

## Моделирование изгиба композитных конструкций стеновых панелей

Юрий Евгеньевич Якубовский<sup>1</sup>, Ирина Адольфовна Донкова<sup>1,2</sup>✉

<sup>1</sup> Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

<sup>2</sup> Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

Контакт для переписки: [i.a.donkova@utmn.ru](mailto:i.a.donkova@utmn.ru) ✉

**Аннотация.** Перспективным направлением современного строительства зданий и сооружений является сборно-монолитная каркасная технология и технология несъемной опалубки. В качестве конструктивных элементов каркасных сооружений используют тонкостенные стеновые панели, которые образованы внешними слоями из стального профиля и внутренним бетонным слоем. Для проектирования и расчета соответствующих многослойных конструкций предлагается использовать модели и методы теории составных пластин. В статье представлен вариант математической модели деформирования многослойных пластин с учетом сдвигающих напряжений в швах. Выполнены расчеты составных конструкций, которые образованы тремя пластинами с соединением слоев посредством анкеров. Внешние слои стальные, материал внутреннего слоя — бетонный наполнитель. Проведено исследование влияния изменения величины усилий, приходящихся на анкер, в зависимости от жесткости анкерных связей. Решение системы дифференциальных уравнений теории составных пластин проводилось в функциях усилий с помощью тригонометрических рядов Фурье.

**Ключевые слова:** составные пластины, каркасные системы строительства, анкерное соединение слоев, напряженно-деформированное состояние

**Цитирование:** Якубовский Ю. Е., Донкова И. А. 2024. Моделирование изгиба композитных конструкций стеновых панелей // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 10. № 3 (39). С. 88–101. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-3-88-101>

Поступила 19.10.2023; одобрена 15.09.2024; принята 02.10.2024

# Modeling bending of wall panel multilayer structures

Yuriy E. Yakubovskiy<sup>1</sup>, Irina A. Donkova<sup>1,2</sup>✉

<sup>1</sup> Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia

<sup>2</sup> University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: i.a.donkova@utmn.ru✉

**Abstract.** Precast-monolithic frame house building, use of stay-in-place formwork technology, improvement of concrete quality by means of additives and introduction of new materials are all innovations in the scope of high-rise construction. Thin wall panels formed by outer layers of structural steel sections and inner layers of concrete are used as structural elements of frame structures. The solution of structure elements strength problems is related to a stress-strain state analysis. Significant difficulties arise in calculation of structures having a complex geometric shape with different combinations of loads; such structures include thin wall composite systems. Reinforcing structural elements in composite plates and shells, such as stiffeners and re-bars, makes the structure piecewise inhomogeneous. Constructive heterogeneity occurs in anchor connection of layers. Mathematical modeling of multilayer structures follows the methodology of the composite plates and shells theory. The nonlinear straining mathematical model takes into account shear stresses in joints. The problem was solved as the force functions using trigonometric Fourier series. A composite structure formed by three plates with anchor connections of layers has been calculated. The outer layers are steel, and the material of the inner layer is concrete filler. The variation effect of the forces that fall on each individual anchor depending on the stiffness of the anchor connections has been studied. The stress-strain state of the steel-concrete structure has also been studied. The effects associated with variations in the stress state due to the relationship of the steps between the anchors in two orthogonal directions, or the number of anchor connections in the joints has been revealed. Anchor connections ensure compatibility of different layers of a composite construction, but there are problems of strength of the anchor due to shear forces in the anchor areas where the loads are concentrated.

**Keywords:** composite plates, construction frame systems, anchor connection of layers, stress-strain state

**Citation:** Yakubovskiy, Yu. E., & Donkova, I. A. (2024). Modeling bending of wall panel multilayer structures. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 10(3), 88–101. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-3-88-101>

Received Oct. 19, 2023; Reviewed Sep. 15, 2024; Accepted Oct. 2, 2024

## Введение

В настоящее время наиболее эффективными считаются архитектурно-строительные каркасные системы строительства высотных зданий, которые изначально были спроектированы и начали применяться во Франции, Великобритании, США и Японии. В России достаточно активно осуществляется переход к современным каркасным системам строительства зданий и сооружений с использованием многослойных (как правило, трехслойных) сэндвич-панелей. Такие панели образованы двумя внешними металлическими листами и внутренним слоем (прослойкой), выполняющим теплоизоляционные функции. Популярность сборно-монолитной каркасной технологии объясняется такими факторами, как энергосбережение, быстрые сроки строительства, расширенные возможности планировки и др.

В качестве объекта исследования в работе рассматриваются конструкции зданий, которые сочетают тонкостенные стальные оцинкованные каркасы и легкий бетон. Бетонная смесь заливается между стеновыми панелями по технологии несъемной опалубки, которая позволяет производить монтаж несущих элементов конструкции непосредственно на бетонное основание и в дальнейшем не демонтируется. Конструктивная особенность каркасных систем — это наличие тонкостенных элементов, которые не только обладают свойствами тепло- и звукоизоляции, но и значительно снижают весовую нагрузку. Решение проблем прочности этих элементов конструкций связано с анализом напряженно-деформированного состояния. Значительные трудности возникают при расчетах конструкций, имеющих сложную геометрическую форму при различных сочетаниях нагрузок. К таким конструкциям относятся и тонкостенные составные системы. Подкрепляющие конструктивные элементы в составных пластинах, такие как ребра жесткости, приводят к тому, что конструкция становится кусочно-неоднородной. Конструктивная неоднородность имеет место и при анкерном соединении слоев.

