Исмагильян Гарифьянович ХУСАИНОВ[1]

УДК 536.244

РЕЛАКСАЦИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПЛАСТИНЫ, ПОМЕЩЕННОЙ В СРЕДУ С БОЛЕЕ НИЗКОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

[1] доктор физико-математических наук, профессор
кафедры прикладной информатики и программирования,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
ivt30@mail.ru

Аннотация

В статье рассмотрена задача об остывании идеально теплопроводящей пластины, находящейся в тепловом контакте с неподвижной средой, имеющей однородную начальную температуру, меньшую начальной температуры пластины. Получено интегральное уравнение, описывающее релаксацию безразмерной температуры пластины и зависящее только от одной автомодельной переменной. Найдено точное аналитическое решение интегрального уравнения, из которого получены с контролируемой точностью асимптотические формулы, справедливые при малых и больших значениях безразмерного времени. Выполнен анализ графиков, полученных с помощью аналитического решения и асимптотических формул. Исследовано точное аналитическое решение, описывающее температурное поле среды вокруг пластины.

Ключевые слова

Пластина, теплота, релаксация, интегральное уравнение, температура, асимптота, аналитическое решение.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-4-132-141

Введение

Почти все процессы в природе в той или иной степени связаны с переносом теплоты и изменением температурного состояния. В связи с тем, что тепловые яв-

Цитирование: Хусаинов И. Г. Релаксация температуры пластины, помещенной в среду с более низкой температурой / И. Г. Хусаинов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2017. Том 3. № 4. С. 132-141.
DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-4-132-141

ления в природе играют важную роль, то изучение процессов теплопроводности аналитическим методом стало одним из основных разделов современных инженерных исследований в энергетической, машиностроительной и атомной промышленности, а также в технологических процессах пищевой, строительной, химической, геологической, текстильной и других отраслях промышленности [5].

В последние десятилетия происходит бурное развитие теории теплообмена в разных областях науки, в частности, в дифференциальных уравнениях математической физики в связи с созданием и развитием аналитических методов решения краевых задач уравнения теплопроводности и ему родственных [5].

Первые теоретические работы по аналитическим методам решения краевых задач уравнения теплопроводности появились еще в середине прошлого века [3, 4, 12, 13]. Дальнейшее развитие теория теплопроводности получила в работах А. В. Лыкова [8], С. С. Кутателадзе [7], Э. М. Карташова [6] и в работах многих других ученых.

С развитием инженерной техники и технологии не прекращается поиск новых эффективных методов решения проблемы терморегулирования. Решение задачи нагревания и остывания тел особенно значимо для ракетно-космической технологии [9].

При термической обработке металлов важным является знание, за какое время созданная заготовка формы пластины прогреется в печи до нужной температуры или остынет при закалке в ванне с маслом [1].

В данной статье исследована задача об остывании идеально теплопроводящей пластины, находящейся в неподвижной среде.

Основные уравнения

Пусть в момент времени $t = 0$ в среду с коэффициентами теплопроводности, теплоемкости и плотности λ, c, ρ и температурой T_0 помещается пластина с температурой T_{p0}, имеющая более высокий коэффициент теплопроводности λ_p ($\lambda_p >> \lambda$). За счет теплопроводности теплота из пластины будет распространяться в окружающую среду, и температура пластины будет стремиться к значению T_0.

При описании исследуемого процесса примем следующие допущения: температура внутри пластины однородна; пластина и окружающая среда имеют идеальный тепловой контакт; теплофизические коэффициенты среды и пластины не зависят от температуры; высота и ширина пластины достаточно большие по сравнению с ее толщиной, чтобы пренебречь краевыми эффектами. Теплота из пластины в окружающую среду будет распространяться только через две боковые поверхности. Так как распространение теплоты через боковые поверхности симметричны, то будем рассматривать только половину пластины и одну боковую поверхность.

