

Моделирование нестационарных режимов работы турбокомпрессоров с учетом отложений, образованных в межлопаточных каналах проточной части

Михаил Сергеевич Степанов¹✉, Алексей Вадимович Бунякин²,
Владислав Игоревич Дунаев¹

¹ Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия

² Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Контакт для переписки: m.s.stepanov@mail.ru✉

Аннотация. Классическая модель Мура–Грейтцера, описывающая нестационарные режимы турбокомпрессоров, не учитывает неравномерное распределение отложений в межлопаточных каналах, что ограничивает ее применение в задачах диагностики. В работе предложена модификация модели, основанная на разделении каналов на две группы — чистые и содержащие отложения. Получена система дифференциальных уравнений третьего порядка, учитывающая перераспределение расходов между указанными группами каналов. Численное интегрирование модифицированной системы методом Рунге–Кутты и анализ сечений Пуанкаре показали, что при фиксированном числе загрязненных каналов наблюдается дрейф фазовой траектории при сохранении амплитуд колебаний степеней сжатия.

Введен диагностический параметр, равный отношению амплитуд колебаний степени сжатия в загрязненных каналах к аналогичной величине в чистых каналах. Установлена количественная связь диагностического параметра с числом загрязненных каналов. Для практической реализации разработана имитационная модель сигнала давления, регистрируемого датчиками на статоре. Спектральный анализ сигнала методом быстрого преобразования Фурье позволяет выделить две частотные составляющие, отношение амплитуд которых соответствует значению диагностического параметра.

Предложенный подход создает основу для оперативной диагностики состояния проточной части турбокомпрессора в процессе эксплуатации без остановки агрегата.

Ключевые слова: дисбаланс, отложения, модель Мура–Грейтцера, диагностика, сечение Пуанкаре, квазипериодические колебания

Цитирование: Степанов М. С., Бунякин А. В., Дунаев В. И. 2026. Моделирование нестационарных режимов работы турбокомпрессоров с учетом отложений, образованных в межлопаточных каналах проточной части // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 12. № 2 (46). С. 136–154. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-136-154>

Поступила 17.03.2026; одобрена 25.04.2026; принята 06.05.2026

Modeling of non-stationary modes of operation of turbo compressors taking into account deposits formed in the interblade channels of the flow part

Mikhail S. Stepanov¹✉, Aleksey V. Bunyakin², Vladislav I. Dunaev¹

¹ Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia

² Kuban State University, Krasnodar, Russia

Corresponding author: m.s.stepanov@mail.ru✉

Abstract. The classical Moore–Greitzer model, which describes the non-stationary modes of turbo compressors, does not take into account the uneven distribution of deposits in the interblade channels, which limits its application in diagnostic tasks. In this paper, a modification of the model is proposed based on the division of the channels into two groups: clean channels and channels containing deposits. A third-order system of equations is obtained, which takes into account the redistribution of flows between the groups. Numerical integration by the Runge–Kutta method and the analysis of Poincaré sections showed that at a fixed number of contaminated channels, there is a drift of the phase trajectory while maintaining the amplitudes of the pressure ratio.

A diagnostic parameter is introduced, equal to the ratio of the amplitudes of the pressure ratio in the contaminated channels to the similar value in the clean channels. A quantitative relation of the diagnostic parameter with the number of contaminated channels is established. For practical implementation, a simulation model of the pressure signal recorded by the sensor on the stator is developed. Spectral analysis of the signal by the fast Fourier transform allows distinguishing two frequency

components, the amplitude ratio of which corresponds to the value of the diagnostic parameter.

The proposed approach provides a basis for the operational diagnostics of the flow path of a turbo compressor during operation without stopping the unit.

Keywords: imbalance, deposits, Moore–Greitzer model, diagnostics, Poincaré section, quasi-periodic oscillations

Citation: Stepanov, M. S., Bunyakin, A. V. & Dunaev, V. I. (2026). Modeling of non-stationary modes of operation of turbo compressors taking into account deposits formed in the interblade channels of the flow part. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 12(2), 136–154. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-136-154>

Received Mar. 17, 2026; Reviewed Apr. 25, 2026; Accepted May 6, 2026

Введение

Динамика турбокомпрессоров, в частности нагнетателей природного газа, характеризуется рядом нестационарных и зачастую неустойчивых режимов. Эти явления не только снижают эффективность работы агрегата, но и могут привести к аварийным ситуациям. Для анализа и прогнозирования неустойчивых режимов широко используется модель Мура–Грейтцера [Moore, 1984], описывающая связь между расходом и степенью сжатия газа. В классическом виде модель представляет собой двумерную динамическую систему и позволяет качественно и количественно описывать развитие автоколебательных процессов [Willems, de Jager, 1998]. Фундаментальные аспекты устойчивости этой системы с позиций теории бифуркаций детально исследованы в работе [McCaughan, 1990], что заложило основу для анализа перехода к нестационарным режимам. Систематическое изложение методов моделирования и управления такими режимами представлено в монографии [Gravdahl, Egeland, 1999].

Развитие теоретических представлений о нестационарных режимах в компрессорах дано в работе [Greitzer, 1976], где предложена нелинейная модель для прогнозирования переходных процессов в компрессорной системе и введен критерий (параметр B), определяющий тип неустойчивости — помпаж или вращающийся срыв. Эта модель послужила основой для последующих исследований, включая вывод уравнений Мура–Грейтцера. Дальнейшее развитие идеи получили в работе [Moore, Greitzer, 1986], где представлена теория постсрывных переходных процессов в осевых компрессорах.

Модель Мура–Грейтцера применяется при решении различных прикладных задач. В частности, она используется для разработки систем активного подавления помпажа и вращающегося срыва [Epstein et al., 1989; Paduano et al., 2001]; в этих работах показана принципиальная возможность управления неустойчивыми режимами путем воздействия на параметры сети или самой машины. Экспериментальные исследования процессов зарождения срыва [Day, 1993] показывают, что модальные возмущения не всегда

предшествуют срыву, и выявляют важную роль возмущений малой пространственной протяженности, что впоследствии учитывается при модификации моделей. Обзор различных подходов к моделированию нестационарных течений в компрессорах представлен в работе [Longley, 1994], где проанализированы допущения и области применимости различных моделей. В исследовании [Hansen et al., 1981] модель адаптирована и верифицирована на экспериментальных данных для центробежного компрессора, что подтверждает её применимость для описания реальных агрегатов. Для анализа влияния конструктивных и режимных параметров на динамику системы используются экспериментальные исследования пульсаций давления [Hönen, 1999]. В работе [Badmus et al., 1996] исследовано нелинейное управление помпажом в осевых компрессорах на основе модели Мура–Грейтцера и показана эффективность бифуркационного подхода к синтезу регуляторов. В работе [Zhang et al., 2025] представлен обзор современных методов раннего предупреждения неустойчивости, включающих использование динамических моделей для диагностики состояния проточной части.

