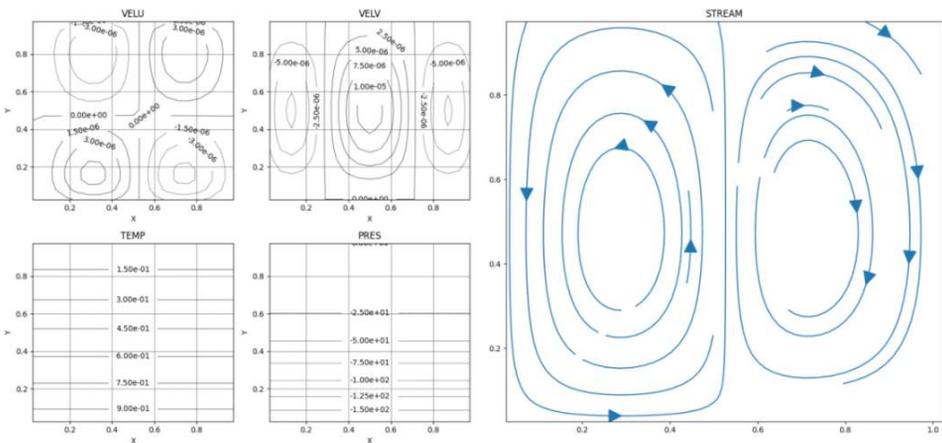
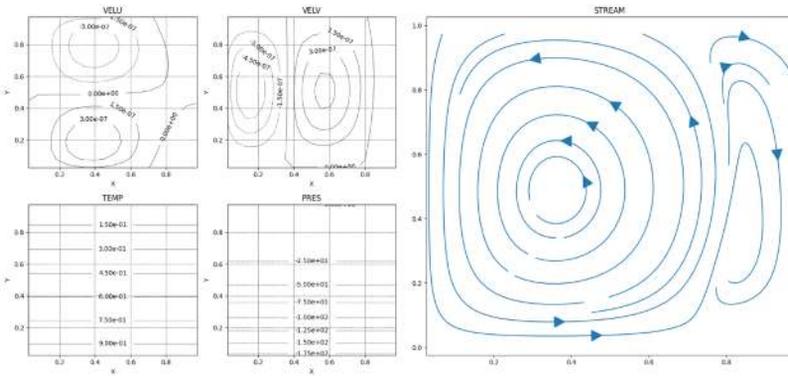


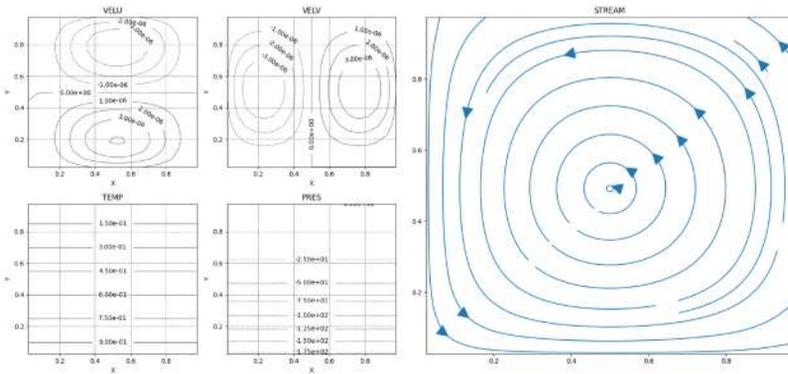
Рис. 4. Двухвихревое течение ( $\tau = 2,9086$ ), расчетная сетка  $21 \times 21$

Fig. 4. The two-vortex flow ( $\tau = 2.9086$ ), computational grid  $21 \times 21$



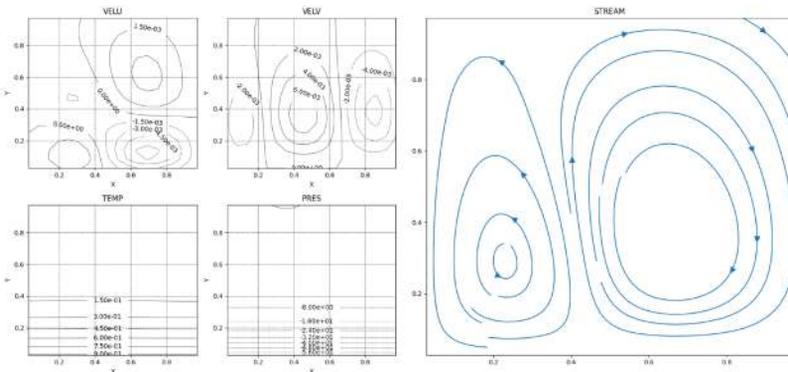
**Рис. 5.** Переход от двухвихревого течения к одновихревому ( $\tau = 4,4321$ ), расчетная сетка  $21 \times 21$