В рамках вышеизложенных допущений уравнение сохранения теплоты внутри пластины с толщиной $2a$ запишем в виде [11]:

$$V_p \rho_p c_p \frac{\partial T_p}{\partial t} = S_p \lambda \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=a}, \quad (1)$$

где V_p — объем половины пластины, который определяется через площадь боковой поверхности S_p по формуле $V_p = aS_p$, ρ_p, c_p — плотность и теплоемкость пластины, T_p — температура пластины, зависящая только от времени t, T — температура окружающей среды, зависящая от координаты x и времени.

Формулу (1) можно представить в виде

$$\frac{\partial T_p}{\partial t} = \frac{\lambda}{a\rho_p c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=a}, \qquad (2)$$

Начальное условие для температуры пластины имеет вид:

$$T_p = T_{p0},\ t=0,\ a\geq x\geq 0. \qquad (3)$$

Температурное поле среды вокруг пластины описывается с помощью уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T_p}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ \chi = \frac{\lambda}{\rho c}, a<x<\infty. \qquad (4)$$

Здесь χ — коэффициент температуропроводности.

Начальное условие для температуры среды можно записать в виде:

$$T = T_0,\ t=0,\ x>a. \qquad (5)$$

На границе между окружающей средой и поверхностью пластины выполняется условие непрерывности температуры

$$T = T_p(t), t>0,\ x=a. \qquad (6)$$

Второе граничное условие для уравнения теплопроводности имеет вид

$$T = T_0,\ t>0,\ x\to\infty. \qquad (7)$$

Из принципа Дюамеля [5, 10] следует, что решение краевой задачи нестационарной теплопроводности с граничными условиями, зависящими от времени, можно выразить через решение соответствующей задачи, в которой граничные условия не зависят от времени. Тогда для уравнения (4) с переменным граничным условием (6) может быть получено следующее решение, описывающее распределение температуры в окружающей среде:

$$T - T_0 = \int_0^t \frac{\partial U(x,t-t')}{\partial t}\left(T_p(t') - T_0\right)dt',\ x > a, t > 0, \qquad (8)$$

$$U(x, t-t') = \Phi\left(\frac{x-a}{2\sqrt{\chi(t-t')}}\right),\ \Phi(\xi) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi}\exp\left(-\beta^2\right)d\beta.$$

Здесь функция $U(x, t)$ является решением уравнения теплопроводности (4) с нулевым начальным и постоянными граничными условиями, а $\Phi(\xi)$ — дополнительная функция ошибок.

Подставляя решение (8) в правую часть уравнения (2), получаем интегральное уравнение, описывающее эволюцию температуры пластины

$$T_p = T_{p0} - \frac{\lambda}{a\rho_p c_p\sqrt{\chi\pi}}\int_0^t \frac{T_p(t') - T_0}{\sqrt{t-t'}}dt'.$$

Для дальнейшего анализа это интегральное уравнение представим в безразмерной форме:

$$\Theta = 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{\Theta(\tau')}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau', \tag{9}$$

где безразмерная температура Θ, безразмерные времена τ и τ' определяются по следующим формулам:

$$\Theta = \frac{T_p - T_0}{T_{p0} - T_0},\ \tau = t/t_*,\ \tau' = t'/t_*,\ t_* = \frac{a^2}{\chi},\ \eta = \frac{\rho c}{\rho_p c_p}.$$

Здесь параметр η выражает отношение объемной теплоемкости окружающей среды к объемной теплоемкости пластины, а параметр t_* означает характерное время, за которое возмущение температуры в окружающей среде распространяется на расстояние порядка полутолщины пластины a.

Уравнение (9) можно преобразовать дальше, введя вместо безразмерного времени τ новую безразмерную переменную γ следующим образом:

$$\tau = \frac{\pi}{\eta^2} \gamma. \tag{10}$$

При этом размерное время t и новое безразмерное время γ связаны в виде:

$$t = \gamma t_n,\ t_n = \frac{\pi}{\eta^2} t_*. \tag{11}$$

В результате вместо уравнения (9) можем записать

$$\Theta = 1 - \int_0^{\gamma} \frac{\Theta(\gamma')}{\sqrt{\gamma - \gamma'}} d\gamma'. \tag{12}$$

Из уравнения (12) следует, что релаксация безразмерной температуры зависит только от одного безразмерного параметра, следовательно, переменная γ является автомодельной.