Дальнейшее развитие моделей на основе уравнений Мура–Грейтцера отражено в исследовании [Shahriyari et al., 2024], где предложена модифицированная модель, учитывающая вторую производную расхода и скорость дросселирования, а также дан обзор методов обнаружения неустойчивых режимов, включая спектральный анализ. Сравнительный анализ показал, что новая модель более адекватно описывает поведение системы при интенсивных возмущениях по сравнению с классической. Обзор подходов к моделированию и управлению помпажом, включая сравнение модели Мура–Грейтцера с интеллектуальными методами, выполнен в работе [Khosravi et al., 2024], где отмечено, что классическая модель имеет погрешности при долговременном моделировании, но остается базовой для анализа динамики.

В работе [Su et al., 2014] на основе модели Мура–Грейтцера проанализированы методы активного управления устойчивостью авиационных двигателей, включая модальное и нелинейное управление. Показано, что использование модели позволяет эффективно подавлять вращающийся срыв и расширять рабочий диапазон компрессора. Исследование [Hosseindokht, 2025] посвящено разработке адаптивного PD-регулятора для подавления помпажа на основе нелинейной модели Мура–Грейтцера; анализ устойчивости выполнен с использованием фазовой плоскости и матрицы Якоби.

В контексте задач диагностики модель Мура–Грейтцера применяется для анализа нестационарных сигналов давления. Подходы к созданию ориентированных на управление физических моделей, предсказывающих предел устойчивой работы, развиты в работе [SAE International, 2019], где одномерная модель компрессора интегрирована с уравнениями Мура–Грейтцера для расчета статических характеристик.

Одной из актуальных проблем, влияющих на работу турбокомпрессора, является образование отложений в его проточной части, что приводит к изменению характеристик каналов и, как следствие, к изменению всей картины нестационарных процессов. Существующие модели, включая классическую модель Мура–Грейтцера, не учитывают возможность неравномерного распределения отложений по каналам.

Целью настоящей работы является построение модифицированной модели Мура–Грейтцера, учитывающей неравномерность распределения отложений в межлопаточных каналах, что позволяет установить количественную связь между динамикой системы и числом каналов, содержащих отложения.

В работе [Степанов и др., 2025] получено выражение для момента силы на валу турбокомпрессора в зависимости от числа каналов с отложениями, их толщины, конструктивных параметров агрегата и режима его работы. При этом количество каналов с отложениями остается неизвестным и требует определения, что и является предметом настоящего исследования.

Модифицированная модель Мура–Грейтцера

Для прогнозирования и анализа динамики нестационарных режимов работы турбокомпрессоров используется двумерная модель Мура–Грейтцера (без учета вращающегося срыва), описываемая системой двух уравнений [Moore, 1984]:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{l_c}(\psi_c(\varphi) - \psi), \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{1}{4B^2 l_c}(\varphi - \varphi_\tau(\psi)).\end{aligned}\tag{1}$$

$$\psi_c(\varphi) = k_K \omega^2 + k_H \omega^2 \left(1 + 1,5 \left(\frac{\varphi}{k_W \omega} - 1 \right) - 0,5 \left(\frac{\varphi}{k_W \omega} - 1 \right)^3 \right).$$

$$\varphi_\tau(\psi) = \delta \sqrt{\psi}.$$

В системе (1) введены следующие обозначения: ψ — степень сжатия, $\psi = \frac{p}{p_0}$; p — текущее давление в турбокомпрессоре; p_0 — давление на входе в рабочие каналы (считается переменным); φ — относительный расход газа, $\varphi = \frac{q}{q_0}$; q — текущий расход газа в одном межлопаточном канале; q_0 — максимальный расход газа в одном межлопаточном канале; τ — безразмерное время, $\tau = \frac{tU}{R}$; t — время; U — тангенциальная скорость в среднем диаметре рабочего колеса; R — средний радиус нагнетателя; $\psi_c(\varphi)$ — характеристика взаимосвязи расхода и степени сжатия; $\varphi_\tau(\psi)$ — характеристика сети; δ — параметр дросселирования; l_c — эффективная длина нагнетателя; B — параметр Грейтцера; k_K , k_H , k_W — конструктивные параметры агрегата; ω — частота вращения ротора, рад/с.

Модель Мура–Грейтцера описывает возникновение и развитие автоколебательных режимов при компримировании газа в турбокомпрессоре. Это иллюстрируется фазо-

вым портретом с устойчивым предельным циклом со следующим набором параметров $l_C = 3, B = 2,23, \delta = 0,4$. Паспортные значения агрегата: $\omega = 540, k_K = 5 \cdot 10^{-6}, k_H = 9 \cdot 10^{-8}, k_W = 5 \cdot 10^{-4}, \varphi(0) = 1, \psi(0) = 1,43$ [Григорьев и др., 2019; Gravdahl, Egeland, 1997].

Для построения фазового портрета применяется метод Рунге–Кутты 4-го порядка аппроксимации с шагом по времени 0,001, $\tau \in [0; 1000]$ (рис. 1).

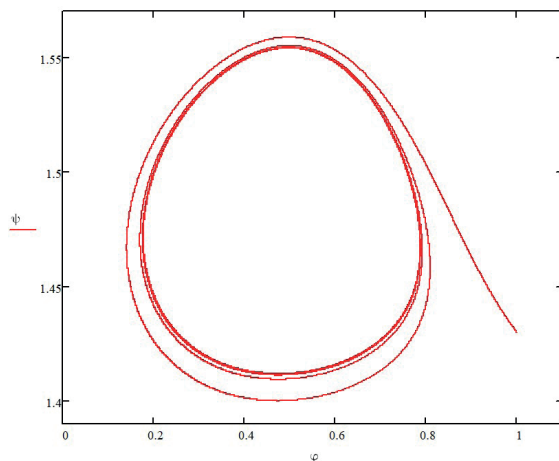


Рис. 1. Фазовый портрет решения двумерной системы уравнений Мура–Грейтцера с устойчивым (предельным) циклом — автоколебательный режим

Fig. 1. Phase portrait of the solution of the two-dimensional Moore–Greitzer system with a stable limit cycle — self-oscillating mode

Предлагается модификация классической модели (1), учитывающая неравномерность загрязнения проточной части турбокомпрессора. Модифицированная система Мура–Грейтцера моделирует динамику потоков в двух группах каналов, описывая расход и сжатие газа как в межлопаточных каналах с отложениями, так и без них. При этом размерность модифицированной системы увеличивается на единицу по отношению к классической.