Цель работы — на основе математической модели составных пластинчатых конструкций исследовать напряженно-деформированное состояние композитных конструкций в виде трехслойных стеновых панелей.

## Обзор литературы

Рассмотрим основные особенности моделирования составных конструкций на основе сборно-монолитной каркасной технологии. К. И. Стрелец, М. Д. Стрелкова [2019] указали на распространение в гражданском строительстве конструктивных систем из сборного, сборно-монолитного и монолитного железобетона. По мнению авторов, для сборно-монолитного каркаса (СМК) требуется меньше расходных материалов (полимерраствор, бетон марки В20 или В30 и др.), что обуславливает низкую себестоимость такой системы. Экономичность каркасной технологии строительства отметили А. Ю. Жигулина, Л. О. Буров [2020]. Они перечислили особенности каркасных систем в Японии, Англии, Канаде, Германии и России как на ранних исторических этапах, так и в современных условиях. Универсальность панельно-каркасной технологии домостроения (ПКД) подтверждена С. В. Николаевым и др. [2015]:

«по качественным характеристикам, в том числе по архитектуре зданий, панельное домостроение не уступает другим видам домостроения, а по стоимости строительства (на 15–20%) и по скорости возведения (более чем в два раза) опережает каркасное домостроение» [Николаев и др., 2015, с. 3].

Лысова и др. [2022] привели описание конструктивно-технологических решений и основных направлений развития сборно-монолитных каркасных систем (СМКС) с использованием технологии несъемной опалубки в странах Восточной Азии (Японии и Китае). А. Н. Белых и др. [2021] рассмотрели структурные изолированные панели, представляющие собой изоляционный слой пенополиуретана, зажатый между двумя структурными поверхностями обшивки, и отметили их эффективность, а именно: экономичность, экологичность, универсальность, сокращение сроков строительства. С. Г. Абрамян, Д. В. Гнатюк [2017] описали основные типы каркасных систем сборно-монолитных и сборных высотных зданий:

«Выбор каркасной системы для строительства массового комфортабельного жилья, зданий и сооружений другого назначения, должен отвечать определенным критериям: надежности, экологичности, высокотехнологичности, архитектурной выразительности, гибкости принимаемых решений на всех стадиях жизненного цикла объекта недвижимости» [Абрамян, Гнатюк, 2017, с. 5].

С. Н. Овсянников, В. Б. Максимов [2018] обосновали энергоэффективность трехслойных стеновых панелей каркасно-панельных зданий, выполнили теплотехнические расчеты с построением температурных полей. В качестве материала слоев использовался керамзитобетон, пенополистирол, легкий бетон, а также другие композитные материалы. Гранев и др. [2019] привели новый свод правил для проектирования сборных железобетонных конструкций каркасных зданий из тяжелого, мелкозернистого и легкого конструктивного бетона. В стыках конструкций «... могут возникать три стадии напряженно-деформированного состояния: условно-упругая, упруго-пластическая и предельная по несущей способности» [Гранев и др., 2019, с. 7]. А. В. Терентьев, О. П. Терехова [2023] указали следующие преимущества технологии сборно-монолитного строительства: снижение сроков строительства и себестоимости, возможность реализации геометрии фасадов и перепланировки в любом из периодов строительства и эксплуатации, а также значительное увеличение срока службы таких зданий. И. И. Подшивалов, И. А. Андриенко [2022] рассмотрели вопросы моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) каркасных зданий.

Таким образом, вопросы моделирования композитных конструкций стеновых панелей и исследования НДС конструктивных элементов зданий и сооружений с использованием сборно-монолитной каркасной технологии и технологии несъемной опалубки являются востребованными задачами. В статье представлена математическая модель, расчет и исследование напряженно-деформированного состояния составной конструкции. Объект исследования — это трехслойная стеновая панель с внешними стальными тонкостенными слоями и внутренним слоем из легкого бетона. Математическая модель получена согласно методологии теории составных конструкций [Арутюнян, Зевин, 1988; Новожилов, 1991; Якубовский, 1994; Якубовский и др., 2016; Yakubovskiy и др., 2016a, б; Glumov, Yakubovskiy, 2017; Якубовский, Герасимов, 2018; Якубовский и др., 2018a, б].

## Модели и методы

### Исходные допущения и гипотезы

Под составными конструкциями здесь понимаются две или несколько пластин, связанных швами, в которых возможны продольные сдвиговые деформации и отсутствуют деформации в поперечном направлении. Прогиб каждого отдельного слоя совпадает с общим прогибом конструкции  $w(x, y)$ . Продольные перемещения  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  вдоль координатных осей  $x$  и  $y$  в зоне  $i$ -го шва двух смежных слоев ( $i$ -го и  $(i + 1)$ -го) различаются. Это приводит к тому, что по обе стороны  $i$ -го шва возникает разность продольных перемещений  $\Delta u^i$  и  $\Delta v^i$ .