Найдем точное аналитическое решение интегрального уравнения (12). После применения преобразования Лапласа получаем следующее уравнение для изображения:

$$\tilde{\Theta} = \frac{1}{q + \sqrt{\pi q}},$$

где изображение $\tilde{\Theta}$ определяется по формуле $\tilde{\Theta} = \int_0^{\infty} \exp(-qt)\,\Theta(t)\,dt$. Данное уравнение для изображения является табличным [2]. Находим оригинал и получаем аналитическое решение интегрального уравнения (12):

$$\Theta = \exp(\psi) \cdot \Phi\left(\sqrt{\psi}\right),\ \psi = \pi\gamma. \tag{13}$$

Таким образом, получили универсальную зависимость релаксации температуры пластины от параметров системы в безразмерном виде. График этой зависимости построен на рис. 1. Из этого рисунка следует, что безразмерная температура Θ стремится к нулю при $\psi \to \infty$ (или $t \to \infty$).

С учетом выражений для параметров ψ, τ, γ и t_* можно найти универсальную зависимость размерного времени релаксации температуры пластины t_r от безразмерного времени релаксации ψ_r

$$t_r = \frac{a^2}{\chi \eta^2} \psi_r.$$

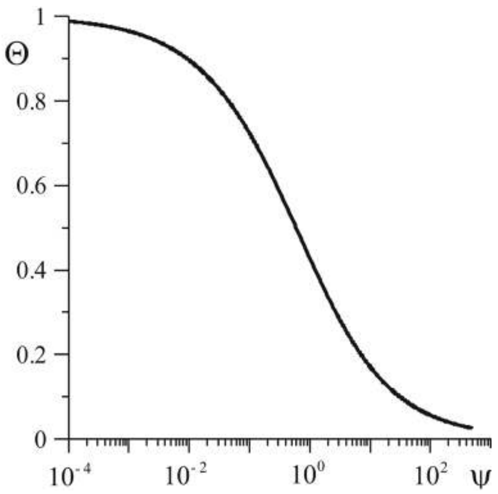

Рис. 1. Универсальная зависимость релаксации температуры пластины в безразмерном виде

Fig. 1. The universal dependence of the temperature relaxation of a plate in the dimensionless form

Подставляя вместо параметра χ выражение из (4) окончательно будем иметь следующую формулу для размерного времени релаксации температуры пластины

$$t_r = \frac{a^2\left(\rho_p c_p\right)^2}{\rho c \lambda}\psi_r. \tag{14}$$

Из формулы (14) видно, что время релаксации температуры пластины прямо пропорционально квадратам полутолщины и объемной теплоемкости пластины, а также обратно пропорционально объемной теплоемкости и теплопроводности окружающей среды.

Используя рис. 1 и формулу (14), при известных значениях параметров системы можно найти характерное размерное время релаксации температуры пластины до определенного значения. Найдем формулу для вычисления времени полураспада температуры пластины. Время полураспада – это время, за которое снижение перепада температуры между значениями в пластине и окружающей среде происходит до половины от начального перепада. Из рис. 1 находим, что значение безразмерного времени полураспада температуры равно 0.592. Тогда размерное время полураспада температуры пластины вычисляется по формуле

$$t_r = \frac{a^2\left(\rho_p c_p\right)^2}{\rho c \lambda}0.592. \tag{15}$$

Если пользоваться формулой (13) при больших значениях ψ_r, то возникают сложности, связанные с точностью компьютерного вычисления. Найдем более простые формулы для вычисления безразмерного времени релаксации температуры пластины на начальном и конечном этапах процесса релаксации.