Запишем уравнения (1) отдельно для межлопаточных каналов с отложениями и без них в виде расщепленной системы. Суть модификации состоит в том, что неизвестное давление на входе в рабочее колесо p_0 находится из условия постоянства общего расхода (который поддерживается АСУ агрегата):

$$Q = (k - j)q + jq_*, \quad (2)$$

где Q — общий эксплуатационный расход газа, k — количество межлопаточных каналов в рабочем колесе, j — количество межлопаточных каналов с наличием отложений, q_* — текущий расход газа в одном межлопаточном канале с наличием отложений.

Следуя (1), $\varphi_* = \frac{q_*}{q_0}$ — относительный расход газа в одном межлопаточном канале с наличием отложений.

Тогда из условия (2) имеем:

$$\varphi_* = \frac{1}{j} \left(k \frac{Q}{Q_0} - (k-j) \varphi \right),$$

где $Q_0 = q_0 k$ — максимальный расход газа на всем рабочем колесе.

Значит, расщепленная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{l_c} (\psi_c(\varphi) - \psi), \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{1}{4B^2 l_c} (\varphi - \varphi_\tau(\psi)), \\ \frac{d\psi_*}{d\tau} &= \frac{1}{4B^2 l_c} (\varphi_* - \varphi_\tau(\psi_*)). \end{aligned} \quad (3)$$

В системе (3) введены следующие обозначения: p_* — текущее давление в каналах с отложениями; $\psi_* = \frac{p_*}{p_0}$.

Дифференцируя (2), имеем:

$$(k-j) \frac{d\varphi}{d\tau} + j \frac{d\varphi_*}{d\tau} = 0.$$

Тогда с учетом двух первых выражений (3) получим:

$$(k-j) \left(\psi_c(\varphi) - \frac{p}{p_0} \right) + j \left(\psi_c(\varphi_*) - \frac{p_*}{p_0} \right) = 0$$

или

$$\frac{1}{p_0} = \frac{(k-j)\psi_c(\varphi) + j\psi_c(\varphi_*)}{(k-j)p + jp_*},$$

отсюда

$$\frac{p}{p_0} = \frac{(k-j)\psi_c(\varphi) + j\psi_c(\varphi_*)}{k-j + j\frac{\psi_*}{\psi}} = \psi$$

и

$$\frac{p_*}{p_0} = \frac{(k-j)\psi_c(\varphi) + j\psi_c(\varphi_*)}{(k-j)\frac{\psi}{\psi_*} + j} = \psi_*.$$

Подставляя значения ψ и ψ_* из двух последних выражений в расщепленную систему (3), получим модифицированную систему Мура–Грейтцера:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{l_c} \left(\psi_c(\varphi) - \psi \frac{(k-j)\psi_c(\varphi) + j\psi_c(\varphi_*)}{(k-j)\psi + j\psi_*} \right), \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{1}{4B^2 l_c} \left(\varphi - \varphi_\tau \left(\psi \frac{(k-j)\psi_c(\varphi) + j\psi_c(\varphi_*)}{(k-j)\psi + j\psi_*} \right) \right), \\ \frac{d\psi_*}{d\tau} &= \frac{1}{4B^2 l_c} \left(\varphi_* - \varphi_\tau \left(\psi_* \frac{(k-j)\psi_c(\varphi) + j\psi_c(\varphi_*)}{(k-j)\psi + j\psi_*} \right) \right), \\ \varphi_* &= \frac{1}{j} \left(k \frac{Q}{Q_0} - (k-j)\varphi \right).\end{aligned}\tag{4}$$

Система (4) численно решается методом Рунге–Кутты 4-го порядка аппроксимации с набором параметров $\varphi(0) = 0,5$, $\psi(0) = 1,43$, $\psi_*(0) = 1,44$ и шагом по времени 0,001, $\tau \in [0; 1000]$.

Построим фазовые портреты решения модифицированной системы Мура–Грейтцера для $j = 4, 5, 6$ при $\frac{Q}{Q_0} = 0,5$, что соответствует тому, что агрегат работает на половине допустимого расхода газа.

На рис. 2а наблюдается дрейф фазовой траектории вдоль осей ψ , ψ_* в сторону увеличения степеней сжатия. На рис. 2б отражается незначительный дрейф траектории вблизи неустойчивого цикла. На рис. 2с фазовая траектория дрейфует вдоль осей ψ , ψ_* в сторону уменьшения степеней сжатия.

Интервал численного интегрирования $\tau \in [0; 1000]$ позволяет визуализировать как выход на цикл (приближение к нему), так и дрейф траектории (уход от неустойчивого цикла) (см. рис. 2).

Основное качество, характеризующее данные дрейфы фазовых траекторий, состоит в том, что амплитуды колебания траекторий на одном витке $\Delta\psi$ и $\Delta\psi_*$ (максимальные диапазоны изменения на одном витке) как по вертикальной, так и по горизонтальной оси практически неизменны. Это дает возможность введения диагностического параметра D_j , представляющего собой отношение амплитуд колебания степеней сжатия в каналах с отложениями $\Delta\psi_*$ и без них $\Delta\psi$:

$$D_j = \frac{\Delta\psi_*}{\Delta\psi}.\tag{5}$$

Диагностический параметр D_j является отношением диапазонов колебания степеней сжатия в каналах с отложениями и без них и определяет целочисленный параметр j (при «дрейфе траектории» D_j почти постоянно, рис. 2 (а, б, с) и табл. 1).