**Fig. 5.** The transition from the two-vortex flow to the single-vortex flow ( $\tau = 4.4321$ ), computational grid  $21 \times 21$



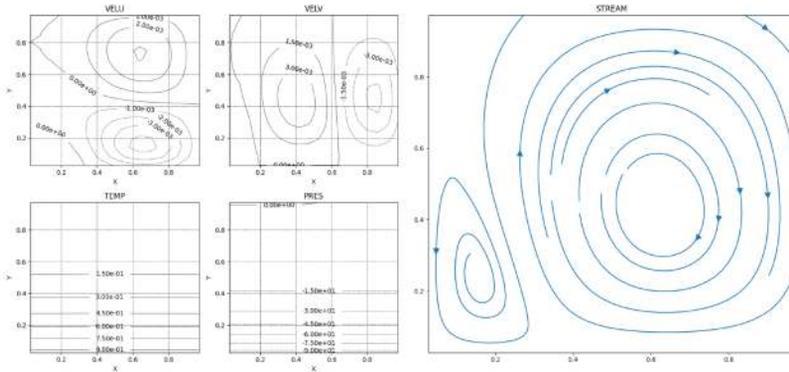
**Рис. 6.** Одновихревое течение ( $\tau = 6,9252$ ), расчетная сетка  $21 \times 21$

**Fig. 6.** The single-vortex flow ( $\tau = 6.9252$ ), computational grid  $21 \times 21$



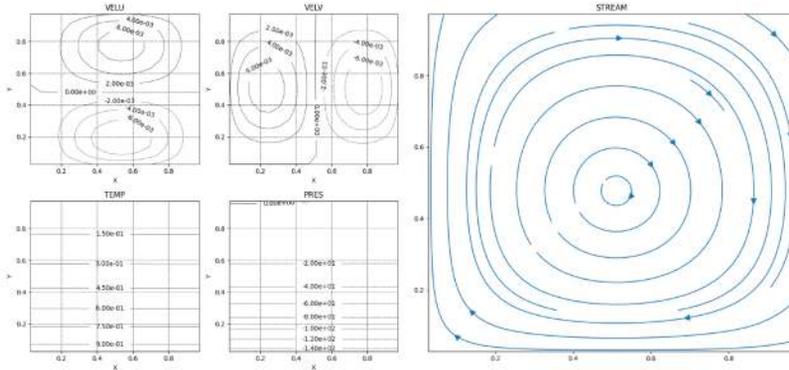
**Рис. 7.** Двухвихревое течение ( $\tau = 0,277$ ), расчетная сетка  $20 \times 20$

**Fig. 7.** The two-vortex flow ( $\tau = 0.277$ ), computational grid  $20 \times 20$



**Рис. 8.** Переход от двухвихревого течения к одновихревому ( $\tau = 0,554$ ), расчетная сетка  $20 \times 20$

**Fig. 8.** The transition from the two-vortex flow to the single-vortex flow ( $\tau = 0.554$ ), computational grid  $20 \times 20$



**Рис. 9.** Одновихревое течение ( $\tau = 1,3850$ ), расчетная сетка  $20 \times 20$

**Fig. 9.** The single-vortex flow ( $\tau = 1.3850$ ), computational grid  $20 \times 20$

Из этих результатов можно сделать следующие выводы:

- Как было отмечено выше, два течения подобны, если их значения  $Pr$  и  $Gr$  одинаковы [Ландау, Лифшиц, 1988]. Таким образом, можно утверждать, что для всех случаев естественной конвекции несжимаемой жидкости в квадратной области с теплоизолированными боковыми стенками с числами  $Pr = 9,46$  и  $Gr = 400,15$  одновихревой режим естественной конвекции энергетически выгоднее, чем двухвихревой.
- Причина того, что в одном численном эксперименте вся расчетная область заполнилась левым вихрем, а в другом — правым, вероятно, заключается в небольшом различии расчетных сеток, из-за чего в момент внесения возмущения вихри не были вполне симметричными.
- На вопрос, в чем причина пятикратной разницы во времени перехода, ответа пока нет, он должен быть получен в результате дальнейших исследований.

