

Аналитическое решение уравнения теплопроводности с учетом конвекции с изотермическими граничными условиями

Родион Михайлович Ганопольский ✉

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия
Контакт для переписки: r.m.ganopolskij@utmn.ru ✉

Аннотация. При добыче углеводородов постоянно возникает задача определения распространения тепла по пласту. Изменение температуры влияет на вязкость нефти, а следовательно, и на скорость ее добычи. С учетом процесса фильтрации в классическом уравнении теплопроводности возникают добавочные члены, в том числе нелинейные. Для решения модифицированных уравнений используются разнообразные численные схемы. Часто возникает вопрос сходимости таких методов. Задача этой работы — получить аналитическое решение уравнения теплопроводности в тех случаях, когда это возможно, чтобы в дальнейшем сравнить с ними численные решения.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, температурное поле, конвекция, теплоперенос, массоперенос, метод Фурье, интеграл Пуассона, фильтрация

Цитирование: Ганопольский Р. М. 2023. Аналитическое решение уравнения теплопроводности с учетом конвекции с изотермическими граничными условиями // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 3 (35). С. 66–82. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-66-82>

Поступила 31.07.2023; одобрена 20.09.2023; принята 06.10.2023

Analytical solution of heat equation taking into account convection with isothermal boundary conditions

Rodion M. Ganopolskij✉

University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: r.m.ganopolskij@utmn.ru✉

Abstract. The problem of determining the distribution of heat through the reservoir constantly arises in the production of hydrocarbons. Changes of temperature affect the viscosity of oil and consequently the rate of its production. Taking into account the filtration process, additional terms appear in the classical heat conduction equation, including nonlinear ones. Various numerical schemes are used to solve the modified equations. The question of the convergence of such methods often arises. The task of this work is to obtain an analytical solution of the heat equation in cases where it is possible, in order to further compare numerical solutions with them.

Keywords: heat equation, temperature field, convection, heat transfer, mass transfer, Fourier method, Poisson integral, filtration

Citation: Ganopolskij, R. M. (2023). Analytical solution of heat equation taking into account convection with isothermal boundary conditions. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 66–82. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-66-82>

Received July 31, 2023; Reviewed September 20, 2023; Accepted October 6, 2023

Введение

Одна из актуальных задач нефтяной отрасли — разработка месторождений с трудноизвлекаемыми запасами, в частности с высоковязкой нефтью. Фильтрационные свойства нефти с высокой вязкостью сильно зависят от температуры, поэтому пласт стараются предварительно прогреть. Физические процессы нагревания и фильтрации происходят одновременно. Чтобы полностью смоделировать технологический процесс, необходимо сначала построить математическую модель прогрева пласта с высоковязкой нефтью. Для этого используют уравнение теплопроводности с конвекцией [Чернышов, Пивоварова, 2020; Гильманов, Шевелёв, 2021; Жумаев, Тошева, 2022], в которое добавляется градиент температуры, умноженный на скорость конвекции. Замыкающим (для определения скорости) служит уравнение массопереноса [Дульнев, 2012].

Из-за неоднородностей и нелинейных членов решить такую систему аналитически невозможно. По этой причине используются различные численные методы, например разностные схемы или метод конечных объемов [Чернышов, Пивоварова, 2020]. Многие исследователи проводят работу в этой и смежных областях ([Дорошевич, 2009; Чернышов, Пивоварова, 2020; Гильманов, Шевелёв, 2021; Жумаев, Тошева, 2022; Babayar-Razlighi, 2023] и др.). Для получения более точных прогнозов распределения температуры они предпринимают примерно одинаковые шаги: как можно мельче разбивают расчетную область. Это закономерно увеличивает вычислительную сложность задачи. Также стоит вопрос о точности, сходимости и устойчивости численного моделирования. Один из способов проверки корректности прогноза — сравнение его с аналитическими решениями частных случаев, без неоднородностей и нелинейностей. Некоторые авторы проводят такие оценки [Карпович и др., 2015; Abdulla — Al — Mamun и др., 2018].

Уравнение теплопроводности давно изучено, и существует несколько методов аналитического его решения для разнообразных граничных и начальных условий. Сформулируем задачи, которые, с одной стороны, упрощенно соответствуют реальным условиям, с другой — позволяют проинтегрировать уравнения. Начнем с уравнения теплопроводности без конвекции, затем учтем простейший процесс массопереноса.

Методы

Постановка задачи

В пласте можно выделить два направления — от скважины вглубь породы (горизонтально) и снизу вверх (вертикально). В первом случае считаем, что первоначально пласт имеет одну температуру, скважина равномерно нагрета и отдает тепло, не остывая, на каком-то расстоянии температура неизменна и равна первоначальной (выравнивание температуры пласта из-за начального перепада). Во втором случае температура подошвы и кровли пласта не меняется со временем, первоначально пласт нагрет до одной температуры (остывание пласта после начального нагрева). По каждому направлению задачу будем решать отдельно, при этом считая ее одномерной. Каждое из решений будет являться частным случаем решения двумерной задачи.