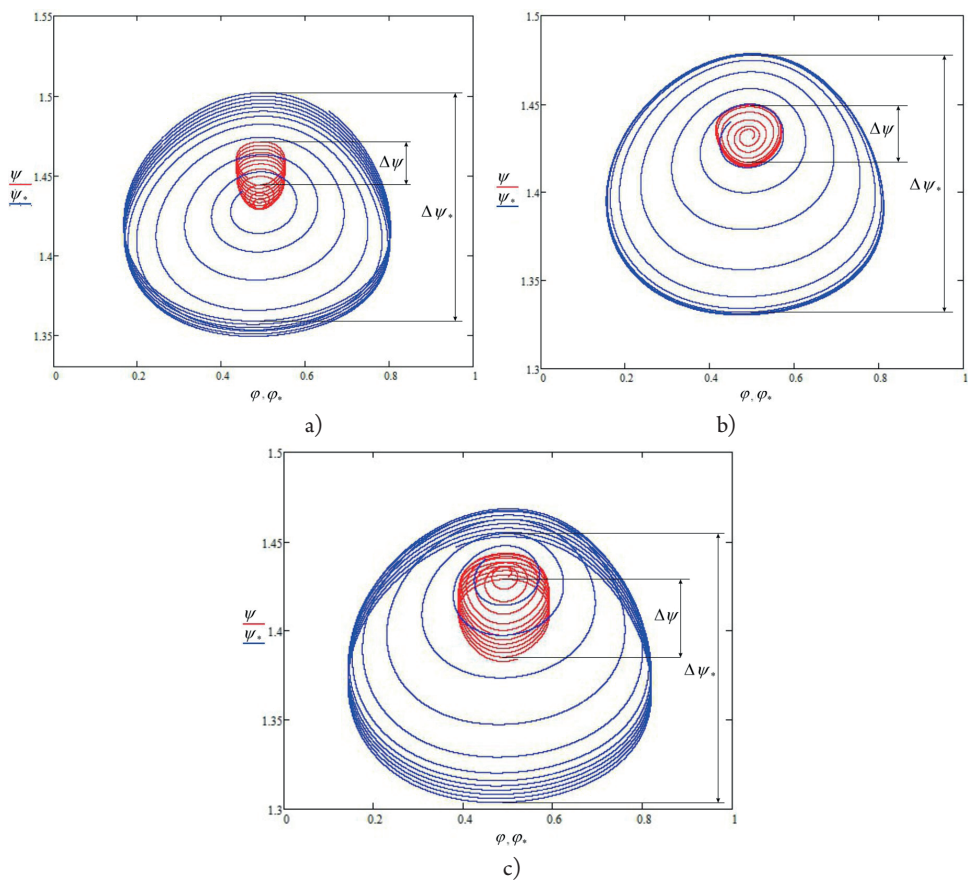


Рис. 2. Фазовые портреты решения модифицированной системы уравнений Мура–Грейтцера: при а) $j = 4$, б) $j = 5$, в) $j = 6$
Fig. 2. Phase portraits of the solution to the modified Moore–Greitzer equations for а) $j = 4$, б) $j = 5$, в) $j = 6$

В табл. 1 приведены значения параметра D_j от 1 до 13 каналов с наличием отложений.

Таблица 1. Значение параметра D_j
Table 1. Values of the parameter D_j

j	$\Delta\psi$	$\Delta\psi^*$	D_j
1	0,01118	0,13541	12,10956
2	0,01507	0,1386	9,19136
3	0,02051	0,14222	6,93424
4	0,02708	0,14493	5,35078
5	0,0348	0,14738	4,2339
6	0,04371	0,14939	3,41743
7	0,05382	0,15077	2,80131

Окончание табл. 1

Table 1 (end)

j	$\Delta\psi$	$\Delta\psi_*$	D_j
8	0,06507	0,15122	2,32375
9	0,07731	0,15037	1,94506
10	0,0902	0,14782	1,63877
11	0,10324	0,14315	1,3866
12	0,11575	0,13608	1,17559
13	0,127	0,12654	0,99635

Параметр D_j поддается измерению при помощи высокочастотных датчиков колебаний давления, устанавливаемых на внутренней поверхности статора турбокомпрессора и на входе в него, с последующей спектральной обработкой значения степени сжатия

$$\psi = \frac{P}{P_0}.$$

Для качественного анализа неустойчивого предельного цикла модифицированной системы уравнений (3), подтверждающего неизменность амплитуды колебаний при дрейфе фазовой траектории, применим метод сечения Пуанкаре [Wiggins, 1990]. Данный метод позволяет перейти от анализа непрерывной траектории в фазовом пространстве к анализу дискретного двумерного отображения, что особенно наглядно для выявления квазипериодичности [Кондратьев, Ляпцев, 2012].

Сечение Пуанкаре задается в виде двух гиперплоскостей, каждая размерности «3», в четырехмерном пространстве $(\varphi, \varphi_*, \psi, \psi_*)$, заданных уравнениями $\varphi = 0,5$ и $\varphi_* = 0,5$. Выбор указанных значений обусловлен их соответствием средним точкам предельного цикла для соответствующих групп каналов (см. рис. 2). Эти две трехмерные гиперплоскости имеют пересечение в виде двумерной плоскости сечения Пуанкаре ($3 + 3 - 4 = 2$, здесь 4 — это размерность объемлющего пространства).

На рис. 3 приведены сечения Пуанкаре при $j = 4, 5, 6$.

На графиках рис. 3 представлена зависимость между координатами точек пересечения фазовых траекторий $\psi^{(k)}, \psi_*^{(k)}$ с этой плоскостью. Индекс k нумерует последовательность этих пересечений, соответствующих последовательности витков, и на графиках эти точки соединяются непрерывными линиями. Выход на почти прямые участки соответствует дрейфу траектории, и параллельность линий этих участков подтверждает почти неизменность параметра D_j при дрейфе траекторий.

Разница между кривыми на каждом графике (см. рис. 3) соответствует пересечениям фазовых траекторий с плоскостью сечения Пуанкаре, отличающимся диаметрально противоположными точками одного витка.

Полученное сечение Пуанкаре свидетельствует о неустойчивости предельного цикла модифицированной системы Мура–Грейтцера гиперболического типа, а выход на почти прямые участки показывает практическую неизменность диаметра витков при дрейфе фазовой траектории.

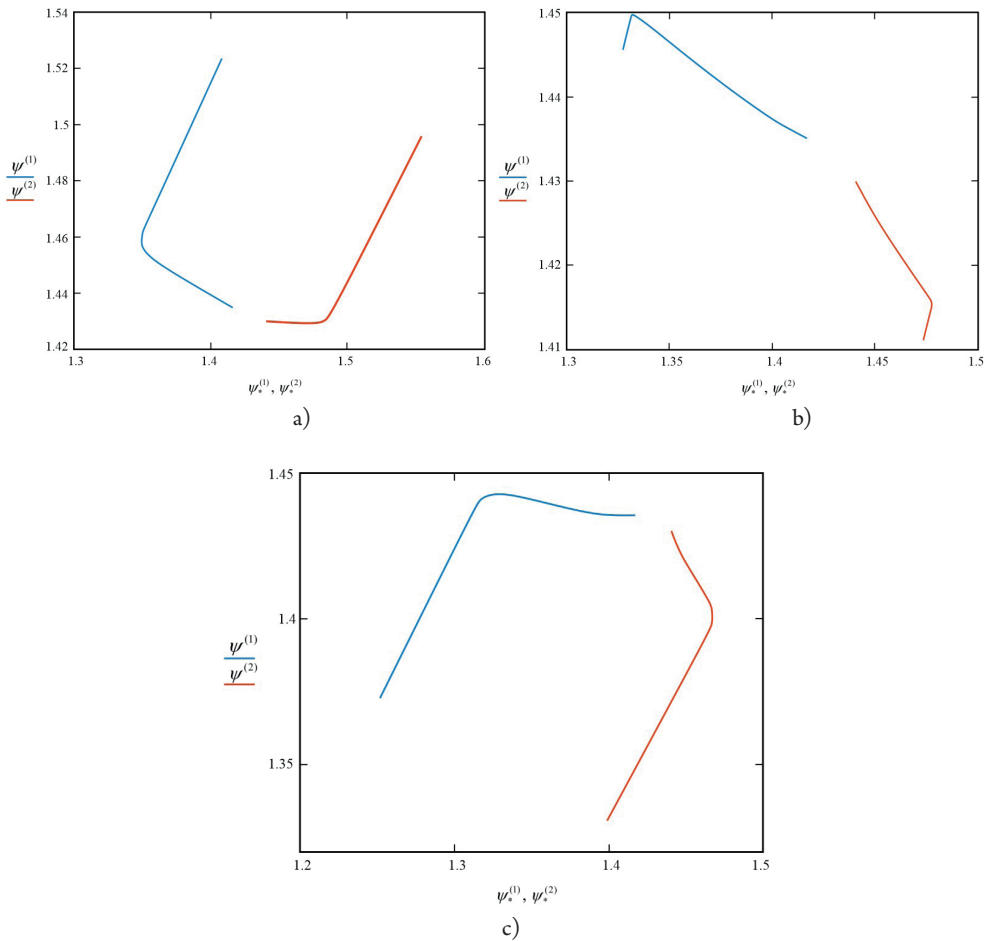


Рис. 3. Сечение Пуанкаре для фазового портрета решения модифицированной системы уравнений Мура–Грейтцера: при а) $j = 4$, б) $j = 5$, в) $j = 6$

Fig. 3. Poincaré section of the phase portrait of the solution to the modified Moore–Greitzer equations for а) $j = 4$, б) $j = 5$, в) $j = 6$

Продолжительность цикла модифицированной системы Мура–Грейтцера слабо меняется при дрейфе траектории и имеет порядок величины, равный $\tau_{\text{цикл}} \approx 100$ по безразмерному времени τ , это соответствует периоду $t = \frac{\tau_{\text{цикл}}}{\omega}$, где $\omega = 540$ рад/с — циклическая частота вращения ротора, $t = 0,0185$ с. За время периода происходит порядка 10 оборотов ротора, следовательно установление высокочувствительного датчика давления на внутренней поверхности статора может выявлять непосредственно количество каналов j , в которых степень сжатия существенно отличается от каналов без отложений, что видно из рис. 4.

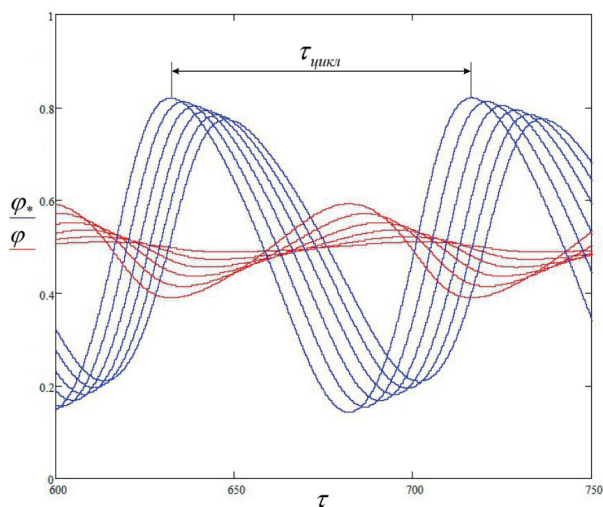


Рис. 4. Зависимости φ и φ^* от безразмерного времени τ численного решения модифицированной системы уравнений Мура–Грейтцера при $j = 1...6$

Fig. 4. Dependencies φ and φ^* on dimensionless time τ of the numerical solution of the modified Moore–Greitzer system for $j = 1...6$

Таким образом, анализ сечений Пуанкаре показывает, что при дрейфе фазовой траектории амплитуды колебаний степеней сжатия ψ и ψ^* остаются практически неизменными, а их отношение D_j сохраняет постоянное значение для фиксированного числа загрязненных каналов j (см. табл. 1). Следовательно, параметр D_j может быть использован в качестве диагностического признака, доступного для измерения по пульсациям давления в проточной части. При вращении ротора со скоростью ω датчики фиксируют пульсации давления, обусловленные прохождением лопаток. Поскольку межлопаточные каналы разделены на две группы (чистые и содержащие отложения), значения степеней сжатия на входе и выходе будут моделироваться с частотой, кратной числу лопаток. Для моделирования такого сигнала используем функцию, описывающую измеряемую степень сжатия и включающую имитацию измерительных шумов:

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{\psi_*^{\max} + \psi_*^{\min} + \psi^{\max} + \psi^{\min}}{4} - \frac{\psi_*^{\max} - \psi_*^{\min}}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} k t\right) + \\ + \frac{\psi_*^{\max} - \psi_*^{\min}}{10} \sin\left(\frac{8\pi}{T_0} k t\right), & 0 \leq t < T_0 \frac{j}{k}, \\ \frac{\psi_*^{\max} + \psi_*^{\min} + \psi^{\max} + \psi^{\min}}{4} - \frac{\psi_*^{\max} - \psi_*^{\min}}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} k t\right) + \\ + \frac{\psi_*^{\max} - \psi_*^{\min}}{10} \sin\left(\frac{8\pi}{T_0} k t\right), & T_0 \frac{j}{k} \leq t < T_0. \end{cases} \quad (6)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}k \approx 883$ рад/с; k — количество межлопаточных каналов в рабочем колесе;

j — число каналов с наличием отложений; t — время; T_0 — продолжительность цикла модифицированной системы Мура–Грейтцера.