## Заключение

Приведен краткий обзор исследований и кратко описано современное состояние моделирования механической устойчивости естественной конвекции.

Сформулирована замкнутая система уравнений в безразмерных переменных, описывающих естественную конвекцию в приближении Буссинеска.

Исходный код программного пакета SIMPLER, основанный на методе контрольного объема, адаптирован для компилятора GNU Fortran. Адекватность кода подтверждена необходимыми тестовыми расчетами.

Выполнено детальное моделирование естественной конвекции несжимаемой жидкости в квадратной области на расчетных сетках с четным и нечетным числом узлов, начиная с момента внесения возмущения и заканчивая выходом на стационарный режим течения.

Промоделированы переходы между двухвихревым и одновихревым режимом течения при внесении возмущения в определенные узлы сетки. Результаты моделирования представлены на графиках в виде полей давления и температуры, проекций скорости на оси координат, а также в виде изображений линий тока. Впервые установлено, что для естественной конвекции несжимаемой жидкости в квадратной области с теплоизолированными боковыми стенками со значениями  $Pr = 9,46$  и  $Gr = 400,15$  одновихревой режим естественной конвекции энергетически выгоднее, чем двухвихревой.

Проведенные исследования позволят в будущем исследовать зависимости механической устойчивости вихрей от их потенциальной энергии.

## Список источников

- Башев А. А. 2018. О выборе математических моделей, идентификации и адекватности динамических систем // Актуальные проблемы электроэнергетики: сб. ст. / отв. ред. А. Б. Дарьенков. Нижний Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р. Е. Алексеева. С. 66–69.
- Вертгейм И. И., Сагитов Р. В., Шарифулин А. Н. 2019. Устойчивость и бифуркации стационарных режимов двумерного дwoякопериодического течения вязкой несжимаемой жидкости // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. тр. в 4 т. Уфа: Башкирский государственный университет. Том 2. С. 524–526.
- Гетлинг А. В. 1991. Формирование пространственных структур конвекции Рэлея — Бенара // Успехи физических наук. Том 161. № 9. С. 1–80. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0161.199109a.0001>
- Зубков П. Т., Канашина М. В., Калабин Е. В. 2004а. Процесс переноса тепла естественной конвекцией в квадратной полости, температура одной из стенок которой изменяется по синусоидальному закону // Теплофизика высоких температур. Том 42. № 1. С. 118–124.
- Зубков П. Т., Канашина М. В., Калабин Е. В. 2004б. Свободноконвективный перенос тепла в квадратной полости при периодическом изменении температуры одной из стенок // Доклады Академии наук. Том 397. № 3. С. 334–336.
- Зубков П. Т., Канашина М. В., Тарасова Е. Н. 2007. Явление гистерезиса в двумерной и трехмерной задачах естественной конвекции // Известия Российской академии наук. Энергетика. № 2. С. 106–110.