Учитывая направления, уравнение теплопроводности с перепадом температур будем решать с переменной x , а в случае остывания — с переменной y . Для удобства возьмем безразмерную температуру u : значение 0 будет соответствовать минимальной температуре в задаче, а 1 — максимальной. Уравнение теплопроводности в одномерном случае без конвекции имеет вид [Тихонов, Самарский, 2004]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (1)$$

В задаче с перепадом температур в начале координат будет задана постоянная ненулевая температура, в остальных точках — нулевая. На правой границе задана постоянная температура, равная нулю:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(0, t) = 1, \quad u(l, t) = 0.$$

Во второй задаче на границах постоянная нулевая температура, а в остальных точках температура равна 1:

$$u(y, 0) = 1 \{0 < y < h\}, \quad (3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(h, t) = 0.$$

В случае массопереноса в уравнения в простейшем случае добавится слагаемое с первой производной по координате первой степени [Крайнов, Моисеева, 2017]. Учтем, что скорость конвекции может отличаться в разных направлениях (например, если присутствует изотропность пласта или конвекции пара). Поэтому используем разные буквенные обозначения для коэффициентов перед добавленными слагаемыми:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2v \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + 2q \frac{\partial u}{\partial y} = a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Метод Фурье без конвекции

Если на границах области нулевое значение функции, то общим решением уравнения теплопроводности (1) является сумма (разделения переменной) [Тихонов, Самарский, 2004; Петровский, 2009]:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-at \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right),$$

где коэффициенты A_n получаются из начальной функции:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \quad (5)$$

Решение уравнения для случая, когда вся область первоначально равномерно нагрета, хорошо известно [Cannon, 1984]:

$$u(y, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi(2m-1)y}{h}\right) \exp\left(-at \left(\frac{(2m-1)\pi}{h}\right)^2\right)}{(2m-1)}. \quad (6)$$

Предельное решение при $t \rightarrow \infty$:

$$u(y, t \rightarrow \infty) = 0,$$

т. е. полное остывание до температуры границ.

В случае перепада температур граничные условия (2) не подходят под метод Фурье. Вычтем из неизвестной функции u линейную функцию от координаты:

$$\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Полученная функция удовлетворяет исходному уравнению теплопроводности, т. к. обе производные от $(1 - x/l)$ равны нулю. Начальное и граничные условия для \tilde{u} теперь подходят для того, чтобы применить метод Фурье:

$$\tilde{u}(x, 0) = \tilde{f}(x) = -\left(1 - \frac{x}{l}\right) \{0 < x < l\},$$

$$\tilde{u}(0, t) = 0, \quad \tilde{u}(l, t) = 0.$$

Вспользуемся формулой для общего решения (5) и разложим начальную функцию:

$$A_n = -\frac{2}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = -\frac{2}{\pi n}.$$

С учетом этого решение уравнения теплопроводности в случае граничных условий (2) имеет вид:

$$u(x, t) = 1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \exp\left(-at \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)}{n}. \quad (7)$$

Предельное решение при $t \rightarrow \infty$:

$$u(x, t \rightarrow \infty) = 1 - \frac{x}{l},$$

т. е. линейное убывание температуры от одной границы до другой, что физически достоверно.

Известный недостаток метода Фурье — это поведение при малых значениях времени, решение очень медленно сходится. Например, решение второй задачи при $at = 0,0001$, когда взяты первые 100 слагаемых, приведено на рис. 1 (все параметры и значения обезразмерены, как и на остальных рис. 2–6). В работе [Карпович и др., 2015] взято несколько тысяч слагаемых и вычисления проведены с большой точностью, но присутствуют такие же колебания. Применить использованный метод зануления граничных условий нельзя для двумерной задачи, т. к. вычитаемая функция (комбинация линейной функции по x и прямоугольной функции по y)

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{l}, & 0 < y < h, \\ 0, & y = 0 \text{ или } y = h \end{cases}$$

не удовлетворяет стационарному уравнению (эллиптического вида)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