Используя асимптотические разложения функций $\Phi(\xi)$ и $\exp(\xi)$ при малых значениях ξ ($\xi << 1$):

$$\Phi(\xi) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\xi + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\xi^3 + o(\xi),\ \exp(\xi) = 1 + \xi + o(\xi),$$

из решения (13) можно получить более простую зависимость для динамики релаксации температуры пластины в начальной стадии ($\psi << 1$):

$$\Theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\psi} + \psi + o(\psi). \tag{16}$$

С учетом разложения интеграла вероятностей для больших значений аргумента ($\xi >> 1$) можно получить следующее приближение для функции $\Phi(\xi)$, допускающую ошибку меньше абсолютной величины последнего еще не отброшенного члена [2]:

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\xi^2\right)\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2\xi^3} + \frac{3}{4\xi^5} + o\left(\frac{1}{\xi}\right)\right).$$

На основании решения (13) для конечной стадии ($\psi >> 1$) процесса релаксации температуры пластины получим:

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{\pi\psi}}\left(1 - \frac{1}{2\psi} + \frac{3}{4\psi^2} + o\left(\frac{1}{\psi}\right)\right). \tag{17}$$

Таким образом, получили достаточно простую формулу по сравнению с формулой (13) для вычисления температуры пластины при больших значениях времени.

На рис. 2. представлены зависимости безразмерной температуры пластины от безразмерного времени ψ. Линия 1 получена с помощью асимптотической формулы (16), линия 2 - с помощью формулы (13), линия 3 - (17), линия 4 соответствует случаю, когда в правой части формулы (17) оставляем только первый член.

Анализ рисунка 2 показывает, что формула (16) неплохо описывает релаксацию температуры пластины в начальный период при значениях $\psi \leq 0.3$. Формулой (17) можно пользоваться при значениях $\psi \geq 3$. При этом относительная ошибка счета для этих формул составляет 1%, которая быстро снижается, соответственно, при уменьшении (формула 16) и увеличении (формула 17) значения ψ. Для случая, когда в правой части формулы (17) оставляем только первый член, аналогичную относительную ошибку получаем при значениях $\psi \geq 10$.

В соответствии с решением, полученным выше, релаксация температуры пластины совершается за бесконечный промежуток времени ($t_r \to \infty$). Однако с помощью формулы (17) можно получить простую оценку для полного безразмерного времени релаксации температуры пластины ψ_r. Для этого в правой части формулы (17) оставляем только первый член и после преобразования получаем выражение для величины ψ_r

$$\psi_r = 1/\pi\Theta_r^2. \tag{18}$$

Если за характерный период полной релаксации температуры принять время, за которое значение безразмерной температуры пластины уменьшается до величины Θ_r=0.01, то с помощью формулы (18) находим значение безразмерного времени релаксации $\psi_r \approx 3\ 200$.

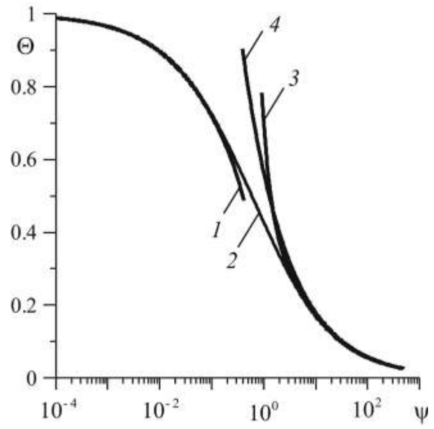

Рис. 2. Зависимости безразмерной температуры пластины от безразмерного времени ψ. Линия 1 получена с помощью формулы (16), 2 — (13), 3 — (17), 4 соответствует случаю, когда в правой части формулы (17) оставляем только первый член

Fig. 2. Dependences of the dimensionless plate temperature on the dimensionless time ψ. Line 1 is obtained with the help of formula (16), 2 — (13), 3 — (17), 4 corresponds to the case when only the first term in the right-hand side of formula (17)

