

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

Андрей Гарьевич ПЛАВНИК<sup>1</sup>

УДК 004.94+519.652:550.8

## **ВОССТАНОВЛЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ВАРИАЦИОННО-СЕТОЧНОМ МЕТОДЕ ГЕОКАРТИРОВАНИЯ\***

<sup>1</sup> доктор технических наук, главный научный сотрудник,  
Западно-Сибирский филиал Института нефтегазовой геологии  
и геофизики им. А. А. Трофимука Сибирского отделения РАН (г. Тюмень);  
профессор кафедры геологии месторождений нефти и газа,  
Тюменский индустриальный университет  
plavnikag@ipgg.sbras.ru

### **Аннотация**

Многообразие свойств геологических объектов и природы их формирования определяет наличие и использование большого числа различных методов картирования,

---

\* Работа выполнена при поддержке проекта ФНИ (№ 0331-2019-0024).

---

**Цитирование:** Плавник А. Г. Восстановление модельных условий для периодических решений в вариационно-сеточном методе геокартирования / А. Г. Плавник // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Том 5. № 2. С. 105-123.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-2-105-123

а также необходимость выбора методов, наиболее подходящих для каждого конкретного набора данных.

Проблема заключается в том, что прогностические свойства результатов зависят от соответствия или несоответствия используемых в методах картирования модельных условий реальным закономерностям. Один из способов состоит в картировании по обучающим данным с последующим сопоставлением прогнозных свойств построенных карт по экзаменационным данным. Такой подход требует многовариантных, затратных в вычислительном отношении расчетов.

В этих условиях актуальными в развитии методов геокартирования являются вопросы определения по наблюдаемым данным адекватных модельных условий.

В данной работе эта задача рассматривается применительно к вариационно-сеточному методу геокартирования. Особенность метода состоит в том, что модельные условия задаются в виде дифференциальных уравнений в частных производных, и для обеспечения однозначности решения необходимо определение двух или более таких уравнений.

В работе предлагается подход, основанный на определении ортогональных гиперплоскостей в многомерном пространстве первых, вторых производных и значений картируемой функции, которые в наибольшей степени согласуются с имеющимися данными. В условиях отсутствия экспериментальных определений значений производных предложен итерационный метод их последовательного уточнения. Метод апробирован на примерах восстановления модельных условий, соответствующих серии периодических решений. Рассмотрено влияние выбора управляющих параметров на сходимость итерационного процесса.

Общий характер математической постановки задачи и возможность оптимизации вычислительной схемы определяют применимость рассмотренного подхода для восстановления модельных условий и в более широком классе функций.

#### **Ключевые слова**

Геокартирование, вариационно-сеточный метод, модельные условия, уравнения в частных производных, гиперплоскость, метод главных компонент.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-2-105-123**

#### **Введение**

Многообразие свойств геологических объектов и природы их формирования, наряду с отсутствием надежных теоретических основ для их моделирования, определяет возможность и необходимость выбора из большого числа существующих методов картирования наиболее подходящих для каждого конкретного набора данных. Один из способов решения этой задачи состоит в реализации различных методов картирования по обучающим данным с последующим сопоставлением прогнозных свойств построенных карт по экзаменационным данным [10, 14, 15, 17, 20 и др.].

При кажущейся простоте такого подхода его применение связано с рядом трудностей, обусловленных неоднозначностью используемого множества сопоставляемых методов картирования (а также применяемых при их реализации управляющих параметров) и неоднозначностью разделения данных на обучающие и контрольные выборки. Это приводит к необходимости проведения многовариантных, затратных в вычислительном отношении расчетов, а чисто эмпирический характер такого подхода снижает возможности содержательного анализа полученных результатов.

Среди существующих методов геокартирования выделяется кригинг [4, 6, 11 и др.], в котором условие минимизации среднеквадратической ошибки картирования реализуется непосредственно. Это достигается за счет предположения о вероятностном характере изменчивости картируемых показателей в пространстве и использования модельных условий в виде функциональных зависимостей между дисперсией разницы значений картируемой поверхности в точках и расстояния между ними. В силу простоты реализации и наличия теоретического обоснования этот подход активно используется на практике при решении задач картирования свойств геологических объектов [1, 3, 5, 12, 13, 16 и др.].

Вместе с тем во многих случаях реальные природные закономерности не могут быть надежно описаны в рамках модельных условий, заложенных в кригинге. Об этом свидетельствуют материалы сопоставления прогностических свойств различных методов в работах [10, 14, 15, 18 и др.], в которых показано, что применение кригинга не гарантирует оптимальность результата.

Отмеченные проблемные вопросы определяют востребованность дальнейшего развития подходов к решению задач, связанных с анализом наблюдаемых данных и выявлением природных закономерностей, в том числе и в рамках модельных условий, реализуемых в других методах геокартирования.

В данной работе эта задача рассматривается применительно к особенностям вариационно-сеточного метода (ВСМ) картирования свойств геологических объектов [8]. Решение задачи геокартирования в этом методе формулируется в достаточно общем виде — может использоваться несколько модельных уравнений в частных производных до второго порядка включительно. С одной стороны, это дает возможность решения широкого круга геологических задач, связанных с картопостроением [7, 9, 19 и др.], но с другой — существенно затрудняет постановку и решение обратной задачи, а именно установление аналитического вида закономерностей, соответствующих наблюдаемым данным.

### **Модельные условия ВСМ и особенности постановки задачи**

Основные элементы вариационно-сеточного метода геокартирования заключаются в следующем [8].