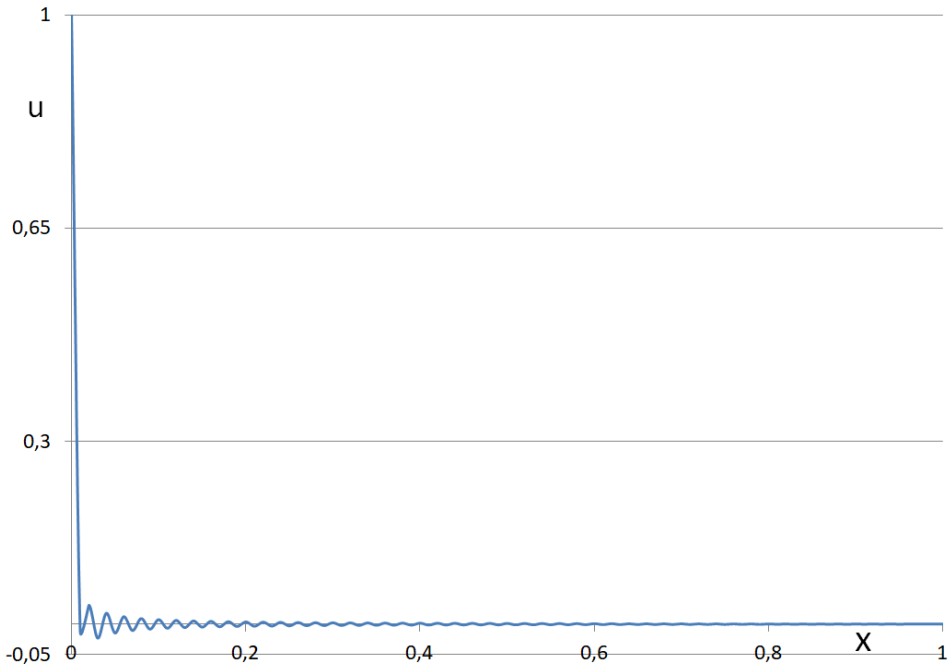


Рис. 1. Сумма первых 100 слагаемых решения Фурье при малом времени

Fig. 1. Sum of the first 100 terms of the Fourier solution for short time

Метод Фурье для уравнения теплопроводности с конвекцией

Теперь решим уравнение теплопроводности с учетом конвекции (4). В методе Фурье разложение идет по синусам. Будем искать решение уравнения в виде суммы таких функций:

$$p(x, t) = e^{\alpha x} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) e^{-\beta t}. \quad (8)$$

Подставим (8) в уравнение (4) вместо функции u :

$$\begin{aligned} -\beta e^{\alpha x} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) e^{-\beta t} + 2v e^{\alpha x} \left[\alpha \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \left(\frac{\pi n}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \right] e^{-\beta t} = \\ = a e^{\alpha x} \left[\alpha^2 \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + 2\alpha \left(\frac{\pi n}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \right] e^{-\beta t}. \end{aligned}$$

Сократим на экспоненты и приравняем коэффициенты при синусе и косинусе:

$$-\beta + 2v\alpha = a \left(\alpha^2 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \right), \quad 2v \left(\frac{\pi n}{l}\right) = 2a\alpha \left(\frac{\pi n}{l}\right),$$

откуда получаем зависимости показателей экспонент от коэффициента конвекции и от числа n :

$$\alpha = \frac{v}{a}, \quad \beta = \frac{v^2}{a} + a \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Общее решение уравнения (4):

$$u(x, t) = e^{\frac{vx-tv^2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) e^{-at\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2},$$

где коэффициенты A_n находятся из начального условия:

$$u(x, 0) = f(x) = e^{\frac{vx}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) = f(x) e^{-\frac{vx}{a}}.$$

По аналогии с решением без конвекции нужно вычлсть из u такую функцию $\varphi(x)$, которая удовлетворяет уравнению и одновременно делает граничные условия нулевыми. Из первого условия получаем:

$$2v \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \varphi(x) = b e^{\frac{2vx}{a}} + c.$$

Из второго условия находим b и c :

$$\varphi(0) = 1 \text{ и } \varphi(l) = 0,$$

$$\varphi(x) = \frac{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - \exp\left(\frac{2vx}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - 1}.$$

Теперь можно вычислять коэффициенты разложения в ряд Фурье:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) = \frac{\exp\left(\frac{2vx}{a}\right) - \exp\left(\frac{2vl}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - 1} e^{-\frac{vx}{a}}.$$

После интегрирования и подстановки получаем решение уравнения с конвекцией для граничного условия (2):

$$u(x, t) = \frac{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - \exp\left(\frac{2vx}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - 1} - \exp\left(\frac{xv - tv^2}{a}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)}{v^2 l^2 + a^2 \pi^2 n^2} \exp\left(-at\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right).$$