- Зубков П. Т., Нарыгин Э. И. 2018. Естественно конвективный перенос тепла при наличии вязкой диссипации в квадратной области // Труды 7-й Российской национальной конференции по теплообмену: в 3 т. (22–26 октября 2018 г, Москва). М.: Издательский дом МЭИ. Том 1. С. 323–326.
- Кислицын А. А., Федорев А. А. 2008. Термокапиллярные и концентрационнокапиллярные течения в тонких слоях жидкости: науч. монография. Тюмень: Изд-во Тюмен. гос. ун-та. 174 с.
- Короткий А. И., Литвиненко А. Л. 2018. Разрешимость одной смешанной краевой задачи для стационарной модели реакции-конвекции-диффузии // Труды института математики и механики УрО РАН. Том 24. № 1. С. 106–120. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-106-120>
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. 1988. Теоретическая физика: в 10 т. / отв. ред. Л. П. Питаевский. Том 6: Гидродинамика. М.: Наука. 736 с.
- Маликов З. М., Наврузов Д. П. 2024. Моделирование турбулентной естественной конвекции на основе 2-жидкостного подхода // Вычислительная механика сплошных сред. Том 17. № 1. С. 111–118. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2024.17.1.10>
- Нарыгин Э. И., Зубков П. Т. 2023. Модель естественной конвекции в кольцевом канале с подвижной внутренней границей // Вестник Башкирского университета. Том 28. № 2. С. 131–136.
- Нгуен-Кван Т., Аллу З. 2019. Особенности термотаксиса в жидкой среде // Российский журнал биомеханики. Том 23. № 1. С. 88–103.
- Патанкар С. В. 1984. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / пер. с англ. под ред. В. Д. Виленского. М. Энергоатомиздат. 150 с.
- Сагитов Р. В., Шарифулин А. Н. 2017. Устойчивость стационарных режимов конвективных течений в наклоненной прямоугольной полости // Неравновесные процессы в сплошных средах: материалы междунар. симп.: в 2 т. Пермь: Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Том 2. С. 178–180.
- Сагитов Р. В., Шарифулин А. Н. 2018. Бифуркации и устойчивость стационарных режимов конвективных течений в наклоненной прямоугольной полости // Вычислительная механика сплошных сред. Том 11. № 2. С. 185–201. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.2.15>
- Сорокин А. П., Денисова Н. А., Иванов Е. Ф., Кузина Ю. А., Низовцев А. А., Привезенцев В. В., Сорокин Г. А. 2020. Экспериментальные и расчетные исследования теплообмена при кипении жидких металлов на моделях ТВС быстрых реакторов в аварийных режимах // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-реакторные константы. № 2. С. 150–172.
- Сорокин А. П., Кузина Ю. А., Денисова Н. А., Сорокин Г. А. 2022. Моделирование процесса кипения жидких металлов в модельных сборках быстрых реакторов в аварийных режимах // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-реакторные константы. № 2. С. 204–220.
- Сорокин А. П., Кузина Ю. А., Денисова Н. А., Сорокин Г. А. 2024. Обобщение результатов экспериментального и численного моделирования кипения щелочных жидких металлов в активной зоне быстрых реакторов (картограмма режимов, теплоотдача) // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-реакторные константы. № 1. С. 154–178.
- Kanashina M. V., Zubkov P. T., Kalabin E. V. 2004. Natural convective heat transfer in a square cavity with time-varying sidewall temperature // СНТ-04 — Advances in Computational Heat Transfer III. Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Symposium. <https://doi.org/10.1615/ICHMT.2004.CHT-04.740>

## References

- Bashev, A. A. (2018). On the choice of mathematical models, identification and adequacy of dynamic systems. In A. B. Darienkov (Ed.), *Actual Problems of Electric Power Engineering* (pp. 66–69). Nizhny Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev. [In Russian]
- Vertgeim, I. I., Sagitov, R. V., & Sharifulin, A. N. (2019). Stability and bifurcations of stationary regimes of a two-dimensional doubly periodic flow of a viscous incompressible fluid. In *Proceedings of 12<sup>th</sup> All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics* (Vol. 2, pp. 524–526). Bashkir State University. [In Russian]
- Getling, A. V. (1991). Formation of spatial structures in Rayleigh–Bénard convection. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 161(9), 1–80. <https://doi.org/10.3367/UFNR.0161.199109a.0001> [In Russian] (English version: *Soviet Physics Uspekhi*, 34(9), 737–776. <https://doi.org/10.1070/PU1991v034n09ABEH002470>)
- Zubkov, P. T., Kanashina, M. V., & Kalabin, E. V. (2004a). The process of heat transfer by natural convection in a square enclosure the temperature of one of whose walls varies by sine law. *Teplofizika vysokikh nauk*, 42(1), 118–124. [In Russian] (English version: *High Temperature*, 42(1), 119–125. <https://doi.org/10.1023/B:HITE.0000020099.21583.0e>)
- Zubkov, P. T., Kanashina, M. V., & Kalabin, E. V. (2004b). Free convective heat transfer in a square cavity with periodic temperature variation on one of the walls. *Doklady Akademii nauk*, 397(3), 334–336. [In Russian] (English version: *Doklady Physics*, 49(7), 426–427. <https://doi.org/10.1134/1.1784858>)
- Zubkov, P. T., Kanashina, M. V., & Tarasova, E. N. (2007). The phenomena of hysteresis in 2D- and 3D- problems of natural convection. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Energetika*, (2), 106–110. [In Russian]
- Zubkov, P. T., & Narygin, E. I. (2018). Naturally convective heat transfer in the presence of viscous dissipation in the square region. *Proceedings of the 7<sup>th</sup> Russian National Conference on Heat Transfer* (Vol. 1, pp. 323–326). MPEI Publishing House. [In Russian]
- Kislitsin, A. A., & Fedorets, A. A. (2008). *Thermocapillary and Concentration-Capillary Flows in Thin Liquid Layers*. University of Tyumen. [In Russian]
- Korotkii, A. I., & Litvinenko, A. L. (2018). Solvability of a mixed boundary value problem for a stationary reaction-convection-diffusion model. *Proceedings of Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS*, 24(1), 106–120. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-106-120> [In Russian]
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1988). *Theoretical Physics* (Vol. 6: Hydrodynamics). Nauka. [In Russian]
- Malikov, Z. M., & Navruzov, D. P. (2024). Modeling of turbulent natural convection based on a two-fluid approach. *Computational Continuum Mechanics*, 17(1), 111–118. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2024.17.1.10> [In Russian]
- Narygin, E. I., & Zubkov, P. T. (2023). A model of natural convection in an annular channel with movable internal border. *Vestnik Bashkirskogo universiteta*, 28(2), 131–136. [In Russian]
- Nguyen-Quang, T., & Alloui, Z. (2019). Thermotaxis pattern in fluid medium. *Russian Journal of Biomechanics*, 23(1), 88–103. [In Russian]
- Patankar, S. V. (1984). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* (V. D. Vilenky, Trans.). Energoatomizdat. [In Russian] (Originally published in 1980 by McGraw-Hill)
- Sagitov, R. V., & Sharifulin, A. N. (2017). Stability of stationary modes of convective flows in an inclined rectangular cavity. In *Nonequilibrium Processes in Continuous Media* (Vol. 2, pp. 178–180). Perm State National Research University. [In Russian]