Выражение (5) имитирует гармонические составляющие колебаний степени сжатия, соответствующие двум группам каналов (j загрязненных и $k - j$ незагрязненных). Отношение амплитуд этих составляющих пропорционально отношениям высот пиков спектральной диаграммы (спектр Фурье — разложения временного ряда «сигнала» $\psi(t)$) на основной частоте ω_0 .

Для численного эксперимента были выбраны следующие параметры, соответствующие реальному центробежному нагнетателю (см. табл. 1).

Значения степеней сжатия взяты из результатов расчета по модифицированной модели Мура–Грейтцера для $j = 5$: $\psi_*^{\min} = 1,3312$, $\psi_*^{\max} = 1,4784$, $\psi^{\min} = 1,4148$, $\psi^{\max} = 1,4498$.

На рис. 5 представлен фрагмент полученного таким образом модельного сигнала $\psi(t)$.

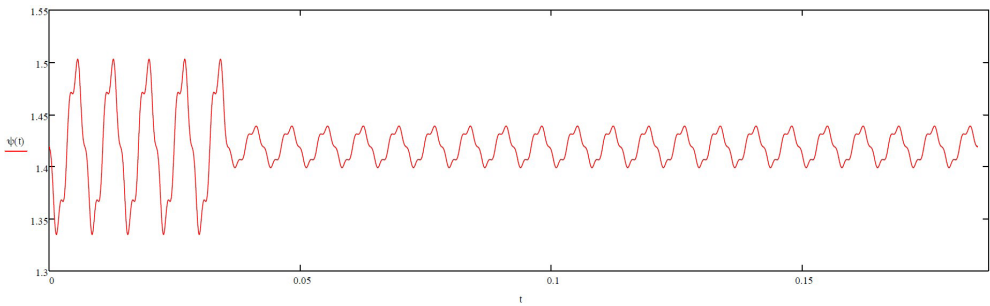


Рис. 5. Имитация сигнала $\psi(t)$

Fig. 5. Simulated signal $\psi(t)$

Для выделения частотных составляющих и оценки отношения амплитуд, соответствующих чистым каналам и каналам с отложениями, был применен метод быстрого преобразования Фурье (БПФ) при помощи стандартной функции из библиотеки MathCad (функция fft) с параметрами дискретизации: $N = 2048$ — количество точек БПФ, шаг по времени $\Delta t = \frac{T_0}{N}$, что обеспечило частотное разрешение $\Delta f = \frac{2\pi}{N \Delta t}$, амплитудный спектр рассчитывался для частот $f_m = m\Delta f$, $m = 0, 1 \dots \frac{N}{2}$. Результат спектрального анализа показан на рис. 6.

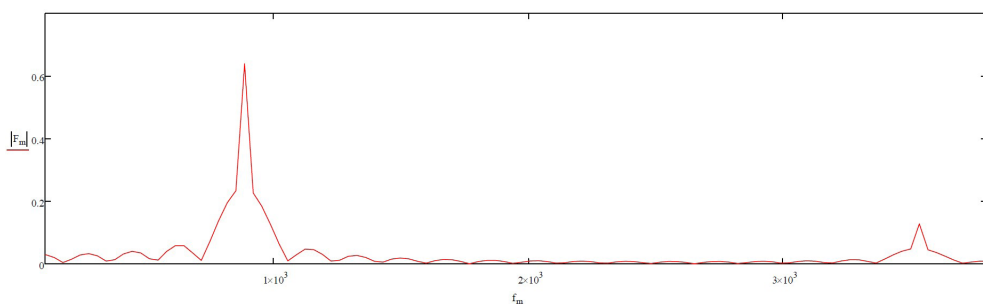


Рис. 6. Преобразование Фурье сигнала $\psi(t)$

Fig. 6. Fourier transformation of the signal $\psi(t)$

На спектре отчетливо наблюдаются два пика на основной частоте $\omega_0 \approx 883$ рад/с, соответствующей колебаниям давления ввиду прохождения каналов и перемычек между ними около точки установки датчика давления: более крутой (высокий) пик соответствует модуляции, связанной с каналами, содержащими отложения; второй — пологий (меньшей высоты) — незагрязненным каналам. Отношение высот этих пиков составляет величину, приблизительно равную 3,5. Таким образом:

$$D_j = \frac{\Delta\psi_*}{\Delta\psi} \approx 3,5.$$

Здесь знак приближенного равенства означает, что, обращаясь к табл. 1, в которой приведены значения диагностического параметра D_j для различного числа загрязненных каналов j , находим, что полученное значение соответствует $j = 5 \div 6$.

Шумы имитируются регулярными модами $\frac{\psi_*^{\max} - \psi_*^{\min}}{10} \sin\left(\frac{8\pi}{T_0} k t\right)$ и $\frac{\psi_*^{\max} - \psi_*^{\min}}{10} \sin\left(\frac{8\pi}{T_0} k t\right)$ соответственно для одной и другой группы каналов (5).

Частота шумов условно принята в 4 раза выше, а амплитуды — в 5 раз меньше, чем у основной моды сигнала (см. рис. 5). В результате на спектральной диаграмме (рис. 6) появляются субгармоники, соответствующие шуму.

Качественное подобие гармоник основной моды и шумовых субгармоник обусловлено тем, что шум смоделирован регулярным образом, но при этом не меняется картина «совмещения пиков двух типов каналов на основной частоте». Такая же картина сохранится при произвольном расположении чистых и загрязненных каналов по окружности рабочего колеса, а не только при их групповом расположении.

Таким образом, реализован подход к приближенному определению количества каналов с наличием отложений по спектральным характеристикам пульсаций давления, измеряемых на входе и выходе рабочего колеса. Преимущество спектрального метода в инвариантности относительно порядка взаимного расположения каналов с отложени-

ями и без. Предложенный диагностический параметр D_j может быть выделен из спектра сигнала и однозначно (хотя и с точностью до единицы) связан с количеством загрязненных каналов с помощью заранее рассчитанной зависимости.