Значения картируемой поверхности аппроксимируются функцией:

$$S(x, y) = \sum_m f_m g_m(x, y),$$

где  $f_m$  — коэффициенты;  $g_m(x, y)$  — базисные функции. Модельные представления и данные о свойствах картируемого показателя описываются в виде глобальных и локальных уравнений достаточно общего вида:

$$L(S) \approx \sum_{k=1}^K \hat{L}_k(G_k).$$

Здесь  $G_k(x, y)$  — известные функции;  $L$  и  $\hat{L}_k$  — линейные дифференциальные операторы:

$$L(S) = b_0^0 S + \sum_{i,j;i+j \neq 0} b_j^i \frac{\partial^{i+j} S}{\partial x^i \partial y^j}.$$

Локальные уравнения, представляющие результаты (и условия) наблюдений в точках  $\{x_m, y_m\}$ , входят в функционал задачи в виде суммы квадратов невязок левой и правой части:

$$\Phi^\alpha = \sum_m \rho_m^\alpha \left( L^\alpha(S) - \sum_{i=1}^I \hat{L}_i^\alpha(G_i) \right)_{x_m, y_m}^2.$$

Для глобальных уравнений, характеризующих модельные условия, используется его интегральный аналог в области картирования  $\Omega$ :

$$\Phi^\beta = \int_{\Omega} \rho^\beta \left( L^\beta(S) - \sum_{i=1}^I \hat{L}_i^\beta(G_i) \right)^2 d\Omega,$$

где  $\rho_m^\alpha$  и  $\rho^\beta$  — весовые коэффициенты.

Решение задачи геокартирования осуществляется на основе минимизации функционала, представляющего собой сумму слагаемых, определяемых используемыми локальными и глобальными уравнениями, количество которых не ограничено. Квадратичность минимизируемого функционала  $\Phi$  относительно неизвестных параметров определяет простоту решения для такого класса задач, которое в конечном итоге сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

В качестве базисных функций нами используются бикубические  $B$ -сплайны на регулярной прямоугольной сетке, что обеспечивает сильную разреженность матрицы системы уравнений, надежность и высокую вычислительную эффективность решения. Гладкость кубических сплайнов до второй производной порядка включительно ограничивает рамки возможного использования дифференциальных операторов также вторым порядком. Как показывает практика, этого достаточно для решения большинства задач геокартирования.

В условиях отсутствия теоретически обоснованных модельных условий наиболее часто применяемыми на практике являются решения с использованием

условий минимума кривизны и минимума поверхности, в которых задача сводится к минимизации функционалов

$$\Phi = \rho \sum_i (S(x_i, y_i) - z_i)^2 + \int_{\Omega} (S_{xx}^2 + 2S_{xy}^2 + S_{yy}^2) dx dy \text{ и}$$

$$\Phi = \rho \sum_{i=1} (S(x_i, y_i) - z_i)^2 + \int_{\Omega} (S_x^2 + S_y^2) dx dy$$

соответственно. Здесь  $z_i$  — значения картируемого параметра в точках  $(x_i, y_i)$ ;  $\rho$  — весовой коэффициент на данные;  $\Omega$  — область картирования; нижние индексы  $S_x, S_{xx}$  и другие обозначают частные производные функции  $S$ .

Вариационно-сеточный метод геокартирования имеет длительную историю развития и практического применения в решении геологических задач (первое монографическое описание метода представлено в работе [2]). Вместе с тем постановка и решение рассматриваемого в данной работе вопроса определения параметров модельных условий ВСМ ранее практически не рассматривались. На протяжении значительного периода развития метода преобладало представление о том, что в процессе прогресса знаний о геологических объектах и активного внедрения математических методов для их описания будут обоснованы надежные закономерности, подобные уравнениям теплопереноса, динамики подземных вод, волновых и других процессов.

Определенным сдерживающим фактором является то, что наблюдаемые данные, как правило, представляют значения картируемых показателей, а значения частных производных могут быть оценены лишь приближенно, и это только в рамках априорных модельных условий и при наличии достаточно большого количества данных.

Более значимые трудности обусловлены тем, что ВСМ допускает использование модельных условий очень широкого класса. Необходимо, с одной стороны, сужение допустимых рамок модельных условий для того, чтобы обеспечить возможность единообразного, формализованного определения их параметров. Но, с другой стороны, эти рамки не должны быть очень жесткими, сохраняя присущую ВСМ гибкость в описании пространственных закономерностей изменения свойств геологических объектов.

### Недостаточность одного уравнения в качестве модельного условия

Существенной особенностью ВСМ является возможность использования нескольких (в общем случае неограниченного количества) уравнений, которым решение задачи геокартирования должно приближенно удовлетворять. Другая особенность состоит в том, что используемые при картировании данные, которые могут рассматриваться в качестве граничных условий, ограничены по количеству и характеризуют свойства картируемого показателя лишь в отдельных точках наблюдения.

Принципиально важным является то, что фрагментарность задания граничных условий (их приуроченность к конечному числу точек наблюдения) определяет недостаточность применения только одного уравнения в качестве модельного условия. Простым примером, иллюстрирующим реализацию множественности модельных условий в виде дифференциальных уравнений в частных производных, является периодическая функция  $S(x, y) = \sin(y)$ , для которой точно выполняются следующие четыре соотношения:

$$S + S_{yy} = 0, \quad S_x = 0, \quad S_{xx} = 0, \quad S_{xy} = 0. \quad (1)$$

Очевидно, что последние три соотношения как вместе, так и по отдельности не могут обеспечить построение периодического решения при решении задачи геокартирования. Использование только первого соотношения позволяет получить волновую картину вдоль оси  $y$ , но, естественно, не обеспечивает постоянство функции вдоль оси  $x$ . Расчеты показывают, что одновременное использование первого и любого из остальных соотношений обеспечивает получение достоверного результата (при наличии хотя бы трех точек с данными, не лежащих на одной прямой).

Для периодической функции  $S(x, y) = A \sin(x) \cos(y)$  выполняются два условия:

$$2S + S_{xx} + S_{yy} = 0 \quad \text{и} \quad S_{xx} - S_{yy} = 0. \quad (2)$$

Так же как и в предыдущем примере, расчеты подтверждают, что использование только одного из этих условий недостаточно для однозначного восстановления поверхности в рамках вариационно-сеточного метода геокартирования. Для более общего случая, т. е. для функции

$$S(x, y) = A \sin(ax + by) \cos(cx + dy), \quad (3)$$

условия (1) очевидным образом преобразуются к двум уравнениям, дополнительно содержащим смешанные производные.