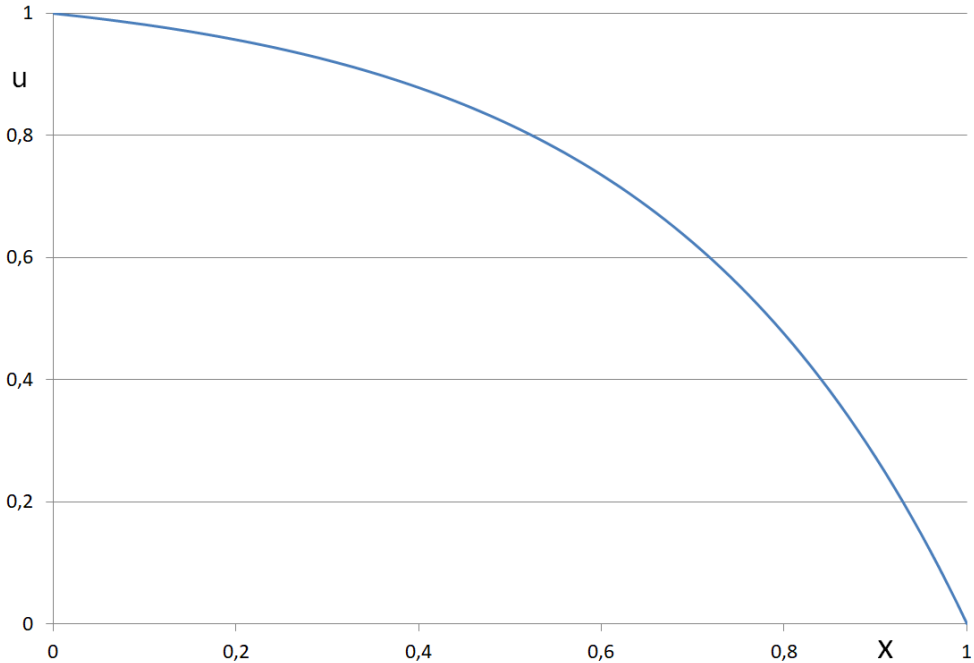


Рис. 2. Предельное стационарное распределение температуры с учетом конвекции

Fig. 2. Limit stationary temperature distribution with allowance for convection

На рис. 2 показано предельное решение (при $t \rightarrow \infty$):

$$u(x, t \rightarrow \infty) = \frac{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - \exp\left(\frac{2vx}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - 1}.$$

То есть перед применением метода Фурье мы вычитали предельное, оно же стационарное, решение. При $v \rightarrow 0$ получаем решение без конвекции (7):

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - \exp\left(\frac{2vx}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - 1} \rightarrow 1 - \frac{x}{l},$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \exp\left(\frac{xv - tv^2}{a}\right) \frac{2\pi a^2}{v^2 l^2 + a^2 \pi^2 n^2} \rightarrow \frac{2}{\pi n}.$$

При достаточно большой скорости конвекции со временем становится видна разница между процессом прогрева (рис. 3), появляется точка перегиба. Вид кривой качественно совпадает с результатами, полученными численными методами [Попов, Соболева, 2016; Шатров и др., 2018; Жумаев, Тошева, 2022].

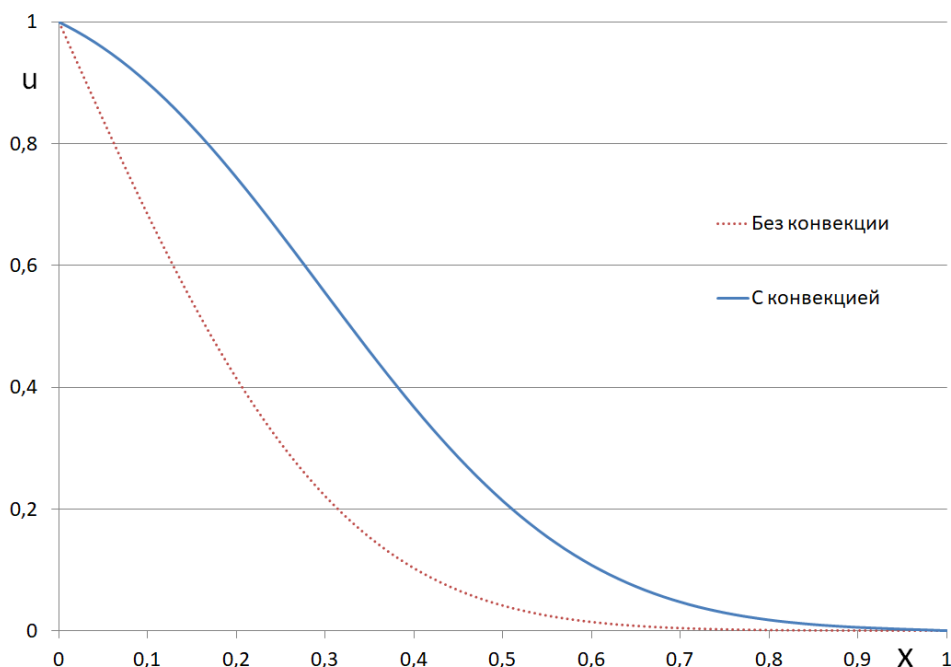


Рис. 3. Прогрев области с конвекцией и без

Fig. 3. Heating area with and without convection

В случае остывания с конвекцией (3) вычисление дает следующее решение:

$$u(y, t) = \exp\left(\frac{yq - tq^2}{a}\right) \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{\pi my}{h}\right) \exp\left(-at \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right),$$

где B_m коэффициенты разложения начального состояния:

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{\pi my}{h}\right) = e^{-\frac{yq}{a}},$$

$$B_m = \frac{2m\pi a^2 \left(1 - (-1)^m e^{-\frac{q}{a}}\right)}{q^2 h^2 + a^2 \pi^2 m^2}.$$

Предельное решение (при $t \rightarrow \infty$):

$$u(y, t \rightarrow \infty) = 0,$$

т. е. в любом случае происходит полное остывание области, но со смещением более теплой области в сторону направления конвекции (рис. 4).