Заключение

В работе предложена модификация классической модели Мура–Грейтцера, позволяющая учитывать неравномерность распределения отложений в проточной части турбокомпрессора. Разработанная модель адекватно описывает наблюдаемое на практике явление медленного смещения фазового цикла при наличии загрязнений.

Введен новый диагностический параметр D_j , представляющий собой отношение диапазонов колебаний степени сжатия в загрязненных и чистых каналах. Показано, что данный параметр устойчив к изменению начальных условий и имеет четкую зависимость от количества загрязненных межлопаточных каналов j .

Установлено, что с увеличением количества загрязненных каналов значение параметра D_j уменьшается, выходя на единицу при приближении j к половине всех каналов рабочего колеса.

Предложенный подход открывает возможности для разработки систем оперативного мониторинга и диагностики состояния турбокомпрессора без его остановки, что является значительным практическим преимуществом по сравнению с традиционными методами.

Список источников

- Григорьев Л. И., Асирян А. В., Беккер А. С. 2019. Синергетические методы анализа помпажных явлений в работе центробежного компрессора газоперекачивающего агрегата // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. № 9. С. 36–45. [https://doi.org/10.33285/0132-2222-2019-9\(554\)-36-45](https://doi.org/10.33285/0132-2222-2019-9(554)-36-45)
- Кондратьев А. С., Ляпцев А. В. 2012. Сечения Пуанкаре при описании поведения нелинейных систем // Компьютерные инструменты в образовании. № 1. С. 39–47.
- Степанов М. С., Бунякин А. В., Дунаев В. И. 2025. Моделирование дисбаланса ротора нагнетателя, обусловленного отложениями в его проточной части // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 11. № 2 (42). С. 126–140. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2025-11-2-126-140>
- Badmus O. O., Chowdhury S., Nett C. N. 1996. Nonlinear control of surge in axial compression systems // Automatica. Vol. 32. No 1. Pp. 59–70. [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(95\)00104-2](https://doi.org/10.1016/0005-1098(95)00104-2)
- Day I. J. 1993. Stall inception in axial flow compressors // Journal of Turbomachinery. Vol. 115. No. 1. Pp. 1–9. <https://doi.org/10.1115/1.2929209>
- Epstein A. H., Ffowcs Williams J. E., Greitzer E. M. 1989. Active suppression of aerodynamic instabilities in turbomachines // Journal of Propulsion and Power. Vol. 5. No. 2. Pp. 204–211. <https://doi.org/10.2514/3.23137>

- Gravdahl J. T., Egeland O. 1997. A Moore–Greitzer axial compressor model with spool dynamics // *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 5. Pp. 4714–4719. <https://doi.org/10.1109/CDC.1997.649750>
- Gravdahl J. T., Egeland O. 1999. *Compressor Surge and Rotating Stall: Modelling and Control*. London: Springer. 225 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0827-6>
- Greitzer E. M. 1976. Surge and rotating stall in axial flow compressors — Part I: Theoretical compression system model // *Journal of Engineering for Power*. Vol. 98. No. 2. Pp. 190–198. <https://doi.org/10.1115/1.3446138>
- Greitzer E. M. 1976. Surge and rotating stall in axial flow compressors — Part II: Experimental results and comparison with theory // *Journal of Engineering for Power*. Vol. 98. No. 2. Pp. 199–211. <https://doi.org/10.1115/1.3446139>
- Hansen K. E., Jørgensen P., Larsen P. S. 1981. Experimental and theoretical study of surge in a small centrifugal compressor // *Journal of Fluids Engineering*. Vol. 103. No 3. Pp. 391–395. <https://doi.org/10.1115/1.3240796>
- Hönen H. 1999. Axial compressor stall and surge prediction by measurements // *International Journal of Rotating Machinery*. Vol. 5. No. 2. Pp. 77–87. <https://doi.org/10.1155/S1023621X9900007X>
- Hosseindokht S. M. 2025. Stability analysis for nonlinear compressor system and active adaptive controller against surge with antisurge valve // *arXiv preprint*. arXiv:2503.04337. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2503.04337>
- Khosravi A., Chatraei A., Shahgholian G., Kargar S.-M. 2024. Surge control in centrifugal compressor using dynamic controllers // *International Journal of Natural and Engineering Sciences*. Vol. 18. No 2. Pp. 92–107. URL: <https://www.ijnes.org/index.php/ijnes/article/view/766> (дата обращения: 15.06.2026)
- Liu Y., Du J., Zhao D. 2025. Advances in early warning and active control of compressor instabilities for aerospace applications // *Progress in Aerospace Sciences*. Vol. 159. Article 101156. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2025.101156>
- Longley J. P. 1994. A review of nonsteady flow models for compressor stability // *Journal of Turbomachinery*. Vol. 116. No. 2. Pp. 202–215. <https://doi.org/10.1115/1.2928354>
- McCaughan F. E. 1990. Bifurcation analysis of axial flow compressor stability // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. Vol. 50. No. 5. Pp. 1232–1253.
- Moore F. K. 1984. A theory of rotating stall of multistage axial compressors: Part 1, 2, and 3 // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. Vol. 106. Pp. 313–336. <https://doi.org/10.1115/1.3239567>
- Moore F. K., Greitzer E. M. 1986. A theory of post-stall transients in axial compression systems: Part I — Development of equations // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. Vol. 108. No. 1. Pp. 68–78. <https://doi.org/10.1115/1.3239893>
- Paduano J. D., Greitzer E. M., Epstein A. H. 2001. Compression system stability and active control // *Annual Review of Fluid Mechanics*. Vol. 33. No. 1. Pp. 491–517. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.33.1.491>
- SAE International. 2019. A physics-based, control-oriented turbocharger compressor model for the prediction of pressure ratio at the limit of stable operations // *SAE Technical Paper*. 2019-01-0320. <https://doi.org/10.4271/2019-01-0320>

- Shahriyari M. J., Firouzabadi A., Khaleghi H., Esmailifar S. M. 2024. A new model for compressor surge and stall control // *Scientific Reports*. Vol. 14. No. 1. Article 5347. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-55816-w>
- Su S., Lv Y., Huang S., Sun Z. 2014. Analysis of aircraft engine active stability control method // *Advances in Aeronautical Science and Engineering*. Vol. 5. No. 1. Pp. 7–11.
- Wiggins S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer. 672 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4067-7>
- Willems F., de Jager B. 1998. Modeling and control of rotating stall and surge: An overview // *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*. Vol. 1. Pp. 331–335. <https://doi.org/10.1109/CCA.1998.728438>

References

- Grigoriev, L. I., Asiryan, A. V., & Bekker, A. S. (2019). Synergetic methods of surge phenomena analysis in the operation of a centrifugal compressor of a gas pumping unit. *Automation, Telemechanization and Communication in Oil Industry*, (9), 36–45. [https://doi.org/10.33285/0132-2222-2019-9\(554\)-36-45](https://doi.org/10.33285/0132-2222-2019-9(554)-36-45) [In Russian]
- Kondratiev, A. S., & Lyaptsev, A. V. (2012). Poincaré sections in describing the behavior of nonlinear systems. *Computer Tools in Education Journal*, (1), 39–47. [In Russian]
- Stepanov, M. S., Bunyakin, A. V., & Dunaev, V. I. (2025). Modeling of supercharger rotor imbalance caused by deposits in its flow path. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 11(2), 126–140. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2025-11-2-126-140> [In Russian]
- Badmus, O. O., Chowdhury, S., & Nett, C. N. (1996). Nonlinear control of surge in axial compression systems. *Automatica*, 32(1), 59–70. [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(95\)00104-2](https://doi.org/10.1016/0005-1098(95)00104-2)
- Day I. J. (1993). Stall inception in axial flow compressors. *Journal of Turbomachinery*, 115(1), 1–9. <https://doi.org/10.1115/1.2929209>
- Epstein, A. H., Ffowcs Williams, J. E., & Greitzer, E. M. (1989). Active suppression of aerodynamic instabilities in turbomachines. *Journal of Propulsion and Power*, 5(2), 204–211. <https://doi.org/10.2514/3.23137>
- Gravdahl, J. T., & Egeland, O. (1997). A Moore–Greitzer axial compressor model with spool dynamics. *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, 5, 4714–4719. <https://doi.org/10.1109/CDC.1997.649750>
- Gravdahl, J. T., & Egeland, O. (1999). *Compressor Surge and Rotating Stall: Modelling and Control*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0827-6>
- Greitzer, E. M. (1976). Surge and rotating stall in axial flow compressors — Part I: Theoretical compression system model. *Journal of Engineering for Power*, 98(2), 190–198. <https://doi.org/10.1115/1.3446138>
- Greitzer, E. M. (1976). Surge and rotating stall in axial flow compressors — Part II: Experimental results and comparison with theory. *Journal of Engineering for Power*, 98(2), 199–211. <https://doi.org/10.1115/1.3446139>

- Hansen, K. E., Jørgensen, P., & Larsen, P. S. (1981). Experimental and theoretical study of surge in a small centrifugal compressor. *Journal of Fluids Engineering*, 103(3), 391–395. <https://doi.org/10.1115/1.3240796>
- Hönen, H. (1999). Axial compressor stall and surge prediction by measurements. *International Journal of Rotating Machinery*, 5(2), 77–87. <https://doi.org/10.1155/S1023621X9900007X>
- Hosseindokht, S. M. (2025). Stability analysis for nonlinear compressor system and active adaptive controller against surge with antisurge valve. *arXiv preprint. arXiv:2503.04337*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2503.04337>
- Khosravi, A., Chatraei, A., Shahgholian, G., & Kargar, S.-M. (2024). Surge control in centrifugal compressor using dynamic controllers. *International Journal of Natural and Engineering Sciences*, 18(2), 92–107. Retrieved June 15, 2026, from <https://www.ijnes.org/index.php/ijnes/article/view/766>
- Liu, Y., Du, J., & Zhao, D. (2025). Advances in early warning and active control of compressor instabilities for aerospace applications. *Progress in Aerospace Sciences*, 159, 101156. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2025.101156>
- Longley, J. P. (1994). A review of nonsteady flow models for compressor stability. *Journal of Turbomachinery*, 116(2), 202–215. <https://doi.org/10.1115/1.2928354>
- McCaughan, F. E. (1990). Bifurcation analysis of axial flow compressor stability. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50(5), 1232–1253.
- Moore, F. K. (1984). A theory of rotating stall of multistage axial compressors: Part 1, 2, and 3. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 106, 313–336. <https://doi.org/10.1115/1.3239567>
- Moore, F. K., & Greitzer, E. M. (1986). A theory of post-stall transients in axial compression systems: Part I — Development of equations. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 108(1), 68–78. <https://doi.org/10.1115/1.3239893>
- Paduano, J. D., Greitzer, E. M., & Epstein, A. H. (2001). Compression system stability and active control. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 33(1), 491–517. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.33.1.491>
- SAE International. (2019). A physics-based, control-oriented turbocharger compressor model for the prediction of pressure ratio at the limit of stable operations. *SAE Technical Paper. 2019-01-0320*. <https://doi.org/10.4271/2019-01-0320>
- Shahriyari, M. J., Firouzabadi, A., Khaleghi, H., & Esmailifar, S. M. (2024). A new model for compressor surge and stall control. *Scientific Reports*, 14(1), 5347. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-55816-w>
- Su, S., Lv, Y., Huang, S., & Sun, Z. (2014). Analysis of aircraft engine active stability control method. *Advances in Aeronautical Science and Engineering*, 5(1), 7–11.
- Wiggins, S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4067-7>
- Willems, F., & de Jager, B. (1998). Modeling and control of rotating stall and surge: An overview. *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*, 1, 331–335. <https://doi.org/10.1109/CCA.1998.728438>

Информация об авторах

Михаил Сергеевич Степанов, старший преподаватель, кафедра газонефтетранспортных систем и оборудования нефтяной и газовой промышленности, Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия
m.s.stepanov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0513-2681>

Алексей Вадимович Бунякин, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математических и компьютерных методов, Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия
alex.bunyakin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1849-1667>

Владислав Игоревич Дунаев, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра газонефтетранспортных систем и оборудования нефтяной и газовой промышленности, Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия
dunayev1964@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4166-6808>

Information about the authors

Mikhail S. Stepanov, Senior Lecturer, Department of Gas and Oil Transportation Systems and Equipment of the Oil and Gas Industry, Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia
m.s.stepanov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0513-2681>

Aleksei V. Bunyakin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Mathematical and Computer Methods, Kuban State University, Krasnodar, Russia
alex.bunyakin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1849-1667>

Vladislav I. Dunaev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Gas and Oil Transportation Systems and Equipment of the Oil and Gas Industry, Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia
dunayev1964@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4166-6808>