Таким образом, для определения модельных условий для двухмерной задачи картирования требуется определять как минимум два уравнения в частных производных. Очевидным обобщением этого вывода является то, что в случае трехмерного картирования необходимо определение как минимум трех уравнений в качестве модельных условий.

#### **Итерационный подход к определению модельных условий**

Обязательность использования нескольких (по крайней мере двух) модельных условий в рамках ВСМ при решении задач геокартирования является достаточно неординарной ситуацией для методов моделирования с использованием аппарата уравнений математической физики. В этих условиях возникает вопрос о возможных подходах к определению набора такого рода модельных условий на основе имеющегося массива исходных данных о свойствах картируемого показателя.

Для решения этого вопроса можно обратить внимание на то, что условия (1) и (2) представляют собой уравнения ортогональных гиперплоскостей в про-

пространстве переменных  $S, S_{xx}$  и  $S_{yy}$ , или в более общей постановке — в шестимерном пространстве переменных  $S, S_x, S_y, S_{xx}, S_{xy}$  и  $S_{yy}$ . И, соответственно, поиск модельных условий для вариационно-сеточного метода геокартирования может быть сведен к решению задачи определения двух или более таких ортогональных гиперплоскостей, которые наилучшим образом соответствуют имеющимся данным о свойствах картируемой поверхности (в ортогональной проекции на которые среднеквадратичные отклонения от среднего значения наименьшие).

Отметим, что в математическом отношении решение этой задачи тесно связано с применением метода главных компонент, в котором определяется ортонормированный базис направляющих векторов искомых гиперплоскостей.

К сожалению, непосредственная реализация такого решения практически неосуществима вследствие отсутствия необходимой информации о значениях всех производных в точках: как правило, имеются только значения картируемого показателя и в очень редких случаях — первых производных.

Возможным выходом в этих условиях является использование итерационного подхода к решению задачи, на начальном шаге которого осуществляется картирование с применением априорных модельных условий и определение по построенной поверхности первого приближения значений производных. Последующие итерационные циклы включают: расчет модельных условий (на основе поиска ортогональных гиперплоскостей в рассматриваемом пространстве значений функции и приближенных оценок производных); решение задачи геокартирования с этими модельными условиями; определение новых приближений для значений производных, которые используются в качестве входных данных на следующем шаге итерации.

Такой итерационный подход имеет существенные недостатки, в частности не гарантирует сходимость, однако определенное преимущество заключается в простоте реализации. Как представляется, для начального этапа исследований вопросов определения модельных условий в рамках ВСМ такой инструментарий является вполне приемлемым.

Результаты, приведенные далее в этой работе, получены с применением именно такого итерационного подхода. При этом нами использовался программный комплекс GeoSpline Technology (GST)<sup>1</sup>, реализующий вариационно-сеточный метод геокартирования и позволяющий задавать модельные условия в виде дифференциальных уравнений в частных производных до второго порядка включительно.

Для применения метода главных компонент использована открытая библиотека функций линейной алгебры Armadillo 8.200 (C++)<sup>2</sup>. Отметим, что результатами расчетов в условиях шестимерного пространства параметров являются шесть собственных векторов и соответствующие им шесть собственных значений. В отличие от прямого использования метода главных компонент, где для снижения размерности выбираются собственные вектора, имеющие наибольшие собственные значения, в постановке, рассматриваемой в данной работе, искомые гипер-

---

<sup>1</sup> URL: <http://www.geo-spline.ru>

<sup>2</sup> URL: <http://arma.sourceforge.net>

плоскости, в наилучшей степени удовлетворяющие исходным данным, определяются собственными векторами с наименьшими собственными значениями, т. е. с наименьшими дисперсиями отклонения данных от полученных гиперплоскостей.

### Исходные данные

В дальнейшем в работе рассматриваются четыре примера, которые представляют собой частные реализации выражения (3) для простой периодической функции ( $S^1$ ) и трех вариантов ее преобразования — сжатия по одной из осей ( $S^2$ ), поворота ( $S^3$ ) и скоса ( $S^4$ ). Соответствующие параметры этих функций представлены в таблице 1. Выбор значений численных параметров тестовых функций (амплитуды и масштабных коэффициентов при координатах) направлен, с одной стороны, на схожесть вариации значений модельных функций с реальными вариациями картируемых показателей (глубины залегания кровли пласта), с другой — на выраженную рельефность проявления периодичности этих функций в пределах рассматриваемой области картирования в последующих примерах.

Таблица 1

Параметры уравнений тестовых функций

Table 1

Equations parameters of test functions

Функция	Параметры				
	$A$	$a$	$b$	$c$	$d$
$S^1$	10	$0,1\pi$	0	0	$0,1\pi$
$S^2$		$0,1\pi$	0	0	$0,05\pi$
$S^3$		$0,1\pi/\sqrt{2}$	$0,1\pi/\sqrt{2}$	$-0,1\pi/\sqrt{2}$	$0,1\pi/\sqrt{2}$
$S^4$		$0,1\pi$	0	$0,1\pi$	$0,1\pi$

Соответствующие модельные условия в виде пар дифференциальных уравнений в частных производных для этих функций приведены в таблице 2. Задача заключается в восстановлении этих модельных условий по информации о значениях функций в точках наблюдения.

Таблица 2

Модельные условия для тестовых функций

Table 2

Test functions model conditions

Функция	Уравнения	
$S^1$	$S + 50(S_{xx} + S_{yy})/\pi^2 = 0$	$S_{xx} - S_{yy} = 0$
$S^2$	$S + 50(S_{xx} + 4S_{yy})/\pi^2 = 0$	$S_{xx} - 4S_{yy} = 0$
$S^3$	$S + 50(S_{xx} + S_{yy})/\pi^2 = 0$	$S_{xy} = 0$
$S^4$	$S + 100S_{yy}/\pi^2 = 0$	$S_{xx} - 2S_{xy} = 0$



В качестве исходных данных рассматривались значения функций  $S^1$ - $S^4$  в 428 точках, координаты которых соответствуют фактическому положению скважин на одном из месторождений Западной Сибири, что позволило моделировать картирование с реальными условиями неравномерности пунктов наблюдения. Расчеты проводились в прямоугольной области размером  $64 \times 40$ , с координатами нижней левой точки  $(-2,0)$ . Весовой коэффициент на данные  $\rho$  принят равным 1 000, шаг сетки бикубического сплайна — равным 1.