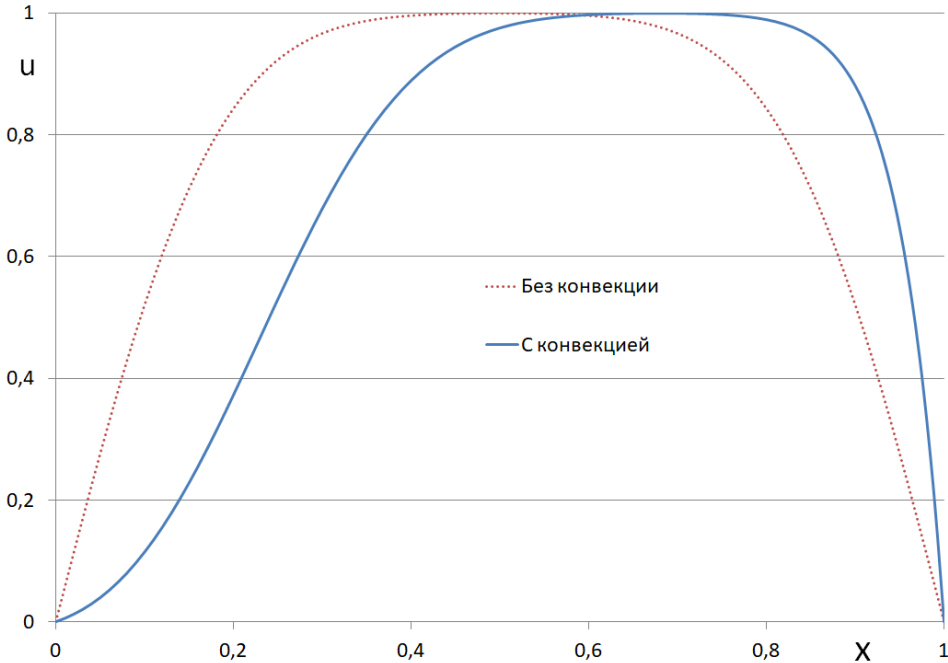


Рис. 4. Смещение максимума температуры из-за конвекции

Fig. 4. Shifting of temperature maximum due to convection

При $q \rightarrow 0$ получаем решение без конвекции (6) для нечетных m :

$$\lim_{q \rightarrow 0} \exp\left(\frac{yq - tq^2}{a}\right) \frac{2\pi(2m-1)a^2 \left(e^{-\frac{q}{a}} + 1\right)}{q^2 + a^2\pi^2(2m-1)^2} = \frac{4}{\pi(2m-1)},$$

а для четных m :

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left(1 - (-1)^{2m} e^{-\frac{q}{a}}\right) = 0.$$

Метод Пуассона

Если задано начальное распределение температур $f(x)$ на всей числовой прямой, то общее решение уравнения теплопроводности (1) находится с помощью интеграла Пуассона [Cannon, 1984]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\chi) e^{-\frac{(x-\chi)^2}{4at}} d\chi.$$

В методе Фурье модифицированную функцию в начальный момент мы разложили в ряд (7) на отрезке $(0, l)$. Распространим это разложение на всю числовую ось, учитывая, что полученная функция изменяется с периодом $2l$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -\left(2n + 1 - \frac{x}{l}\right), & 2n < \frac{x}{l} < 2(n + 1), \\ 0, & x = 2nl, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к исходному распределению температур, получим

$$f(x) = \tilde{f}(x) + 1 - \frac{x}{l} = \begin{cases} -2n, & \left\{2n < \frac{x}{l} < 2(n + 1)\right\}, \\ -2n + 1, & x = 2nl, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Теперь надо вычислить интеграл Пуассона от этой функции:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2n \int_{2nl}^{2(n+1)l} e^{-\frac{(x-\chi)^2}{4at}} d\chi. \quad (10)$$

Нам понадобится вычислить интеграл типа

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{\chi_1}^{\chi_2} e^{-\frac{(x-\chi)^2}{4at}} d\chi &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\chi_1-x}{2\sqrt{at}}}^{\frac{\chi_2-x}{2\sqrt{at}}} e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\chi_2-x}{2\sqrt{at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\chi_1-x}{2\sqrt{at}}\right) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где введена переменная $z = \chi - x$.

Результат выражается через так называемую функцию ошибок:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\chi^2} d\chi.$$

Функция erf равна нулю при $x = 0$, является нечетной и при $x \rightarrow \infty$ стремится к 1. Функция $\operatorname{erf}(x/k)$ при $k \rightarrow 0$ стремится к функции Хевисайда:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{k}\right) = 2\theta(x) + 1.$$

В данном случае используется функция Хевисайда со следующим определением:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Вычислим все интегралы в сумме (10):

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x - 2(n+1)l}{2\sqrt{at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - 2nl}{2\sqrt{at}}\right) \right). \quad (12)$$

При $t \rightarrow 0$ каждое слагаемое представляет собой прямоугольную функцию:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x - 2(n + 1)l}{2\sqrt{at}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x - 2nl}{2\sqrt{at}} \right) \right) = 2\theta(x - 2(n + 1)l) - 2\theta(x - 2nl),$$