Предполагается, что для каждого слоя составной конструкции (но не для всего пакета) выполняется гипотеза прямых нормалей. Число слоев конструкции в общем случае равно  $(n + 1)$  и трем слоям для расчетной конструкции, представленной в статье. Число промежутков между слоями (податливых швов) равно  $n$  (для модели в общем случае), для изучаемой конструкции число швов равно двум.

В основе моделирования положены предположения и допущения теории составных тонкостенных конструкций [Арутюнян, Зевин, 1988; Новожилов, 1991; Якубовский, 1994; Якубовский и др., 2016; Yakubovskiy и др., 2016а, б; Glumov, Yakubovskiy, 2017; Якубовский, Герасимов, 2018; Якубовский и др., 2018а, б]. Математическую модель задачи деформирования составных конструкций с произвольным числом слоев можно записать с помощью системы дифференциальных уравнений в частных производных [Якубовский, 1994]:

$$L_1^i(B^*, \varphi) + L_2^i(B^*, \varphi) - L_1^i(B^*, T) - L_2^i(B^*, T) = L(w + w_0) + \Lambda^i(c, w), \quad (1)$$

где 
$$L_1^i(B^*, \varphi) = B_{22}^{*i} \frac{\partial^4 \varphi^i}{\partial x^4} + 2 \left( \frac{1}{2} B_{66}^{*i} - B_{12}^{*i} \right) \frac{\partial^4 \varphi^i}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{11}^{*i} \frac{\partial^4 \varphi^i}{\partial y^4};$$

$$L_2^i(B^*, \varphi) = 2 \left[ \frac{\partial B_{22}^{*i}}{\partial x} \frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial y^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} B_{66}^{*i} - B_{12}^{*i} \right) \frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial x^2 \partial y} \right] + \left( \frac{\partial B_{22}^{*i}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B_{12}^{*i}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial B_{11}^{*i}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 B_{12}^{*i}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_{66}^{*i}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x \partial y}; \quad (2)$$

$$L_1^i(B^*, T) = (B_{11}^i - B_{12}^{*i}) \left( \frac{\partial^2 T^i}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T^{i-1}}{\partial y^2} \right) + (B_{22}^i - B_{21}^{*i}) \left( \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{i-1}}{\partial x^2} \right);$$

$$L_2^i(B^*, T) = \frac{\partial^2(B_{11}^{*i} - B_{12}^{*i})}{\partial y^2} (T^i - T^{i-1}) + 2 \frac{\partial (B_{11}^{*i} - B_{12}^{*i})}{\partial y} \times$$

$$\times \frac{\partial (T^i - T^{i-1})}{\partial y} + \frac{\partial^2(B_{22}^{*i} - B_{21}^{*i})}{\partial x^2} \times$$

$$\times (T^i - T^{i-1}) + 2 \frac{\partial (B_{22}^{*i} - B_{21}^{*i})}{\partial x} \cdot \frac{\partial (T^i - T^{i-1})}{\partial x};$$

$$L(w + w_0) = \left[ \frac{\partial^2(w + w_0)}{\partial x \partial y} \right]^2 - \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] - \frac{\partial^2(w + w_0)}{\partial x^2} -$$

$$- \frac{\partial^2(w + w_0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0 \partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2};$$

$$\Lambda^i(c, w) = \frac{\partial^2 \varepsilon_2^i}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \gamma_{12}^i}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1^i}{\partial y^2};$$

$$B_{11}^{*i} = \frac{B_{22}^i}{(B_0^i)^2}; \quad B_{22}^{*i} = \frac{B_{11}^i}{(B_0^i)^2}; \quad B_{12}^{*i} = \frac{B_{22}^i}{(B_0^i)^2}; \quad B_{66}^{*i} = \frac{1}{B_{66}^i};$$

$$(B_0^i)^2 = (B_{11}^i (B_{22}^i - (B_{12}^i)^2))^2.$$

Здесь  $\varepsilon_1^i, \varepsilon_2^i$  и  $\gamma_{12}^i$  — компоненты деформаций срединной поверхности  $i$ -го слоя;  $\varphi^i$  — функция усилий;  $T^i$  — потенциальная функция, отражающая распределение сдвигающих напряжений  $\tau_x^i$  и  $\tau_y^i$  в  $i$ -м шве;  $w$  — функция прогиба;  $w_0$  — отклонение от плоскости поверхности пластин;  $B_{11}^i, B_{12}^i, B_{21}^i, B_{22}^i, B_{66}^i$  — интегральные характеристики жесткости материала  $i$ -го слоя конструкции.

При упругом линейном деформировании без конструктивных подкрепляющих элементов характеристики жесткости в  $i$ -х слоях определяются по формулам, которые предложили Н. Х. Арутюнян, А. А. Зевин [1988]:

$$B_{11}^i = -\frac{E_1^i h^i}{(1 - \nu_1^i \nu_2^i)}; \quad B_{12}^i = B_{21}^i = \frac{E_1^i \nu_2^i h^2}{(1 - \nu_1^i \nu_2^i)}; \quad B_{22}^i = \frac{E_2^i h^i}{(1 - \nu_1^i \nu_2^i)}; \quad B_{66}^i = G^i h^i.$$

Здесь  $E_1^i, E_2^i$  — модули упругости;  $\nu_1^i, \nu_2^i$  — коэффициенты Пуассона материала  $i$ -го слоя в направлениях координатных осей  $x$  и  $y$ ;  $G^i$  — модуль сдвига.

На основе соотношений теории составных пластин [Якубовский и др., 2016] разность перемещений  $\Delta u^i$  и  $\Delta v^i$  по обе стороны разделяющей поверхности  $i$ -го шва можно определить с помощью формул:

$$\begin{aligned} \Delta u^i &= u^{i+1} - u^i + \frac{\partial w}{\partial x} c^i + k_1^i (b^i u^{i+1} + a^i u^i); \\ \Delta v^i &= v^{i+1} - v^i + \frac{\partial w}{\partial y} c^i + k_2^i (b^i v^{i+1} + a^i v^i), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u^i(x, y)$ ,  $v^i(x, y)$ ,  $w(x, y)$  — продольные и поперечные перемещения точек срединной поверхности  $i$ -го слоя;  $c^i$  — расстояния между срединными поверхностями слоев по обе стороны  $i$ -го шва;  $a^i$ ,  $b^i$  — расстояния от срединного слоя до поверхности пластины;  $k_1^i$  и  $k_2^i$  — главные кривизны  $i$ -го слоя.

Для пластинчатых составных конструкций главные кривизны  $k_1^i$  и  $k_2^i$  равны нулю.

Связь между разностями смещений ( $\Delta u^i$ ,  $\Delta v^i$ ) и сдвигающими напряжениями в  $i$ -м шве ( $\tau_x^i$ ,  $\tau_y^i$ ) при переменной толщине слоев  $c^i = c^i(x, y)$  с учетом ортотропии и нелинейности жесткости связей сдвига в направлениях координатных осей  $x$  и  $y$  определяется, согласно В. В. Новожилову [1991], соотношениями:

$$\tau_x^i = \eta_x^i \Delta u^i; \quad \tau_y^i = \eta_y^i \Delta v^i, \quad (4)$$

где  $\eta_x^i(x, y)$  и  $\eta_y^i(x, y)$  — нелинейные коэффициенты жесткости связей сдвига в направлениях  $x$  и  $y$ , зависящие от величины результирующей разности сдвига одного слоя по отношению к другому.

Из выражений (4) с учетом соотношений (3) получаем:

$$\frac{1}{\eta_x^i} \tau_x^i = C^i \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{1}{\eta_y^i} \tau_y^i = C^i \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5)$$

Для решения задачи в линейной упругой постановке использована следующая зависимость [Якубовский, 1994]:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x^i + \Delta \varepsilon_y^i &= B_{11}^{*i+1} \frac{\partial^2 \varphi^{i+1}}{\partial y^2} + B_{22}^{*i+1} \frac{\partial^2 \varphi^{i+1}}{\partial x^2} - B_{12}^{*i+1} \nabla^2 \varphi^{i+1} - \\ &- (B_{11}^{*i+1} - 2B_{12}^{*i+1} + B_{22}^{*i+1})(T^{i+1} - T^i) - \left( B_{11}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2} + B_{22}^{*i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^2} \right) + B_{12}^{*i+1} \nabla^2 \varphi^i + \\ &+ (B_{11}^{*i} - 2B_{12}^{*i} + B_{22}^{*i})(T^i - T^{i-1}). \end{aligned} \quad (6)$$

В случае изотропии материала слоев составной конструкции постоянной жесткости используется выражение вида [Якубовский и др., 2018a]:

$$\frac{1}{\eta_x^i} \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^2} + \frac{1}{\eta_y^i} \frac{\partial^2 T^i}{\partial y^2} = c^i \nabla^2 w + (B_{11}^{*i+1} - B_{12}^{*i+1}) \cdot [\nabla^2 \varphi^i - 2(T^{i+1} - T^i)] - (B_{11}^{*i} - B_{12}^{*i}) [\nabla^2 \varphi^i - 2(T^i - T^{i-1})] \quad (7)$$

где  $B_{11}^{*i} = 1/(E^i h^i)$ ;  $B_{12}^{*i} = \nu^i B_{11}^{*i}$ .

Таким образом, для составной пластины, состоящей из  $(n + 1)$  слоев, должна быть решена система дифференциальных уравнений относительно искомым функций: функции прогиба  $w$ , функции усилий  $\varphi^i$  и потенциальной функции  $T^i$ .

Кроме того, математическая модель деформирования составной конструкции должна быть дополнена краевыми условиями.

Граничные условия в случае шарнирного опирания торцов при  $x = 0$  и  $x = a$  запишутся в виде:

$$w = 0, \quad M_x^i = 0, \quad T^i = 0, \quad V^i = 0, \quad N_x^i = 0.$$

Здесь  $w$  — функция прогиба;  $M_x^i$  — изгибающий момент  $i$ -го слоя;  $T^i$  — потенциальная функция  $i$ -го слоя;  $N_x^i$  — растягивающие усилия  $i$ -го слоя;  $V^i$  — перемещения срединной поверхности  $i$ -го слоя вдоль оси  $y$ .

Аналогично можно расписать краевые условия на двух других краях.

## Результаты и обсуждение

### Расчет трехслойной конструкции

Для расчета используется трехслойная стеновая панель, которую можно представить как тонкостенную конструкцию, состоящую из двух внешних стальных слоев и внутреннего бетонного слоя. Данная сталебетонная конструкция симметрична относительно срединной поверхности внутреннего слоя. Крепежными элементами слоев являются анкера. Шаг расстановки анкеров равен величине швов. Поперечная нагрузка распределена в центральной зоне и имеет интенсивность  $q$ .

Краевые условия конструкции на прямоугольном контуре отвечают условиям шарнирного опирания торцов. В качестве аппроксимирующих функций прогиба  $W(x, y)$  и усилий  $\varphi(x, y)$  при краевых условиях в случае шарнирного опирания использованы тригонометрические ряды Фурье [Арутюнян, Зевин, 1988]:

$$W(x, y) = \sum_n \sum_m W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$\varphi^{(1)}(x, y) = \sum_n \sum_m \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m = 1.2...M, n = 1.2...N),$$

$$\varphi^{(1)}(x, y) = \varphi^{(3)}(x, y),$$

где коэффициенты  $W_{mn}$ ,  $\varphi_{mn}$  в тригонометрических рядах определяются из решения пластин в форме Навье.

Механические характеристики материала слоев и линейные размеры трехслойной сталебетонной конструкции приведены в табл. 1.

**Таблица 1.** Механические характеристики материала слоев и геометрические параметры конструкции

**Table 1.** Mechanical characteristics of the material of the layers and geometric parameters of the structure

Наименование	Числовые значения
Модуль упругости материала внешних слоев	$E^{(1)} = E^{(3)} = 2,1 \cdot 10^5$ МПа
Коэффициент Пуассона материала внешних слоев	$\nu^{(1)} = \nu^{(3)} = 0,3$
Модуль упругости материала внутреннего слоя	$E^{(2)} = 8 \cdot 10^3$ МПа
Коэффициент Пуассона материала внутреннего слоя	$\nu^{(2)} = 0,2$
Длины сторон квадратной конструкции	$a = b = 1,2$ м
Толщина внешних (первого и третьего) слоев	$h^1 = h^3 = 1$ мм
Толщина среднего (второго) слоя	$h^2 = 118$ мм

Расчеты проведены при нагрузке с интенсивностью  $q = 1$  МПа, распределенной в центральной зоне на площадке с линейными размерами  $200 \times 200$  мм<sup>2</sup>. Выполнено исследование НДС с различными значениями коэффициентов жесткости швов  $\eta^{(1)}$  и  $\eta^{(2)}$ .

Усилия на анкерах и напряжения вычислялись с учетом локального воздействия анкеров, соединяющих слои. Расстояние между анкерами определялись по соотношениям вида:

$$h_x = \frac{a}{(K - 1)}, \quad h_y = \frac{b}{(L - 1)},$$

где  $K$  и  $L$  — количество анкеров вдоль координатных осей  $x$ ,  $y$  соответственно.

Сосредоточенные усилия анкеров  $P_x^i(k, l)$ ,  $P_y^i(k, l)$  с учетом их координат вычисляются по формулам:

$$P_x^i(k, l) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \tau(x, y) dx dy;$$

$$x_1 = x_0 - \frac{h_x}{2}, \quad x_2 = x_0 + \frac{h_x}{2},$$

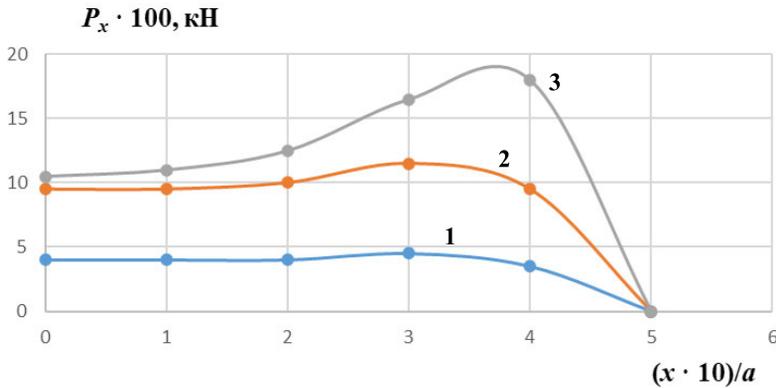
$$y_1 = y_0 - \frac{h_x}{2}, \quad y_2 = y_0 + \frac{h_x}{2},$$

где  $x_0, y_0$  — координаты расположения анкеров;  $h_x$  — расстояние между анкерами.

Расстояние между анкерами, которое связывает внешние стальные листы со средним слоем, равно 120 мм. При такой сетке анкеров и данных параметрах конструкции указанная жесткость обеспечивается при установке анкеров диаметром  $d = 8,7$  мм. При проведении исследований трехслойной пластины с анкерным соединением слоев величины жесткости связей швов варьировались в пределах от 1 до 20 кН/мм<sup>3</sup>.

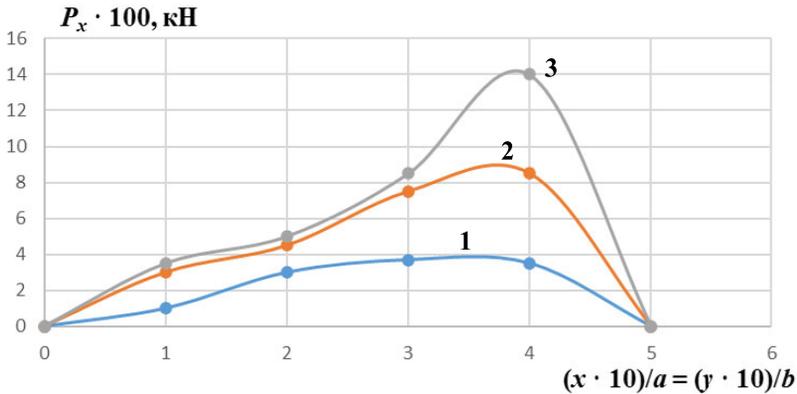
Результаты распределения усилий  $P_x$  в анкерах при различных значениях коэффициентов жесткости шва приведены на рис. 1 и 2.

Из расчетов, приведенных на рис. 1, видно, что чем больше жесткость связи, тем значительнее усилия, связанные со сдвигом слоев, которые находятся на относительном расстоянии  $0,3 \leq x/a \leq 0,4$ .



**Рис. 1.** Усилия  $P_x$  в анкерах трехслойной плиты ( $y = 0,5b$ ). Значения координаты  $x$  и коэффициентов жесткости шва: 1 — 1 кН/мм<sup>3</sup>; 2 — 5 кН/мм<sup>3</sup>; 3 — 20 кН/мм<sup>3</sup>

**Fig. 1.** Forces  $P_x$  in anchors of a three-layer plate ( $y = 0.5b$ ). Coordinate  $x$  values and joint stiffness factors: 1 — 1 кН/мм<sup>3</sup>; 2 — 5 кН/мм<sup>3</sup>; 3 — 20 кН/мм<sup>3</sup>



**Рис. 2.** Распределение усилий от анкеров. Значения коэффициентов жесткости шва: 1 — 1 кН/мм<sup>3</sup>; 2 — 5 кН/мм<sup>3</sup>; 3 — 20 кН/мм<sup>3</sup>

**Fig. 2.** Distribution of anchor forces. Values of joint stiffness factors: 1 — 1 кН/мм<sup>3</sup>; 2 — 5 кН/мм<sup>3</sup>; 3 — 20 кН/мм<sup>3</sup>

Распределение усилий  $P_x$  от анкеров по сечению вдоль диагонали отражено на рис. 2. Расчет по определению напряжений проведен для точек, координаты которых в ячейке с размерами  $1 \times 1$  мм. При большей податливости связей величина наибольшего усилия сдвигается к внешнему краю пластины.

Как видно из приведенных расчетов, при изменении жесткости анкерных связей изменяются не только величины усилий  $P_x$ , приходящихся на каждый анкер, но и картина распределения усилий между анкерами. Последнее связано с изменением формы распределения сдвигающих напряжений в шве. Это явление наблюдается и при изменении других параметров исследуемой конструкции, например изменении жесткости среднего слоя.

## Заключение

Таким образом, получена математическая модель деформирования составной многослойной (в частном случае трехслойной) конструкции, выполнены расчеты с учетом анкерного соединения слоев и выделены усилия, приходящиеся на отдельный анкер. Выявлены эффекты, связанные с изменением напряженного состояния от соотношения шагов между анкерами в двух ортогональных направлениях или от количества анкерных связей в соединительных швах. Связи в виде анкеров обеспечивают совместность работы слоев составной композитной конструкции, но при этом возникают проблемы прочности самого анкера из-за сдвигающих усилий в околоанкерных зонах, где приложены сосредоточенные нагрузки.

Варьируя шагом расстановки анкеров, можно обеспечить отсутствие проскальзывания одного слоя по отношению к другому. Величина шага зависит от интегральных характеристик жесткости отдельных слоев и от податливости анкеров, связывающих слои. При увеличении шага расстановки анкеров наблюдается уменьшение жесткости связи между слоями. Дальнейшим развитием теории расчета каркасных систем, представляющих собой составные пластины, предполагается разработка модели для исследования напряженно-деформированного состояния систем с дискретным соединением слоев из композитных материалов.

## Список источников

- Абрамян С. Г., Гнатюк Д. В. 2017. Сборные и сборно-монолитные каркасные системы высотных зданий с плоскими плитами перекрытия // *Науковедение*. Том 9. № 1. С. 83.
- Арутюнян Н. Х., Зевин А. А. 1988. Расчет строительных конструкций с учетом ползучести. М.: Стройиздат. 256 с.
- Белых А. Н., Астахов И. А., Ткач Р. А. 2021. Современные структурные изолированные панели // *Перспективы науки*. № 11 (146). С. 54–56.
- Гранев В. В., Кодыш Э. Н., Трекин Н. Н., Терехов И. А., Еремин К. И., Шмаков С. Д. 2019. Проектирование сборных железобетонных конструкций каркасных зданий: новый свод правил // *Промышленное и гражданское строительство*. № 4. С. 4–9. <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2019.04.04-09>

- Жигулина А. Ю., Буров Л. О. 2020. История развития каркасных малоэтажных зданий // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре: сб. ст. 77-й Всерос. науч.-техн. конф. (26–30 октября 2020 г., Самара, Россия) / под ред. М. В. Шувалова, А. А. Пищулева, Е. А. Ахмедовой. Самара: Самарский гос. техн. ун-т. С. 296–301.
- Лысова Ю. Д., Фомин Н. И., Сяо Ш., Сюй В. 2022. Конструктивно-технологические решения сборно-монолитных систем в странах Восточной Азии // Инженерный вестник Дона. № 10 (94). С. 283–300.
- Николаев С. В., Шрейбер А. К., Этенко В. П. 2015. Панельно-каркасное домостроение — новый этап развития КПД // Жилищное строительство. № 2. С. 3–7.
- Новожилов В. В. 1991. Основы нелинейной теории упругости. Л.: Политехника. 211 с.
- Овсянников С. Н., Максимов В. Б. 2018. Энергоэффективные наружные стеновые панели каркасно-панельных зданий // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. Том 20. № 6. С. 107–114. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2018-20-6-107-114>
- Подшивалов И. И., Андриенко И. А. 2022. Моделирование напряженно-деформированного состояния одноэтажного каркасного здания, получившего повреждения // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. Том 24. № 6. С. 119–128. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2022-24-6-119-128>
- Стрелец К. И., Стрелкова М. Д. 2019. Эффективность применения сборно-монолитных каркасных систем в гражданском строительстве // Неделя науки СПбПУ: материалы науч. конф. с междунар. участием (18–23 ноября 2019 г., Санкт-Петербург, Россия). Инженерно-строительный институт. В 3 ч. / отв. ред. Н. Д. Беляев, В. В. Елистратов. СПб.: Политех-Пресс. Ч. 2. С. 196–198.
- Терентьев А. В., Терехова О. П. 2023. Особенности технологий сборно-монолитного каркасного строительства объектов // Вестник науки. Том 2. № 5 (62). С. 541–551.
- Якубовский Ю. Е. 1994. Нелинейная теория изгиба и расчет составных пластин и пологих оболочек переменной жесткости: автореф. дис. д-ра техн. наук. Екатеринбург: Урал. гос. техн. ун-т. 46 с.
- Якубовский Ю. Е., Гуляев Б. А., Колосов В. И., Кривчун Н. А., Якубовская С. В. 2016. Изгиб составных пластин и пологих оболочек: монография. Тюмень: Тюмен. индустр. ун-т. 185 с.
- Якубовский Ю. Е., Герасимов Д. С. 2018. Моделирование тонкостенных сталебетонных составных конструкций: монография. Тюмень: Тюмен. индустр. ун-т. 130 с.
- Якубовский Ю. Е., Гуляев Б. А., Донкова И. А., Кузьяев А. Г. 2018а. Моделирование и расчет составных пластин, пологих и цилиндрических оболочек: монография. Тюмень: Тюмен. индустр. ун-т. 190 с.
- Якубовский Ю. Е., Колосов В. И., Донкова И. А., Круглов С. О. 2018б. Моделирование вязкоупругих свойств стареющего материала // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 4. № 4. С. 181–190. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2018-4-4-181-190>
- Glumov I. S., Yakubovskiy Yu. E. 2017. Model of requirements to a resource providing system to maintain buses and train drivers in the motor transport companies engaged in passenger transportation // Transportation Research Procedia. Vol. 20. Pp. 219–224. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2017.01.055>

- Yakubovskiy Yu. E., Goltsov V. S., Kolosov V. I. 2016a. Deformation of working shells of mixing devices in the production of concrete for underground construction // *Procedia Engineering*. Vol. 165. Pp. 1238–1245. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.846>
- Yakubovskiy Yu. E., Kolosov V. I., Gulyaev B. A., Goltsov V. S. 2016b. Bending of structurally orthotropic composite structures with anchor connection layers // *Procedia Engineering*. Vol. 165. Pp. 1246–1253. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.847>

## References

- Abramyan, S. G., & Gnatyuk, D. V. (2017). Precast and cast-in-situ frame systems of high-rise buildings with flat slabs. *Naukovedenie*, 9(1), 83. [In Russian]
- Arutyunyan, N. Kh., & Zevin, A. A. (1988). *Calculation of Building Structures Taking into Account Creep*. Strojizdat. [In Russian]
- Belykh, A. N., Astakhov, I. A., & Tkach, R. A. (2021). Modern structural insulated panels. *Science Prospects*, (11), 54–56. [In Russian]
- Granev, V. V., Kodysh, E. N., Trekin, N. N., Terekhov, I. A., Yeromin, K. I., & Shmakov, S. D. (2019). Design of precast reinforced concrete structures of frame buildings: a new set of rules. *Industrial and Civil Engineering*, (4), 4–9. <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2019.04.04-09> [In Russian]
- Jigulina, A. Yu., & Burov, L. O. (2020). History of the development of frame low-rise buildings. In M. V. Shuvalov, A. A. Pischulev, & E. A. Ahmedova (Eds.), *Traditions and Innovations in Construction and Architecture: Collection of Articles of the 77<sup>th</sup> All-Russian Scientific and Technical Conference (October 26–30, 2020, Samara, Russia)* (pp. 296–301). Samara State Technical University. [In Russian]
- Lysova, Yu. D., Fomin, N. I., Siao, S., & Siui, V. (2022). Structural and technological solutions for prefabricated-monolithic systems in East Asia. *Engineering Journal of Don*, (10), 283–300. [In Russian]
- Nikolaev, S. V., Shrejber, A. K., & Etenko, V. P. (2015). Panel and frame house building is a new stage of large-panel construction development. *Housing Construction*, (2), 3–7. [In Russian]
- Novozhilov, V. V. (1991). *Fundamentals of Nonlinear Elasticity Theory*. Politehnika. [In Russian]
- Ovsyannikov, S. N., & Maksimov, V. B. (2018). Energy-efficient external wall panels of frame-panel buildings. *Journal of Construction and Architecture*, 20(6), 107–114. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2018-20-6-107-114> [In Russian]
- Podshivalov, I. I., & Andrienko, I. A. (2022). Finite element modeling of stress-strain state of damaged one-storey frame building. *Journal of Construction and Architecture*, 24(6), 119–128. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2022-24-6-119-128> [In Russian]
- Strelets, K. I., & Strelkova, M. D. (2019). The effectiveness of the use of prefabricated monolithic frame systems in civil engineering. In N. D. Belyaev, & V. V. Elistratov (Eds.), *SPbPU Science Week: Materials of a Scientific Conference with International Participation (November 18–23, 2019, Saint Petersburg, Russia)*. Institute of Civil Engineering. In 3 parts (Part 2, pp. 196–198). Politech-Press. [In Russian]
- Terentyev, A. V., & Terekhova, O. P. (2023). Features of technologies of prefabricated monolithic frame construction of objects. *Vestnik nauki*, 2(5), 541–551. [In Russian]
- Yakubovskiy, Yu. E. (1994). *Nonlinear Theory of Bending and Calculation of Composite Plates and Flat Shells of Variable Stiffness* [Dr. Sci. (Tech.) dissertation abstract, Ural State Technical University]. [In Russian]

- Yakubovskiy, Yu. E., Gulyaev, B. A., Kolosov, V. I., Krivchun, N. A., & Yakubovskaya, S. V. (2016). *Bending of Composite Plates and Flat Shells*. Industrial University of Tyumen [In Russian]
- Yakubovskiy, Yu. E., & Gerasimov, D. S. (2018). *Modeling of Thin-Walled Steel Concrete Structures*. Industrial University of Tyumen. [In Russian]
- Yakubovskiy, Yu. E., Gulyaev, B. A., Donkova, I. A., & Kuzyaev, A. G. (2018a). *Modeling and Calculation of Composite Plates of Flat and Cylindrical Shells*. Industrial University of Tyumen. [In Russian]
- Yakubovskiy, Yu. E., Kolosov, V. I., Donkova, I. A., & Kruglov, S. O. (2018b). Modeling viscoelastic properties of aging material. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 4(4), 181–190. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2018-4-4-181-190> [In Russian]
- Glumov, I. S., & Yakubovskiy, Yu. E. (2017). Model of requirements to a resource providing system to maintain buses and train drivers in the motor transport companies engaged in passenger transportation. *Transportation Research Procedia*, 20, 219–224. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2017.01.055>
- Yakubovskiy, Yu. E., Goltsov, V. S., & Kolosov, V. I. (2016a). Deformation of working shells of mixing devices in the production of concrete for underground construction. *Procedia Engineering*, 165, 1238–1245. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.846>
- Yakubovskiy, Yu. E., Kolosov, V. I., Gulyaev, B. A., & Goltsov, V. S. (2016b). Bending of structurally orthotropic composite structures with anchor connection layers. *Procedia Engineering*, 165, 1246–1253. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.847>

## Информация об авторах

Юрий Евгеньевич Якубовский, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной механики, Институт транспорта, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия  
[jakubovskijje@tyuiu.ru](mailto:jakubovskijje@tyuiu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-6838-0631>

Ирина Адольфовна Донкова, кандидат технических наук, доцент кафедры программного обеспечения, Институт математики и компьютерных наук, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия; доцент кафедры прикладной механики, Институт транспорта, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия  
[i.a.donkova@utmn.ru](mailto:i.a.donkova@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1151-4931>

## Information about the authors

Yuriy E. Yakubovskiy, Dr. Sci. (Tech.), Professor, Department of Applied Mechanics, Institute of Transport, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[jakubovskijje@tyuiu.ru](mailto:jakubovskijje@tyuiu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-6838-0631>

Irina A. Donkova, Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor, Department of Software, Institute of Mathematics and Computer Science, University of Tyumen, Tyumen, Russia; Associate Professor, Department of Applied Mechanics, Institute of Transport, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[i.a.donkova@utmn.ru](mailto:i.a.donkova@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1151-4931>