На рис. 1 представлено расположение точек с данными и результаты картирования для функции  $S^4$  (отображенные в виде заливки в градациях серого цвета) при использовании стабилизатора минимума поверхности в сопоставлении с точным решением (изолинии черного цвета). Как видно из приведенных результатов, несмотря на достаточно большой объем данных, участвующих в построении, использование простого априорного модельного условия не обеспечивает приемлемых результатов. Даже в областях повышенной плотности расположения данных наблюдаются существенные расхождения построенной карты и точного значения функции, а в участках, удаленных от точек с фактическими данными (в правой части области картирования), модельная функция и расчетная карта практически никак не согласуются между собой.

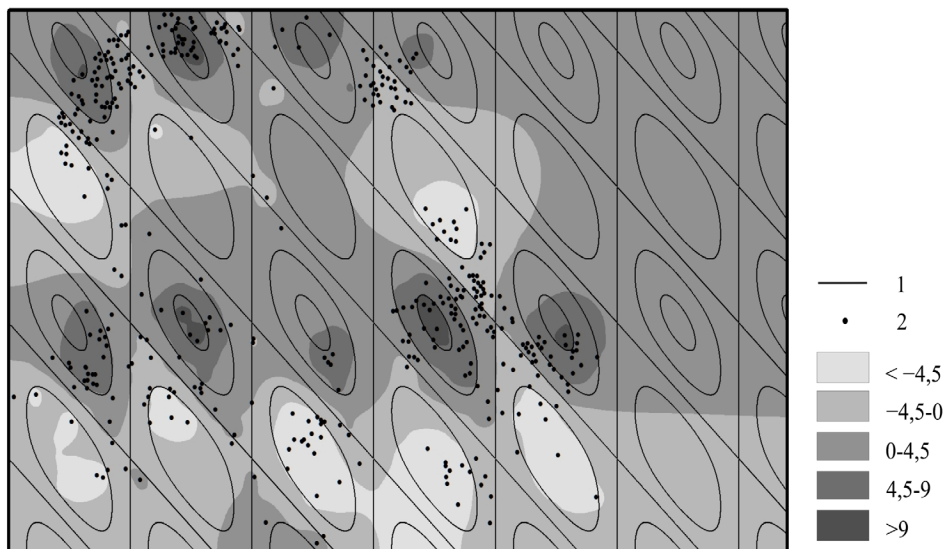


Рис. 1. Вариант реализации условия минимума поверхности

Примечания: 1 — изолинии точного решения, 2 — расположение точек с данными.

Fig. 1. Option implementation of the minimum surface condition

Notes: 1 — isolines of the exact solution, 2 — location of data points.

Аналогичные расхождения получены и при картировании с использованием в качестве исходных данных значений функций  $S^1$ - $S^3$ , а также с применением другого варианта априорных модельных условий — минимума кривизны.

### Верификация результатов применения метода главных компонент

Предваряя описание результатов восстановления модельных условий, остановимся более детально на обосновании возможности использования метода главных компонент для поиска вида уравнений в частных производных по заданному набору значений функции (и ее производных) на некотором множестве точек наблюдения. С этой целью в точках расположения данных (представленных на рис. 1) произведены вычисления значений функций  $S^1$ - $S^4$ , их первых и вторых производных непосредственно по аналитическим зависимостям. По этим значениям проведены расчеты с реализацией метода главных компонент и выбраны по два уравнения гиперплоскостей, которым соответствуют наименьшие собственные значения.

Полученные пары уравнений ортогональных гиперплоскостей для каждой из рассматриваемых функций представлены в таблице 3. Коэффициенты уравнений — компоненты единичных собственных векторов — приведены с точностью до пятого знака. Собственные значения для этих пар близки к нулю и поэтому в таблице не отражены.

Таблица 3

Определение модельных условий по точным значениям параметров

Table 3

Reconstruction of model conditions for exact parameter values

Функция	Уравнения
$S_1$	$0,13824S + 0,70032S_{xx} + 0,70032S_{yy} = 0$ $0,70711S_{xx} - 0,70711S_{yy} = 0$
$S_2$	$0,02881S + 0,50727S_{xx} - 0,86131S_{yy} = 0$ $0,09702S + 0,85618S_{xx} + 0,50749S_{yy} = 0$
$S_3$	$0,13823S + 0,70032S_{xx} + 0,70032S_{yy} = 0$ $S_{xy} = 0$
$S_4$	$0,01385S + 0,44275S_{xx} + 0,14032S_{yy} - 0,88549S_{xy} = 0$ $0,09724S - 0,06306S_{xx} + 0,98522S_{yy} + 0,12612S_{xy} = 0$

Сопоставление результатов, полученных при использовании метода главных компонент, с аналитическими зависимостями (таблица 2) свидетельствуют об их хорошей согласованности. Для простой периодической функции  $S^1$  и преобразования поворота  $S^3$  результаты с точностью до нормирующего множителя практически идентичны (погрешность не превышает  $10^{-8}$ ). Уравнения гиперплоскостей для функций, соответствующих преобразованию сжатия  $S^2$  и скоса  $S^4$ , с той же точностью представляют линейную комбинацию точных аналитических зависимостей.

### Результаты итерационного восстановления модельных условий

Основные особенности промежуточных и конечных результатов далее описываются на примере восстановления модельных условий для функции  $S^4$ , для которой результаты картирования с использованием априорных модельных условий характеризуются наименьшим сходством с восстанавливаемой поверхностью (рис. 2а). При этом приведенные данные в полной мере отражают общие черты результатов, полученных при восстановлении условий для функций  $S^1$ - $S^3$ . Так же как и в представленном ранее примере, построения выполнены для сетки с шагом 1 и весовым коэффициентом на данные 1 000.

На каждом шаге итерации по входящим значениям функций и их производных (в точках наблюдения) определялись два уравнения ортогональных гиперплоскостей:

$$E^i(S) = a^i S + a_x^i S_x + a_y^i S_y + a_{xx}^i S_{xx} + a_{xy}^i S_{xy} + a_{yy}^i S_{yy} - C^i = 0, \quad i = 1, 2,$$

где  $a^i, a_x^i, a_y^i, a_{xx}^i, a_{xy}^i, a_{yy}^i$  — компоненты единичных собственных векторов, определяемые с использованием метода главных компонент и соответствующие минимальным собственным значениям. Свободные члены уравнений ( $C^i$ ) рассчитывались исходя из требования прохождения гиперплоскостей через точку со средними значениями параметров (значений функций и производных).

Затем задача картирования решалась с включением в минимизируемый функционал полученных модельных условий:

$$\Phi = \rho \sum_i (S(x_i, y_i) - z_i)^2 + \int_{\Omega} \{[E^1(S)]^2 + [E^2(S)]^2\} dx dy. \quad (5)$$

На следующем шаге итерации значения производных для полученного решения использовались в качестве новых входных данных.

Результаты первых пяти итераций в виде компонентов единичных собственных векторов и соответствующих собственных значений, характеризующих дисперсии отклонения точек от гиперплоскости ( $\sigma^2$ ), а также свободных членов уравнений представлены в таблице 4. В рамках одной итерации уравнения упорядочены по величине дисперсии. Данные сгруппированы по двум вариантам априорных модельных условий, использованных для начальной оценки (нулевой итерации) частных производных картируемого параметра в точках наблюдения. Первый вариант соответствует условию минимума поверхности, второй — условию минимума кривизны.

На рис. 2 представлены результаты картирования для каждой из функций  $S^1$ - $S^4$  на нулевом, втором и четвертом этапе итерации (при использовании условия минимума поверхности на нулевом этапе).

Приведенные данные свидетельствуют о высокой эффективности рассматриваемого итерационного метода восстановления модельных условий в данных примерах. За пять итераций точность модельных условий увеличивается (дисперсии уменьшаются) в сотни раз, а результирующие карты с использованием

Таблица 4

Итерационное восстановление  
модельных условий

Table 4

Iterative reconstruction of model  
conditions

Итерация	$a$	$a_x$	$a_y$	$a_{xx}$	$a_{yy}$	$a_{xy}$	$C$	$\sigma^2$
<b>I вариант</b>								
0	-0,003	0,494	-0,800	-0,237	0,245	-0,029	-0,340	0,701
	0,048	-0,025	0,060	-0,227	0,141	0,960	0,105	0,339
1	-0,071	0,007	0,020	0,040	-0,957	0,278	0,029	0,165
	0,028	-0,012	0,014	-0,413	0,237	0,879	0,027	0,027
2	-0,095	0,000	0,003	0,018	-0,995	0,006	0,007	0,004
	0,000	-0,005	0,005	-0,442	-0,002	0,897	0,005	0,003
3	-0,098	0,001	-0,002	0,001	-0,995	-0,002	-0,001	0,001
	0,000	-0,001	0,000	-0,447	-0,002	0,894	0,000	0,000
4	-0,098	0,002	-0,003	0,000	-0,995	-0,003	-0,003	0,001
	0,000	0,000	0,000	-0,447	-0,003	0,894	-0,001	0,000
5	-0,098	0,002	-0,004	-0,001	-0,995	-0,003	-0,004	0,001
	0,000	0,000	0,000	-0,447	-0,002	0,894	-0,001	0,000
<b>II вариант</b>								
0	0,085	-0,001	-0,009	-0,037	0,969	-0,230	-0,022	0,138
	0,029	-0,008	0,025	-0,377	0,198	0,904	0,047	0,043
1	-0,095	-0,001	0,002	-0,069	-0,978	0,171	0,004	0,004
	0,019	-0,004	0,005	-0,434	0,183	0,882	0,005	0,003
2	-0,098	0,001	-0,003	0,002	-0,995	-0,007	-0,002	0,001
	-0,001	0,000	0,000	-0,447	-0,007	0,894	-0,001	0,000
3	-0,098	0,002	-0,003	-0,001	-0,995	-0,003	-0,003	0,001
	0,000	0,000	0,000	-0,447	-0,002	0,894	-0,001	0,000
4	-0,098	0,002	-0,004	-0,001	-0,995	-0,003	-0,004	0,001
	0,000	0,000	-0,001	-0,447	-0,002	0,894	-0,001	0,000
5	-0,098	0,002	-0,004	-0,001	-0,995	-0,002	-0,004	0,001
	0,000	0,000	-0,001	-0,447	-0,002	0,894	-0,001	0,000

восстановленных уравнений по своему виду практически соответствуют точным уже на второй итерации в областях расположения точек с фактическими данными и на четвертой итерации для всей области картирования. И это несмотря на то, что сами модельные условия определяются с относительно высокой погрешностью, о чем свидетельствует достаточно большое отклонение от точного значения (равного нулю) коэффициентов при первых производных ( $a_x$  и  $a_y$ ).

Для варианта с использованием на нулевом этапе условия минимума кривизны аналогичная сходимость итерационного процесса достигается еще быстрее — за одну-две итерации.