которая равна -2 в интервале $(2nl, 2(n + 1)l)$, нулю — вне интервала, -1 — на концах отрезка. Таким образом, сумма всех слагаемых соответствует начальному условию (9). Формально, комбинируя по-разному слагаемые в сумме (11), можно получить различный результат. Поскольку нас интересует отрезок $(0, l)$, то вычислять (11) необходимо по мере убывания модуля значения слагаемых в этом диапазоне. Например, можно выразить сумму таким образом:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x - 2(n + 1)l}{2\sqrt{at}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x - 2nl}{2\sqrt{at}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x + 2(n - 1)l}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x + 2nl}{2\sqrt{at}} \right) \right). \quad (13)$$

Подстановка $x = l$ дает значение функции, тождественное равно 0, при $x = 0$ сумма первых двух слагаемых близка к 1 при разных значениях t . Аналогично при произвольных x и t для точности достаточно первых нескольких слагаемых суммы (12). Процесс выравнивания температуры показан на трехмерном графике (рис. 5).

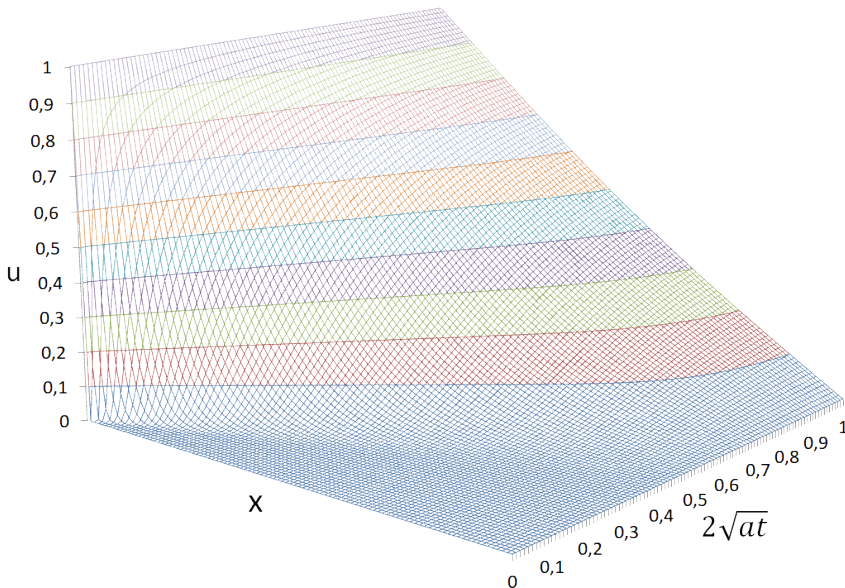


Рис. 5. Процесс выравнивания температуры. Решение с помощью интеграла Пуассона
Fig. 5. Temperature equalization process. The solution was obtained using Poisson integral

Применим полученный алгоритм для второй задачи (3). Начальным условием является функция:

$$g(y) = \begin{cases} 1, & y \in (2nh, (2n + 1)h), \\ -1, & y \in ((2n + 1)h, (2n + 2)h), \\ 0, & y = mh, \end{cases}$$

где m и n — целые числа. Интеграл Пуассона от этой функции:

$$u(y, t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{2nh}^{(2n+1)h} e^{-\frac{(x-y)^2}{4at}} dx - \int_{(2n+1)h}^{(2n+2)h} e^{-\frac{(x-y)^2}{4at}} dx \right).$$

Воспользуемся (11):

$$u(y, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{y - 2nh}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y - (2n + 2)h}{2\sqrt{at}}\right) - 2 \operatorname{erf}\left(\frac{y - (2n + 1)h}{2\sqrt{at}}\right) \right).$$

Сумма нескольких слагаемых (при $n = -2 \dots 2$) в точках $y = 0$ и $y = h$ близка к нулю для любых t . Процесс остывания первоначально нагретой области показан на трехмерном графике (рис. 6).

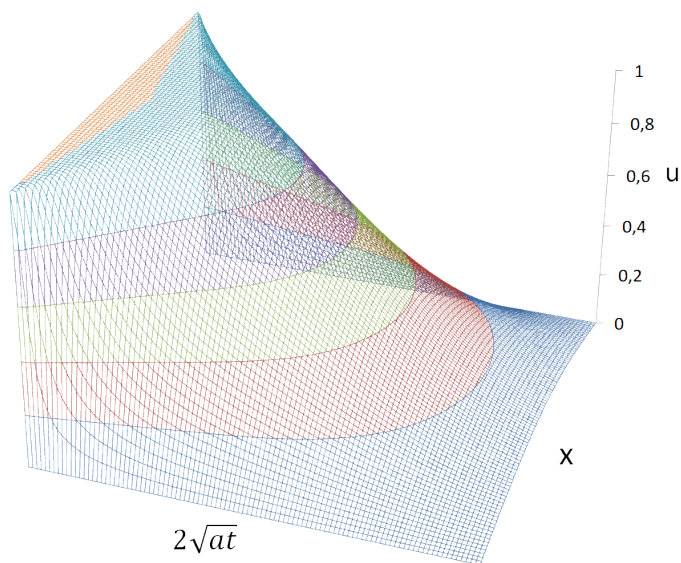


Рис. 6. Процесс остывания первоначально нагретой области. Решение с помощью интеграла Пуассона