- Sagitov, R. V., & Sharifulin, A. N. (2018). Bifurcations and stability of steady regimes of convective flows in an inclined rectangular cavity. *Computational Continuum Mechanics*, 11(2), 185–201. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.2.15> [In Russian]
- Sorokin, A. P., Ivanov, Eu. F., Kuzina, Ju. A., Denisova, N. A., Nizovtsev, A. A., Privezentsev, V. V., & Sorokin, G. A. (2020). Experimental and computational studies of the boiling process of liquid metal during the development of an accident in a fast reactor: heat transfer and circulation stability. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear and Reactor Constants*, (2), 150–172. [In Russian]
- Sorokin, A. P., Kuzina, Yu. A., Denisova, N. A., & Sorokin, G. A. (2022). Simulation of the boiling process of liquid metals in model assemblies of fast reactors in accident regimes. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear and Reactor Constants*, (2), 204–220. [In Russian]
- Sorokin, A. P., Kuzina, Yu. A., Denisova, N. A., & Sorokin, G. A. (2024). Generalization of the results of experimental and numerical simulation of boiling of alkaline liquid metals in the core of fast reactors (cartogram of two-phase flow regimes, heat transfer). *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear and Reactor Constants*, (1), 154–178. [In Russian]
- Kanashina, M. V., Zubkov, P. T., & Kalabin, E. V. (2004). Natural convective heat transfer in a square cavity with time-varying sidewall temperature. In *CHT-04 — Advances in Computational Heat Transfer III. Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Symposium*. Begel House Inc. <https://doi.org/10.1615/ICHMT.2004.CHT-04.740>

## Информация об авторах

Павел Иванович Томчик, аспирант кафедры фундаментальной математики и механики, Школа компьютерных наук, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
[p.i.tomchik@utmn.ru](mailto:p.i.tomchik@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0001-6960-4097>

Павел Тихонович Зубков, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики и механики, Школа компьютерных наук, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

Анатолий Александрович Кислицын, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной и технической физики, Школа естественных наук, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
[a.a.kislitsyn@utmn.ru](mailto:a.a.kislitsyn@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3863-0510>

## Information about the authors

Pavel I. Tomchik, Postgraduate Student, Department of Fundamental Mathematics and Mechanics, School of Computer Sciences, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[p.i.tomchik@utmn.ru](mailto:p.i.tomchik@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0001-6960-4097>

Pavel T. Zubkov (Deceased April 29, 2024.), Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Fundamental Mathematics and Mechanics, School of Computer Sciences, University of Tyumen, Tyumen, Russia

Anatoliy A. Kislitsin, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Applied and Technical Physics, School of Natural Sciences, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[a.a.kislitsyn@utmn.ru](mailto:a.a.kislitsyn@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3863-0510>