В целом следует отметить, что, несмотря на частный характер рассмотренных в данной работе примеров, полученные результаты свидетельствуют о возможности реализации достаточно простого и эффективного итерационного алгоритма для восстановления более общих вариантов модельных условий. Действительно, постановка задачи в виде минимизации функционала достаточно

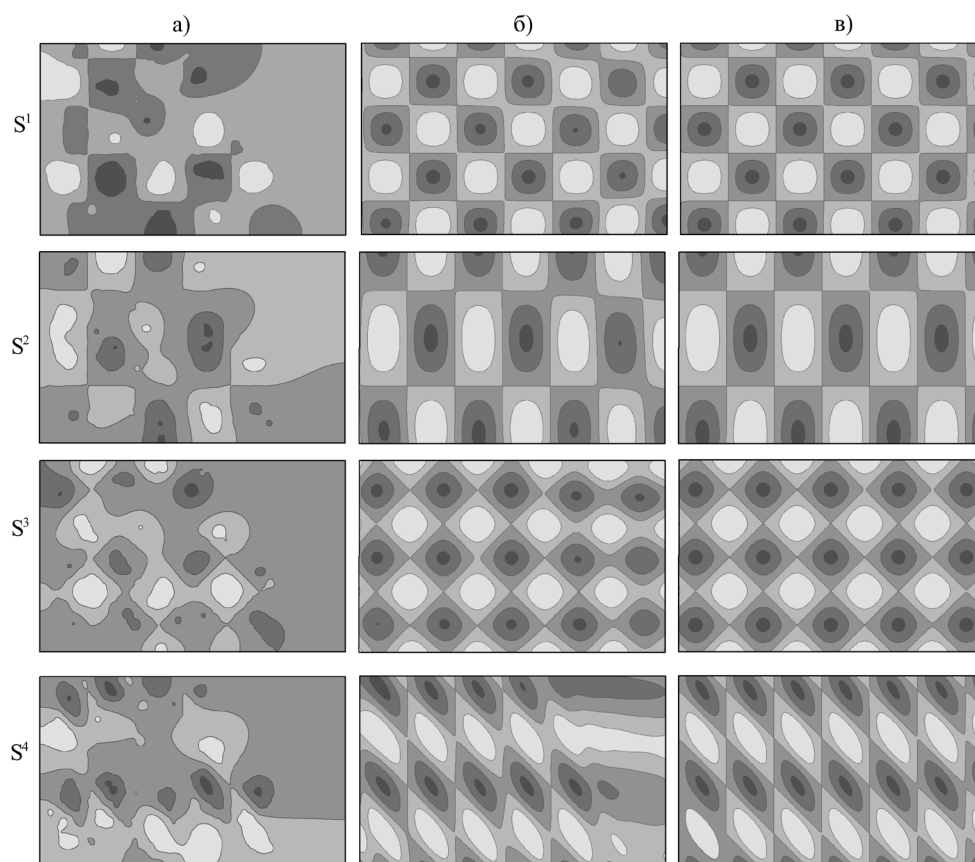


Рис. 2. Результаты картирования на нулевой (а), второй (б) и четвертой (в) итерации

Fig. 2. Mapping results at zero (a), second (б) and fourth (в) iteration

общего вида (5) определяет значительно более широкий класс допустимых функций, а предложенная вычислительная схема позволяет получать решения в рамках такой общности постановки.

### **Параметры, влияющие на сходимость итерационного метода**

При расчетах явно или неявно использован ряд параметров, которые оказывают значительное влияние на полученные результаты. Ранее приводились данные о принятых значениях шага сетки и весового коэффициента на данные. Их изменение может оказывать существенное воздействие на сходимость рассматриваемого в работе итерационного процесса восстановления модельных условий.

Менее очевидным является влияние выбора единиц измерения пространственных координат, от которых зависят количественные значения производных и, как следствие, соотношение коэффициентов при этих производных в искомым уравнениях. Это также весьма чувствительно сказывается на сходимости итерационного процесса. Дополнительно можно подчеркнуть, что использованное в функционале (5) неявное условие равенства весовых коэффициентов для каждого из уравнений не является обязательным и, по крайней мере, снижает общность решения и, возможно, снижает эффективность алгоритма. Очевидно, большое значение имеет и количество данных, по которым осуществляется восстановление модельных условий.

Анализ влияния всех этих управляющих параметров далеко выходит за рамки данной работы и требует отдельного рассмотрения. Однако приведенные примеры успешной реализации итерационного метода восстановления модельных условий, как представляется, дает определенные ориентиры для выбора подходящих значений этих показателей. Вместе с тем рассмотренная здесь постановка оптимизационной по своей сути задачи поиска параметров модельных уравнений в рамках ВСМ геокартирования, несомненно, допускает реализацию и других методов решения, направленных на гарантированное обеспечение их сходимости.

### **Заключение**

Многообразие свойств геологических объектов и природы их формирования, наряду с отсутствием надежных теоретических основ для их моделирования, определяет необходимость разработки методов решения задач, связанных с анализом наблюдаемых данных и выявлением природных закономерностей в виде формализуемых модельных условий. В данной работе эта задача рассмотрена применительно к вариационно-сеточному методу геокартирования, в котором модельные условия описываются в виде дифференциальных уравнений в частных производных до второго порядка включительно.

В рамках этого метода важной особенностью является необходимость использования более одного уравнения в частных производных в качестве модельных условий для обеспечения однозначности решения. В работе предложен итерационный подход с определением параметров искомым уравнений, соот-

ветствующих ортогональным гиперплоскостям (в пространстве параметров, включающих значения и производные картируемой поверхности в точках наблюдения) и оптимально согласующихся с наблюдаемыми данными.

Апробация этого подхода применительно к задаче восстановления модельных условий для простых периодических решений показала его результативность и вычислительную эффективность. Вместе с тем предложенный подход по общности математической постановки задачи и по вычислительной схеме допускает решение задачи поиска модельных условий для существенно более широкого класса функций.

### **Благодарности**

Автор благодарен Н. Ю. Галкиной за помощь в программной реализации и проведении расчетов.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ахметсафина А. Р. Стохастические методы в программе геологического моделирования / А. Р. Ахметсафина, И. Р. Миннихметов, А. Х. Пергамент // Вестник ЦКР Роснедра. 2010. № 1. С. 34-45.
2. Волков А. М. Геологическое картирование нефтегазоносных территорий с помощью ЭВМ / А. М. Волков. М.: Недра, 1988. 221 с.
3. Давид М. Геостатистические методы при оценке запасов руд / М. Давид. Л.: Недра, 1980. 360 с.
4. Демьянов В. В. Геостатистика: теория и практика / В. В. Демьянов, Е. А. Савельева. М.: Наука, 2010. 327 с.
5. Дюбрул О. Использование геостатистики для включения в геологическую модель сейсмических данных / О. Дюбрул. М.: EAGE, 2006. 296 с.
6. Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики / Ж. Матерон. М.: Мир, 1968. 470 с.
7. Плавник А. Г. Картирование свойств геологических объектов с учетом анизотропии на основе моделирования деформационного преобразования / А. Г. Плавник, А. Н. Сидоров // Математическое моделирование. 2018. Том 30. № 3. С. 19-36.
8. Плавник А. Г. Обобщенная сплайн-аппроксимационная постановка задачи картирования свойств геологических объектов / А. Г. Плавник // Геология и геофизика. 2010. Том 51. № 7. С. 1027-1037.
9. Сидоров А. Н. Определение и учет интегральных показателей в задачах геокартирования / А. Н. Сидоров, А. Г. Плавник // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2009. № 5. С. 16-20.
10. Chai H. Analysis and comparison of spatial interpolation methods for temperature data in Xinjiang Uygur Autonomous Region, China / H. Chai et al. // Natural Science. 2011. Vol. 3. № 12. Pp. 999-1010. DOI: 10.4236/ns.2011.312125
11. Chilès J. P. Geostatistics Modeling Spatial Uncertainty / J. P. Chilès, P. Delfiner. New York: Wiley, 1999. 695 p. DOI: 10.1002/9780470316993

12. Desbarats A. J. Geostatistical mapping of leakance in a regional aquitard, Oak Ridges Moraine area, Ontario, Canada / A. J. Desbarats, M. J. Hinton, C. E. Logan, D. R. Sharpe // *Hydrogeology Journal*. 2001. № 9. Pp. 79-96.  
DOI: 10.1007/s100400000110
13. Deutsch C. V. Geostatistical reservoir modeling / C. V. Deutsch. New York: Oxford University Press, 2002. 376 p.
14. Falivene O. Interpolation algorithm ranking using cross-validation and the role of smoothing effect. A coal zone example / O. Falivene, L. Cabrera, R. Tolosana-Delgado, A. Sáez // *Computers & Geosciences*. 2010. Vol. 36. № 4. Pp. 512-519. DOI: 10.1016/j.cageo.2009.09.015
15. Gong G. Comparison of the accuracy of kriging and IDW interpolations in estimating groundwater arsenic concentrations in Texas / G. Gong, S. Mattevada, S. E. O'Bryant // *Environmental Research*. 2014. Vol. 130. Pp. 59-69. DOI: 10.1016/j.envres.2013.12.005
16. Gundogdu K. S. Spatial analyses of groundwater levels using universal kriging / K. S. Gundogdu, I. Guney // *Journal of Earth System Science*. 2007. Vol. 116. № 1. Pp. 49-55. DOI: 10.1007/s12040-007-0006-6
17. Li J. Application of machine learning methods to spatial interpolation of environmental variables / J. Li, A. D. Heap, A. Potter, J. J. Daniell // *Environmental Modelling and Software*. 2011. Vol. 26. № 12. Pp. 1647-1659. DOI: 10.1016/j.envsoft.2011.07.004
18. Mueller T. G. Map quality for ordinary kriging and inverse distance weighted interpolation / T. G. Mueller, N. B. Pusuluri, K. K. Mathias, P. L. Cornelius, R. I. Barnhisel, S. A. Shearer // *Soil Science Society of America Journal*. 2004. Vol. 68. № 6. Pp. 2042-2047. DOI: 10.2136/sssaj2004.2042
19. Sidorov A. N. Use of variational methods in geological mapping / A. N. Sidorov, A. G. Plavnik, A. A. Sidorov, M. S. Shutov // *Mathematics of Planet Earth: proceedings of the 15<sup>th</sup> Annual Conference of the International Association for Mathematical Geosciences (2-6 September 2013, Madrid, Spain)* / ed. by E. Pardo-Igúzquiza, C. Guardiola-Albert, J. Heredia, L. Moreno-Merino, J. L. Durán, J. A. Vargas-Guzmán. New York; Dordrecht; London: Springer. 2013. Pp. 325-328.  
DOI: 10.1007/978-3-642-32408-6\_72
20. Wise S. Cross-validation as a means of investigating DEM interpolation error / S. Wise // *Computers & Geosciences*. 2011. Vol. 37. № 8. Pp. 978-991.  
DOI: 10.1016/j.cageo.2010.12.002



**Andrey G. PLAVNIK<sup>1</sup>**

UDC 004.94+519.652:550.8

**RECONSTRUCTION OF MODEL CONDITIONS FOR PERIODIC SOLUTIONS IN THE VARIATIONAL-GRID METHOD OF GEOLOGICAL MAPPING\***

<sup>1</sup> Dr. Sci. (Tech.), Chief Researcher, West Siberian Branch of Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Department of Oil and Gas Geology, Industrial University of Tyumen  
plavnikag@ipgg.sbras.ru

**Abstract**

The variety of geological objects properties and the nature of their formation determine the presence and usage of a large number of different mapping methods, as well as the need to choose the method that is most suitable for each specific data set.

The problem is that the predictive properties of the results depend on the compliance or non-compliance of the model conditions used in the mapping methods with real laws. One of the approaches involves mapping according to the training data, with the subsequent comparison of the constructed maps predictive properties according to the examination data. Such an approach requires multivariate, computationally expensive calculations.

Under these conditions, determining the appropriate model conditions from the observed data is relevant in the development of geological mapping methods.

Within the framework of the variational-grid geological mapping method, there is considered the problem of determining model conditions that describe the spatial regularities of mapping parameters change in the form of partial differential equations and are consistent with observed set of experimental data on the properties of geological objects. A special feature of the problem is the need to define two or more equations to ensure uniqueness of the solution.