Fig. 6. The process of cooling the initially heated area. The solution was obtained using Poisson integral

Обсуждение и результаты

В работе получены решения уравнения теплопроводности с изотермическими граничными условиями как с учетом конвекции, так и без нее. В случае уравнения без конвекции решение получено двумя способами: методом Фурье и с помощью интеграла Пуассона, оба в виде рядов. Метод Фурье удовлетворяет граничным условиям при любой точности, но в начальные моменты времени не может воссоздать точное решение даже с помощью тысячи первых слагаемых ряда. С вычислительной точки зрения интеграл Пуассона предпочтительнее: приемлемая точность достигается десятком слагаемых. При любых значениях времени, в том числе малых, это решение полностью воспроизводит процесс теплопередачи.

При проведении исследований выстроился алгоритм, который в дальнейшем можно изменять при помощи модификаций уравнения и граничных условий:

- находим стационарное решение;
- вычитаем его из неизвестной функции, для получившейся функции выводим начальные и граничные условия;
- используя метод Фурье, получаем решение;
- распространяем начальное условие модифицированной функции на всё пространство, получаем решение с помощью интеграла Пуассона.

Заключение и выводы

На основании полученных результатов и работ других авторов [Крайнов и др., 2009; Карпович и др., 2015; Крайнов, Миньков, 2016; Полянский, 2019] можно сформулировать примерный план дальнейшего исследования:

- получить решение уравнения теплопроводности с учетом конвекции с помощью интеграла Пуассона;
- решить уравнения теплопроводности с изотермическими граничными условиями в цилиндрических координатах;
- получить двумерное решение уравнения теплопроводности как без конвекции, так и с учетом конвекции;
- сравнить все полученные решения с численными методами (явная и неявная схемы) и компьютерными симуляторами (метод конечных объемов);
- найти решения уравнения теплопроводности с неизотермическими граничными условиями и нестационарной фильтрацией (учесть изменение скорости).

Представляет интерес поведение найденных решений на бесконечности [Гладков, 1996].

Список источников

- Гильманов А. Я., Шевелёв А. П. 2021. Моделирование пароциклического воздействия на нефтяные пласты с учетом конвективных потоков // Экспериментальные методы исследования пластовых систем: проблемы и решения. С. 82.

- Гладков А. Л. 1996. О неограниченных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с сильной конвекцией на бесконечности // Журнал вычислительной математики и математической физики. Том 36. № 10. С. 73–86.
- Дорошевич Е. А. 2009. Решения уравнения теплопроводности для расчета температурных режимов в помещениях // Наука — образованию, производству, экономике: материалы 7-й Междунар. науч.-техн. конф.: в 3 т. Минск: Белорус. нац. техн. ун-т. Том 2. С. 381.
- Дульнев Г. Н. 2012. Теория тепло- и массообмена. СПб.: НИУ ИТМО. 195 с.
- Жумаев Ж., Тошева М. М. 2022. Моделирование стационарной теплопроводности при свободной конвекции в ограниченном объеме // Universum: технические науки. № 4–3 (97). С. 34–37.
- Карпович Д. С., Суша О. Н., Коровкина Н. П., Кобринец В. П. 2015. Аналитический и численный методы решения уравнения теплопроводности // Труды БГТУ. Серия 3: Физико-математические науки и информатика. № 6 (179). С. 122–127.
- Крайнов А. Ю., Рыжих Ю. Н., Тимохин А. М. 2009. Численные методы в задачах теплопереноса: учеб.-метод. пос. Томск: Томский гос. ун-т. 114 с.
- Крайнов А. Ю., Миньков Л. А. 2016. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса: учеб. пос. Томск: STT. 92 с.
- Крайнов А. Ю., Моисеева К. М. 2017. Конвективный теплоперенос и теплообмен: учеб. пос. Томск: STT. 80 с.
- Петровский И. Г. 2009. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Физматлит. 207 с.
- Полянский С. Д. 2019. Решение двумерных уравнений в частных производных численными методами // Новые информационные технологии в научных исследованиях: материалы 24-й Всерос. науч.-техн. конф. студентов, молодых ученых и специалистов. Рязань: Рязанский гос. радиотехн. ун-т им. В. Ф. Уткина. С. 68–70.
- Попов М. И., Соболева Е. А. 2016. Приближенное аналитическое решение внутренней задачи кондуктивно-ламинарной свободной конвекции // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. № 4 (70). С. 78–84. <https://doi.org/10.20914/2310-1202-2016-4-78-84>
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. 2004. Уравнения математической физики: учеб. для студентов физ.-мат. спец. ун-тов. 7-е изд. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, Наука. 798 с.
- Чернышов В. Е., Пивоварова И. И. 2020. Численное решение уравнения теплопроводности на примере расчета потерь количества тепла при нагнетании горячей воды в скважину // Студент года 2020: сб. ст. 15-го Междунар. науч.-исслед. конкурса. Пенза: Наука и Просвещение. С. 8–13.
- Шатров О. А., Щерица О. В., Мажорова О. С. 2018. Параллельный алгоритм для решения уравнений термогравитационной конвекции // Препринты Института прикладной математики им. М. В. Келдыша. № 239. С. 1–21. <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-239>
- Abdulla — Al — Mamun, Md. Shajib Ali, Md. Munnu Miah. 2018. A study on an analytic solution 1D heat equation of a parabolic partial differential equation and implement in computer programming // International Journal of Scientific & Engineering Research. Vol. 9. No. 9. Pp. 913–921.
- Babayar-Razlighi B. 2023. Numerical solution of heat equation with specification of heat flux on the boundary by the Legendre Wavelets // Iranian Conference on Mathematical Physics.
- Cannon J. R. 1984. The One-Dimensional Heat Equation. Cambridge University Press. 512 p.

References

- Gilmanov, A. Ya., & Shevelev, A. P. (2021). Modeling of steam-cyclic impact on oil reservoirs taking into account convective flows. *Experimental methods for studying reservoir systems: Problems and solutions* (p. 82). [In Russian]
- Gladkov, A. L. (1996). Unbounded solutions of the nonlinear heat-conduction equation with strong convection at infinity. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 36(10), 73–86. [In Russian]
- Doroshevich, E. A. (2009). Solutions of the heat equation for calculating temperature conditions in rooms. *Science to education, production, economics: Proceedings of the 7th International scientific and technical conference in 3 vols.: Vol. 2* (p. 381). Belarusian National Technical University. [In Russian]
- Dulnev, G. N. (2012). *Theory of heat and mass transfer*. NRU ITMO. [In Russian]
- Jumayev, Ju., & Tosheva, M. M. (2022). Simulation of stationary thermal conductivity under free convection in a limited volume. *Universum: Engineering Sciences*, (4–3), 34–37. [In Russian]
- Karpovich, D. S., Susha, O. N., Korovkina, N. P., & Kobrinets, V. P. (2015). Analytical and numerical methods for solving the heat equation. *Proceedings of BSTU. Series 3: Physical and Mathematical Sciences and Informatics*, (6), 122–127. [In Russian]
- Krainov, A. Yu., Ryzhykh, Yu. N., & Timokhin, A. M. (2009). *Numerical methods in heat transfer problems*. Tomsk State University. [In Russian]
- Krainov, A. Yu., & Minkov, L. L. (2016). *Numerical methods for solving problems of heat and mass transfer*. STI. [In Russian]
- Krainov, A. Yu., & Moiseeva, K. M. (2017). *Convective heat transfer and heat transfer*. STI. [In Russian]
- Petrovsky, I. G. (2009). *Lectures on the theory of ordinary differential equations*. Fizmatlit. [In Russian]
- Polyansky, S. D. (2019). Solving two-dimensional partial differential equations by numerical methods. *New information technologies in scientific research: Proceedings of the 24th All-Russian scientific and technical conference* (pp. 68–70). Ryazan State Radio Engineering University named after V. F. Utkin. [In Russian]
- Popov, M. I., & Soboleva, E. A. (2016). The approximate analytical solution of the internal problem of conductive and laminar free convection. *Proceedings of the Voronezh State University of Engineering Technologies*, (4), 78–84. <https://doi.org/10.20914/2310-1202-2016-4-78-84> [In Russian]
- Tikhonov, A. N., & Samarsky, A. A. (2004). *Equation of mathematical physics* (7th ed.). Moscow State University, Nauka. [In Russian]
- Chernyshov, V. E., & Pivovarova, I. I. (2020). Numerical solution of the thermal conductivity equation on the example of calculating the loss of the heat amount when injecting of hot water into the well. *Student of the year 2020: Collection of articles of the 15th International research competition* (pp. 8–13). Nauka i Prosveshchenie. [In Russian]
- Shatrov, O. A., Shcheritsa, O. V., & Mazhorova, O. S. (2018). Parallel algorithm for solving the equations of thermogravitational convection. *Keldysh Institute Preprints*, (239), 1–21. <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-239> [In Russian]
- Abdulla — Al — Mamun, Md. Shajib Ali, & Md. Munnu Miah. (2018). A study on an analytic solution 1D heat equation of a parabolic partial differential equation and implement in computer programming. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 9(9), 913–921.

- Babayar-Razlighi, B. (2023). Numerical solution of heat equation with specification of heat flux on the boundary by the Legendre Wavelets. *Iranian Conference on Mathematical Physics*.
- Cannon, J. R. (1984). *The one-dimensional heat equation*. Cambridge University Press.

Информация об авторе

Родион Михайлович Ганопольский, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой моделирования физических процессов и систем, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия
r.m.ganopolskij@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7682-9830>

Information about the author

Rodion M. Ganopolskij, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia
r.m.ganopolskij@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7682-9830>