Найдем распределение температуры в окружающей пластину среде. Уравнение теплопроводности (4), когда на границе $x = a$ температура описывается по закону (13), имеет следующее точное аналитическое решение

$$\Theta' = \exp\left(\psi + \eta(\delta - 1)\right)\Phi\left(\sqrt{\psi} + \eta\frac{\delta-1}{2\sqrt{\psi}}\right). \tag{19}$$

Здесь Θ' — безразмерная температура среды вокруг пластины, которая определяется по формуле $\Theta' = (T - T_0)/(T_{p0} - T_0)$, δ — безразмерная координата (δ=x/a).

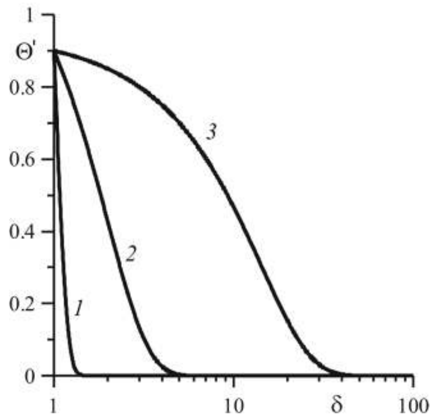

Рис. 3. Распределение безразмерной температуры в окружающей среде при разных значениях параметра η: 1 — η=1, 2 — η=0,1 , 3 — η=0,01

Fig. 3. The distribution of the dimensionless temperature in the environment for different values of the parameter η: 1 — η=1, 2 — η=0,1, 3 — η=0,01

На рис. 3 приведена зависимость безразмерной температуры среды вокруг пластины от координаты при разных значениях параметра η в момент времени, когда безразмерная температура пластины Θ уменьшается до 0,9. Видно, что распределение температуры поля вокруг пластины сильно зависит от отношения объемной теплоемкости окружающей среды к объемной теплоемкости пластины.

Заключение

Исследована задача об остывании идеально теплопроводящей пластины, находящейся в тепловом контакте с неподвижной средой. Получено автомодельное интегральное уравнение, описывающее релаксацию безразмерной температуры пластины. Найдено точное аналитическое решение интегрального уравнения и получены с контролируемой точностью асимптотические формулы, справедливые при малых и больших значениях безразмерного времени. Построены графики аналитического решения и асимптотических формул и выполнен их анализ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гунькин И. А. Определение технологических параметров закалки неограниченной пластины / И. А. Гунькин, Ю. А. Гунькин // Математическое моделирование в инженерных и финансово-экономических задачах: Сб. науч. тр. Днепропетровск: Сич., 1998. С. 78-82.
2. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. М.: Высшая школа, 1965. 465 с.
3. Карслоу Г. Операционные методы в прикладной математике / Г. Карслоу, Д. Егер / пер. с анг. М. М. Литвиновой, под ред. М. С. Горнштейна. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 292 с.
4. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. М.: Наука, 1964. 488 с.
5. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. М.: Высшая школа, 2001. 547 с.
6. Карташов Э. М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. М.: Высшая школа, 1979. 480 с.
7. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена / С. С. Кутателадзе. 5-е изд., доп. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.
8. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
9. Салахутдинов Г. М. Тепловая защита в космической технике / Г. М. Салахутдинов. М.: Знание, 1982. 64 с.
10. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1972. 736 с.
11. Шагапов В. Ш. Релаксация давления в полости, окруженной пористой и проницаемой породой, при ее опрессовке введением газа / В. Ш. Шагапов, И. Г. Хусаинов, Р. М. Хафизов // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47. № 1. С. 109-118. DOI: 10.1007/s10808-006-0012-5
12. Boelter L. M. K. Heat / L. M. K. Boelter, V. H. Cherry, H. A. Johnson, R. C. Martinelli // Transfer Notes, University of California Press, Berkeley, Calif., 1948.
13. McAdams W. H. Heat Transmission / W. H. McAdams // New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1954.