---

\* The research was supported by project of Basic Science's Researches (No 0331-2019-0024).

**Citation:** Plavnik A. G. 2019. "Reconstruction of model conditions for periodic solutions in the variational-grid method of geological mapping". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 5, no 2, pp. 105-123.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-2-105-123

In this paper, the authors propose an approach based on the search for a parameter space including the values of the function being mapped, its first and second derivatives such a system of orthogonal hyperplanes that consistent for available experimental data with greatest degree. Direct implementation of this approach is complicated by the fact that the necessary values of the derivatives are not actually determined experimentally. Under these conditions, an iterative method is used to sequentially refine the values of the derivatives and restore the model conditions. The method has been successfully tested on examples of the reconstruction of partial differential equations corresponding to a series of periodic solutions.

The problem mathematical formulation general nature and the possibility of optimizing the computational scheme determine the prospects of the approach considered for restoring model conditions in a wider class of functions.

### Keywords

Geological mapping, variational-grid method, model conditions, partial differential equations, hyperplane, principal component analysis.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-2-105-123**

### REFERENCES

1. Akhmetsafina A. R., Minniakhmetov I. R., Pergament A. Kh. 2010. "Stochastic methods in the program of geological modeling". Vestnik TsKR Rosnedra, no 1, pp. 34-45. [In Russian]
2. Volkov A. M. 1988. Geological Mapping of Oil and Gas Areas with Computers. Moscow: Nedra. [In Russian]
3. David M. 1980. Geostatistical Ore Reserve Estimation. Translated from English. Leningrad: Nedra. [In Russian]
4. Demyanov V. V. 2010. Geostatistics: Theory and Practice. Moscow: Nauka. [In Russian]
5. Dubrule O. 2003. Geostatistics for Seismic Data Integration in Earth Models. Moscow: EAGE Publications. DOI: 10.1190/1.9781560801962 [In Russian]
6. Matheron G. Basics of Applied Geostatistics. Moscow: Mir. [In Russian]
7. Plavnik A. G., Sidorov A. N. 2018. "Mapping the Properties of Geological Objects with Allowance for Anisotropy Based on the Simulation of the Deformation Transformation". Mathematical Models and Computer Simulations, vol. 10, no 5, pp. 629-638. DOI: 10.1134/S2070048218050095
8. Plavnik A. G. 2010. "Generalized spline-approximation problem formulation for spatial data modeling in geosciences". Russian Geology and Geophysics, vol. 51, no 7, pp. 801-807. DOI: 10.1016/j.rgg.2010.06.008
9. Sidorov A. N., Plavnik A. G. 2009. "Calculation and Accounting of Integral Parameters in Geological Mapping Tasks". Avtomatizatsiya, telemekhanizatsiya i svyaz' v neftyanoy promyshlennosti, no 5, pp. 16-20. [In Russian]
10. Chai H. et al. 2011. "Analysis and comparison of spatial interpolation methods for temperature data in Xinjiang Uygur Autonomous Region, China". Natural Science, vol. 3, no 12, pp. 999-1010. DOI: 10.4236/ns.2011.312125

11. Chilès J. P., Delfiner P. 1999. *Geostatistics Modeling Spatial Uncertainty*. New York: Wiley. DOI: 10.1002/9780470316993
12. Desbarats A. J., Hinton M. J., Logan C. E., Sharpe D. R. 2001. "Geostatistical mapping of leakance in a regional aquitard, Oak Ridges Moraine area, Ontario, Canada". *Hydrogeology Journal*, no 9, pp. 79-96. DOI: 10.1007/s100400000110
13. Deutsch C. V. 2002. *Geostatistical Reservoir Modeling*. New York: Oxford University Press.
14. Falivene O., Cabrera L., Tolosana-Delgado R., Sáez A. 2010. "Interpolation algorithm ranking using cross-validation and the role of smoothing effect. A coal zone example". *Computers and Geosciences*, vol. 36, no 4, pp. 512-519. DOI: 10.1016/j.cageo.2009.09.015
15. Gong G., Mattevada S., O'Bryant S. E. 2014. "Comparison of the accuracy of kriging and IDW interpolations in estimating groundwater arsenic concentrations in Texas". *Environmental Research*, vol. 130, pp. 59-69. DOI: 10.1016/j.envres.2013.12.005
16. Gundogdu K. S., Guney I. 2007. "Spatial analyses of groundwater levels using universal kriging". *Journal of Earth System Science*, vol. 116, no 1, pp. 49-55. DOI: 10.1007/s12040-007-0006-6
17. Li J., Heap A. D., Potter A., Daniell J. J. 2011. "Application of machine learning methods to spatial interpolation of environmental variables". *Environmental Modelling and Software*, vol. 26, no 12, pp. 1647-1659. DOI: 10.1016/j.envsoft.2011.07.004
18. Mueller T. G., Pusuluri N. B., Mathias K. K., Cornelius P. L., Barnhisel R. I., Shearer S. A. 2004. "Map quality for ordinary kriging and inverse distance weighted interpolation". *Soil Science Society of America Journal*, vol. 68, no 6, pp. 2042-2047. DOI: 10.2136/sssaj2004.2042
19. Sidorov A. N., Plavnik A. G., Sidorov A. A., Shutov M. S. 2013. "Use of variational methods in geological mapping". *Proceedings of the 15<sup>th</sup> Annual Conference of the International Association for Mathematical Geosciences (2-6 September, Madrid, Spain)*. Edited by E. Pardo-Igúzquiza, C. Guardiola-Albert, J. Heredia, L. Moreno-Merino, J. L. Durán and J. A. Vargas-Guzmán. Pp. 325-328. New York; Dordrecht; London: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-32408-6\_72
20. Wise S. 2011. "Cross-validation as a means of investigating DEM interpolation error". *Computers and Geosciences*, vol. 37, no 8, pp. 978-991. DOI: 10.1016/j.cageo.2010.12.002