Ismagilyan G. KHUSAINOV[1]

RELAXATION OF THE TEMPERATURE OF A PLATE PLACED IN A MEDIUM WITH A LOWER TEMPERATURE

[1] Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,
Department of Applied Informatics and Programming,
Sterlitamak branch of Bashkir State University
ivt30@mail.ru

Abstract

The present study considers the problem of cooling a perfectly heat-conducting plate in thermal contact with a stationary medium with uniform distribution of lower temperature than the initial plate's temperature. An integral equation is obtained that describes the relaxation of the dimensionless plate temperature and depends only on one self-similar variable. An exact analytic solution of the integral equation is found, from which asymptotic formulas valid for small and large values of the dimensionless time are obtained with controlled accuracy. The analysis of graphs obtained with the help of an analytical solution and asymptotic formulas is performed. An exact analytical solution describing the temperature field of the medium around the plate is examined.

Keywords

Plate, heat, relaxation, integral equation, temperature, asymptote, analytical solution.

DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-4-132-141

REFERENCES

1. Gunkin I.A., Gunkin Yu.A. 1998. "Opredelenie texnologiseckix parametrov zakalki neogranisennoi plastini" [Determination of Technological Parameters of Quenching of an Unlimited Plate]. Mathematical modeling in engineering and financial-economic problems, pp. 78-82. Dnipropetrovsk: Sich.

Citation: Khusainov I. G. 2017. "Relaxation of the Temperature of a Plate Placed in a Medium with a Lower Temperature". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 3, no 4, pp. 132-141.
DOI: 10.21684/2411-7978-2017-3-4-132-141

2. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. 1965. Cpravosnik po operasionnomy icsicleniey [Handbook of Operational Calculus]. Moscow: Higher School.
3. Carslow G., Yeager D. 1948. Operasionnie metodi v prikladnoi matematike [Operational Methods in Applied Mathematics]. Translated from English by M. M. Litvinova, edited by M. S. Gornshteyn. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo inostrannoy literatury.
4. Carslow G., Yeager D. 1964. Teploprovodnoct tverdix tel [Thermal Conductivity of Solids]. Moscow: Nauka.
5. Kartashov E. M. 2001. Analitiseckie metodi v teorii teploprovodnosti tverdix tel [Analytical Methods in the Theory of Thermal Conductivity of Solids]. Moscow: Higher School.
6. Kartashov E. M. 1979. Analitiseckie metodi v teploprovodnosti tverdix tel [Analytical Methods in the Thermal Conductivity of Solids]. Moscow: Higher School.
7. Kutateladze S. S. [1965] 1979. Osnovi teorii teploobmena. [Fundamentals of the Theory of Heat Transfer]. 5th edition, revised. Moscow: Atomizdat.
8. Lykovo A. V. 1967. Teoria teploprovodnosti. [Theory of Heat Conductivity]. Moscow: Higher School.
9. Salakhutdinov G. M. 1982. Teplovaya zashita v kocmiseckoi texnike [Thermal Protection in Space Technology]. Moscow: Znanie.
10. Tikhonov A. N., Samarskii A. A 1972. Uravnenie matematiseckoi fiziki. [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: Nauka.
11. Shagapov V. Sh., Khusainov I. G., Khafizov R. M. 2006. “Relakcasia davlenia v polocti, okrygennoi porictoi i pronisaemoi credoi, pri opreccovke vvedeniem gaza” [Pressure Relaxation in a Hole Surrounded by Porous and Permeable Rock in Hole Pressure Tests with Gas Injection]. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. vol. 47. no 1. pp. 91-98. DOI: 10.1007/s10808-006-0012-5
12. Boelter L. M. K., Boelter L. M. K., Cherry V. H., Johnson H. A., Martinelli R. C. 1948. Heat Transfer Notes. Berkeley: University of California Press.
13. McAdams W. H. 1954. Heat Transmission. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc.