

© С. Л. БОРОДИН

Институт теоретической и прикладной
механики им. С. А. Христиановича СО РАН
borodin@ikz.ru

УДК 519.6; 536.242; 622.276

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

NUMERICAL SOLUTION OF THE STEFAN'S PROBLEM

Рассмотрены все наиболее известные численные методы решения задачи Стефана, а также новый метод, разработанный авторами, с целью выбора наиболее эффективного из них с позиций точности и скорости расчетов. Сравнение проводилось на результатах решения задачи движения границы фазового перехода «лед-вода» вокруг вертикальной скважины, проходящей сквозь толщу многолетних мерзлых пород. Сделаны выводы, которые распространяются и на другие многомерные и многофронтные постановки задачи Стефана. Приведена математическая модель, представлено краткое описание рассматриваемых численных методов, указаны границы их применимости, достоинства и недостатки. Показано, что использование явной схемы приводит к значительному увеличению времени расчетов, а шеститочечная симметричная схема может давать колеблющееся решение. Таким образом, для одномерных однофронтных задач Стефана наиболее эффективным является метод ловли фронта в узел сетки с использованием неявной схемы, а для многомерных многофронтных задач — метод энтальпий с использованием неявной схемы, разработанный авторами.

All of the most well-known numerical methods for solving the Stefan's problem, as well as a new method developed by the author are considered for the purpose of choosing the most efficient of them from a perspective of accuracy and computational speed. A comparison is carried out on the results of solving the problem for the boundary motion of "ice-water" phase transition around the vertical well passing through the thickness of permafrost. The conclusions, which are distributed to other multidimensional and multi-front statements of the Stefan's problem, are made. The mathematical model, the brief description of the considered numerical methods and the boundaries of their applicability are presented. The comparison shows the advantages and disadvantages of different methods. It is demonstrated that the use of the explicit scheme leads to a marked increase in computation time, the six-point symmetric scheme may have oscillating solution; therefore, the implicit scheme is the most preferred. It is concluded that the most efficient method for one-dimensional and one front Stefan's problems is the method of catching the front in the grid node using the implicit scheme, and the most efficient method for multi-dimensional and multi-front Stefan's problems is the enthalpy method using the implicit scheme, which has been developed by the author.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Задача Стефана, численные методы, протаивание мерзлых пород.

KEY WORDS. Stefan's problem, numerical methods, permafrost thawing.

Введение

В конце XIX в. австрийский физик и математик Йозеф Стефан представил класс задач, посвященных формированию льда. Впоследствии задачи с подвижными межфазными границами стали называть задачами Стефана [1, 15]. В настоящее время под задачей Стефана понимают класс математических моделей, описывающих тепловые, диффузионные или термодиффузионные процессы, сопровождающиеся фазовыми превращениями с поглощением или выделением скрытой теплоты [2]. К ним относятся:

- сушка, кристаллизация и сублимация, являющиеся основными процессами химической технологии и широко использующиеся в разнообразных промышленных аппаратах [5];
- испарительное охлаждение [9];
- промерзание и/или оттаивание грунтов [6] и др.

Аналитическое (автомодельное) решение задачи Стефана можно получить лишь для малого числа постановок, поэтому в большинстве случаев необходимо применять численные методы, которых достаточно много [2, 7, 8, 10, 11, 13], но работ, в которых бы был проведен сравнительный анализ этих методов, не было найдено. В связи с этим разумно провести такой анализ, и осуществить выбор наиболее эффективного численного метода для решения задач Стефана, сочетающего высокую точность и скорость расчетов. На примере решения одномерной радиальной двухфазной задачи Стефана (применительно к протаиванию мерзлого грунта, окружающего вертикальный канал с теплоносителем) проводится сравнение 7 численных методов, в том числе нового, разработанного авторами (Метод 2). Пять из них — идейно разные, в двух парах подходы схожие, но они реализованы с использованием разных схем.

Постановка задачи

Пусть имеется вертикальная скважина, проходящая сквозь толщу многолетних мерзлых пород (ММП). В результате теплообмена между газожидкостной смесью, движущейся в скважине, и мерзлым грунтом, происходит его протаивание. Примем следующие допущения: породы однородны и изотропны; плотность мерзлой равна плотности талой; тепло передается только за счет теплопроводности; при движении фронта фазовых переходов в ММП не происходит массопереноса жидких флюидов. Тогда уравнения теплопроводности в талой (1) и мерзлой (2) зонах, начальное (3) и граничные (4, 5) условия, а также закон движения границы раздела талой и мерзлой пород (6) могут быть записаны в виде [3, 4, 14]:

$$\rho c_{th} \frac{\partial T_{th}}{\partial t} = \lambda_{th} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{th}}{\partial r} \right), \quad (R_c \leq r \leq R_{th}), \quad (1)$$

$$\rho c_{fr} \frac{\partial T_{fr}}{\partial t} = \lambda_{fr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{fr}}{\partial r} \right), \quad (R_{th} \leq r < \infty), \quad (2)$$

$$T_{fr} = T_{geo}. \quad (t = 0), \quad (3)$$

$$-\lambda_{th} \frac{\partial T_{th}}{\partial r} = \frac{\alpha(T_h - T_0)}{2\pi R_c}, \quad (r = R_c), \quad (4)$$

$$T_{fr} = T_{geo}, \quad (r = \infty), \quad (5)$$

$$\lambda_{fr} \frac{\partial T_{fr}}{\partial r} \Big|_{r=R_{th}+0} - \lambda_{th} \frac{\partial T_{th}}{\partial r} \Big|_{r=R_{th}-0} = \rho w L \frac{dR_{th}}{dt}, \quad (6)$$

где t, r — временная и радиальная координаты; T_i, c_i и λ_i ($i = th, fr$) — температура, коэффициенты теплоемкости и теплопроводности в талой и мерзлой зонах соответственно; ρ — плотность породы; R_c и R_{th} — внешний радиус канала и радиус протаявшей зоны; α — коэффициент теплопередачи от теплоносителя к окружающей породе; T_{geo}, T_h, T_0 — начальная температура породы, температура теплоносителя и температура на границе канала и породы соответственно; w — льдосодержание мерзлой породы; L — удельная теплота таяния льда.

Краткое описание сравниваемых численных методов

1) Метод энтальпий + явная схема [11].

Уравнения (1) и (2) заменяются одним уравнением для энтальпии H :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (H = \rho c T),$$

Данное уравнение решается с использованием явной схемы, при этом на каждом шаге по времени после расчета H определяется температура:

$$T = \begin{cases} H/\rho c_{fr}, & (H < 0) \\ 0, & (0 \leq H \leq \rho w L) \\ (H - \rho w L)/\rho c_{th}, & (H > \rho w L). \end{cases}$$

Данный метод достаточно прост в численной реализации, применим для многомерных и многофронтных задач (в последних добавляются дополнительные условия для расчета температур из энтальпий), задач с конвекцией, многофазных, с учетом адиабатического охлаждения и дросселирования, — в общем, всех задач, для которых возможно решение уравнения энергии.

2) Метод энтальпий + неявная схема [11].

Это авторский метод, согласно которому во всей области решается уравнение энергии и находится распределение температуры без учета фазовых превращений (протаивание, промерзание пород и др.). Затем, зная T_i^{k+1} , рассчитываются энтальпии:

$$H_i^{k+1} = H_i^k + \rho \cdot c_i^k (T_i^{k+1} - T_i^k),$$

после чего температуры пересчитываются следующим образом, что позволяет учесть фазовые переходы:

$$T_i^{k+1} = \begin{cases} H_i^{k+1} / \rho c_{fr}, & (H_i^{k+1} < 0) \\ 0, & (0 \leq H_i^{k+1} \leq \rho w L) \\ (H_i^{k+1} - \rho w L) / \rho c_{th}, & (H_i^{k+1} > \rho w L). \end{cases}$$

Метод последних всех задач, которые изначально можно решить без учета фазовых превращений.

3) Метод ловли фронта в узел сетки [7, 10] + неявная схема [11].

Идея состоит в том, что на каждом временном слое итерационно подбирается шаг по времени, за который фронт фазового перехода переместится на один шаг по пространственной координате. К данному методу применимы только абсолютно устойчивые разностные схемы, т. к. для условно устойчивых, вследствие подбора шага по времени, может не выполняться условие сходимости. Метод применим только для одномерных и однофронтных задач.

4) Метод ловли фронта в узел сетки [7, 10] + шеститочечная симметричная схема [11].

Данный метод аналогичен предыдущему, но в нем используется шеститочечная симметричная схема. Применим только для одномерных и однофронтных задач.

5) Квазистационарный подход + неявная схема [11].

При таком подходе делается дополнительное допущение, что в талой зоне, вследствие ее малой протяженности и длительного времени протаивания, можно использовать стационарное уравнение теплопроводности. Тогда уравнения запишутся в виде:

$$T = T_0 - \frac{T_0 \cdot \ln(r/R_c)}{\ln(R_{th}/R_c)}, \quad (R_c \leq r \leq R_{th}), \quad (7)$$

$$T = \frac{T_J \cdot \ln(r/R_{th})}{\ln((R_c + J\Delta r)/R_{th})}, \quad (R_{th} \leq r \leq R_c + J\Delta r), \quad (8)$$

$$\rho c_{fr} \frac{\partial T_{fr}}{\partial t} = \lambda_{fr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{fr}}{\partial r} \right), \quad (R_c + J\Delta r \leq r < \infty), \quad (9)$$

где (7) — стационарное распределение температуры в талой зоне; (8) — стационарное распределение температуры в малой части начала мерзлой зоны (длина интервала, в котором используется это уравнение, не больше шага по пространственной переменной ($\leq \Delta r$); J — индекс первого узла сетки после радиуса протаивания); (9) — уравнение теплопроводности в мерзлой зоне. Остальные уравнения аналогичны уравнениям (3)-(6).

Применимость этого метода нужно оценивать для каждой конкретной постановки.

6) Метод выпрямления фронта [7, 10] + неявная схема [11].

Идея заключается в замене переменных, чтобы задача решалась в фиксированной области.

Метод применим для решения одномерных многофронтных задач. В [10] рассмотрено его применение для решения двумерной однофронтной задачи.

7) Метод сглаживания коэффициентов [7, 10] + неявная схема [11].

Во всей области решается уравнение теплопроводности со сглаженными коэффициентами теплоемкости и теплопроводности, которые определяются следующим образом:

$$c = \begin{cases} c_{th}, & (T > \Delta) \\ \frac{c_{th} + c_{fr}}{2} + \frac{w \cdot L}{2\Delta}, & (-\Delta \leq T \leq \Delta) \\ c_{fr}, & (T < -\Delta) \end{cases}, \quad \lambda = \begin{cases} \lambda_{th}, & (T > \Delta) \\ \frac{\lambda_{th} + \lambda_{fr}}{2}, & (-\Delta \leq T \leq \Delta) \\ \lambda_{fr}, & (T < -\Delta) \end{cases},$$

где Δ — параметр сглаживания. С другими вариантами сглаживания, а также с выбором его параметра можно ознакомиться в [7].

Метод применим для многомерных и многофронтных задач.

Сравнение методов

Проводилось с помощью разработанной программы, которая рассчитывает распределения температуры по радиальной координате, а также выдает время расчетов. Расчеты проводились при следующих параметрах: $T_h = 50^\circ\text{C}$; $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; $R_c = 0,1 \text{ м}$; $T_{\text{geo}} = -5^\circ\text{C}$; $\rho = 2000 \text{ кг}/\text{м}^3$; $w = 0,25$; $L = 330000 \text{ Дж}/\text{кг}$; $c_{fr} = 1000 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; $c_{th} = 1380 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; $\lambda_{fr} = 1,85 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; $\lambda_{th} = 1,64 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; $r = 100 \text{ м}$; $\Delta r = 0,01 \text{ м}$; $\Delta t = 50 \text{ с}$ (для явной схемы); $\Delta t = 5000 \text{ с}$ (для неявной схемы). Расчетный период, если не оговорено дополнительно, составляет 5 лет.

На рис. 1 представлены распределения температуры по радиальной координате, рассчитанные различными методами.

Рис. 1 показывает, что все методы дают качественно и количественно похожие результаты. Для более подробного сравнения на рис. 2 и в табл. 1 представлены распределения температуры грунта вблизи скважины. Также на рис. 3, в табл. 2 и табл. 3 приведены распределения температуры грунта вблизи фронта протаивания.

Из рис. 2 и табл. 1 видно, что:

- Метод 4 дает колеблющееся распределение температуры. Это является особенностью поведения решения, полученного с помощью шеститочечной симметричной схемы при больших шагах по времени, которые возникают при решении методом ловли фронта в узел сетки. Таким образом, для данного метода предпочтительней использовать полностью неявную схему, которая лишена указанного недостатка;
- значения температуры, рассчитанные Методом 5, немного занижены ($\sim 0,1^\circ\text{C}$). Причиной является погрешность из-за дополнительного допущения метода о квазистационарности распределения температуры в талой зоне;

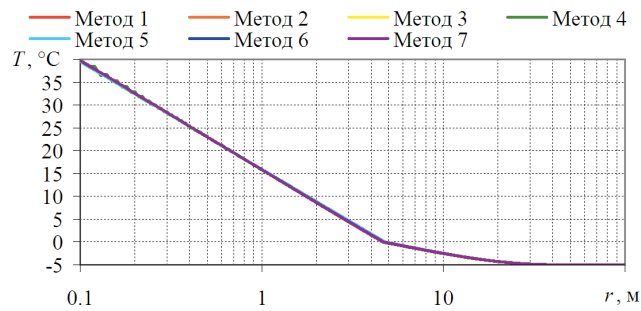


Рис. 1. Распределения температуры по радиальной координате

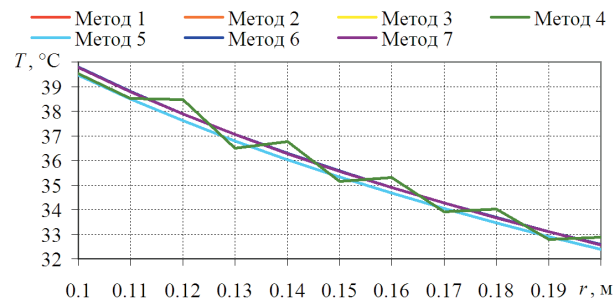


Рис. 2. Распределения температуры по радиальной координате вблизи скважины

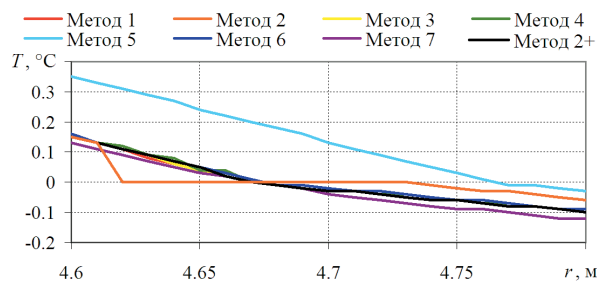


Рис. 3. Распределения температуры по радиальной координате вблизи фронта протаивания

— результаты всех остальных методов отличаются совершенно незначительно (~0.01°C).

Анализ рис. 3, табл. 2 и 3 показывает, что:

— при расчете Методом 2 получается резкий разрыв (с 0.13°C до 0°C в соседних узлах сетки) и протяженная зона с нулевой температурой, что является его недостатком. Устранить его можно, если после расчетов линейно экстраполировать до нуля последние положительные значения температуры (в данном случае — 0.15°C и 0.13°C), и после них подставить отрицательные значения, которые находятся после протяженной

Таблица 1

Значения температуры грунта вблизи скважины

г, м	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.2
Метод 1	39.79	38.79	37.89	37.06	36.29	35.57	34.9	34.27	33.67	33.11	32.57
Метод 2	39.79	38.8	37.89	37.06	36.29	35.57	34.9	34.27	33.67	33.11	32.58
Метод 3	39.79	38.8	37.89	37.06	36.29	35.57	34.9	34.27	33.67	33.11	32.58
Метод 4	39.52	38.51	38.48	36.5	36.77	35.14	35.3	33.9	34.02	32.79	32.88
Метод 5	39.47	38.5	37.61	36.79	36.03	35.33	34.67	34.05	33.47	32.91	32.39
Метод 6	39.79	38.8	37.89	37.06	36.29	35.57	34.9	34.27	33.68	33.11	32.58
Метод 7	39.78	38.79	37.89	37.05	36.28	35.56	34.89	34.26	33.67	33.1	32.57

Таблица 2

Значения температуры грунта вблизи фронта протаивания — 1

г, м	4.6	4.61	4.62	4.63	4.64	4.65	4.66	4.67	4.68	4.69	4.7
Метод 1	0.15	0.13	0.11	0.08	0.06	0.04	0.02	0	-0.01	-0.01	-0.02
Метод 2	0.15	0.13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Метод 3	0.15	0.13	0.11	0.09	0.06	0.04	0.02	0	-0.01	-0.01	-0.02
Метод 4	0.16	0.13	0.12	0.09	0.08	0.04	0.04	0	-0.01	-0.01	-0.02
Метод 5	0.35	0.33	0.31	0.29	0.27	0.24	0.22	0.2	0.18	0.16	0.13
Метод 6	0.16	0.13	0.11	0.09	0.07	0.05	0.03	0.01	-0.01	-0.01	-0.02
Метод 7	0.13	0.11	0.09	0.07	0.05	0.03	0.02	0	-0.01	-0.02	-0.04
Метод 2+	0.15	0.13	0.11	0.09	0.07	0.05	0.02	0	-0.01	-0.02	-0.03

зоны с нулевой температурой. Результат этого представлен в последних строках табл. 2 и 3 (Метод 2+). Метод 2 в дальнейшем сравнивается с учетом экстраполяции;

- Метод 5 дает немного завышенные значения температуры ($\sim 0.1^\circ\text{C}$) и завышенное же значение радиуса протаивания (~ 10 см). Причиной этого является погрешность вследствие дополнительного допущения метода о квазистационарности распределения температуры в талой зоне;
- результаты всех остальных методов отличаются совершенно незначительно ($\sim 0.01^\circ\text{C}$ по температуре и максимум 1 см по радиусу протаивания).

Таблица 3

Значения температуры грунта вблизи фронта протаивания — 2

г, м	4.71	4.72	4.73	4.74	4.75	4.76	4.77	4.78	4.79	4.8
Метод 1	-0.03	-0.04	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.07	-0.08	-0.09	-0.1
Метод 2	0	0	0	-0.01	-0.02	-0.03	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06
Метод 3	-0.03	-0.04	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.07	-0.08	-0.09	-0.09
Метод 4	-0.03	-0.04	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.07	-0.08	-0.09	-0.09
Метод 5	0.11	0.09	0.07	0.05	0.03	0.01	-0.01	-0.01	-0.02	-0.03
Метод 6	-0.03	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06	-0.06	-0.07	-0.08	-0.09	-0.09
Метод 7	-0.05	-0.06	-0.07	-0.08	-0.09	-0.09	-0.1	-0.11	-0.12	-0.12
Метод 2+	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06	-0.06	-0.07	-0.08	-0.08	-0.09	-0.1

В табл. 4 приведены значения радиуса протаивания, в табл. 5 — времена расчетов, полученные различными методами на разные моменты времени.

Таблица 4

Радиусы протаивания (м)

t, год	Метод 1	Метод 2+	Метод 3	Метод 4	Метод 5	Метод 6	Метод 7
1	2.33	2.33	2.33	2.33	2.38	2.34	2.34
2	3.13	3.14	3.14	3.14	3.21	3.14	3.14
3	3.74	3.74	3.74	3.74	3.82	3.75	3.74
4	4.23	4.24	4.24	4.24	4.33	4.24	4.24
5	4.67	4.67	4.67	4.67	4.77	4.68	4.67
6	5.05	5.06	5.06	5.06	5.16	5.06	5.06
7	5.41	5.41	5.41	5.41	5.52	5.41	5.41
8	5.73	5.74	5.74	5.74	5.85	5.74	5.74
9	6.03	6.04	6.04	6.04	6.16	6.04	6.04
10	6.32	6.32	6.33	6.33	6.45	6.33	6.33

Времена расчетов (с)

t, год	Метод 1	Метод 2+	Метод 3	Метод 4	Метод 5	Метод 6	Метод 7
1	104	5	1	1.5	2	27	6
2	243	10	1.2	1.9	4	40	13
3	333	15	1.4	2.2	6	50	19
4	462	19	1.6	2.4	8	59	26
5	544	24	1.7	2.6	11	67	31
6	657	30	1.9	2.9	13	75	39
7	781	35	2	3	14	83	44
8	900	40	2.1	3.2	17	93	50
9	923	46	2.2	3.4	19	100	57
10	1123	51	2.3	3.5	20	104	63

Из табл. 4 видно, что Метод 5 дает завышенные значения радиуса протаивания (~10 см) по причине погрешности вследствие дополнительного допущения для метода о квазистационарности распределения температуры в талой зоне. Радиусы протаивания, полученные с помощью остальных методов, практически не отличаются (максимальная разница 1 см).

Табл. 5 показывает, что наибольшее время расчета у Метода 1. Это объясняется тем, что используется явная схема, которая является условно устойчивой, и для ее сходимости необходим малый шаг по времени. Метод ловли фронта в узел сетки значительно превосходит другие методы в скорости расчета, т. к. в нем достигаются большие шаги по времени, которые, тем не менее, не приводят к значительным погрешностям.

Исходя из данных табл. 5, расположим все методы в порядке убывания скорости расчета (цифра в конце — во сколько раз, в среднем, время расчета больше, чем у наибо́льшего метода):

- 1) Метод 3 (ловля фронта в узел сетки + неявная схема) — 1;
- 2) Метод 4 (ловля фронта в узел сетки + шеститочечная симметр. схема) — 1.5;
- 3) Метод 5 (квазистационарный подход + неявная схема) — 6.6;
- 4) Метод 2+ (энтальпии + неявная схема) — 15.8;
- 5) Метод 7 (сглаживание коэффициентов + неявная схема) — 20;
- 6) Метод 6 (выпрямление фронта + неявная схема) — 40.1;
- 7) Метод 1 (энтальпии + явная схема) — 348.9.

В результате расчетов распределения температуры и радиуса протаивания вокруг вертикальной добывающей скважины с использованием методов «Энтальпии + неявная схема» и «Сглаживание коэффициентов» был выявлен недо-

статок последнего метода, который при некоторых значениях начальных параметров дает неверное решение, которое, тем не менее, можно улучшить путем подбора параметра сглаживания (рис. 4). Данный недостаток проявился, когда начальная температура окружающей скважину породы была близка к температуре фазового превращения.

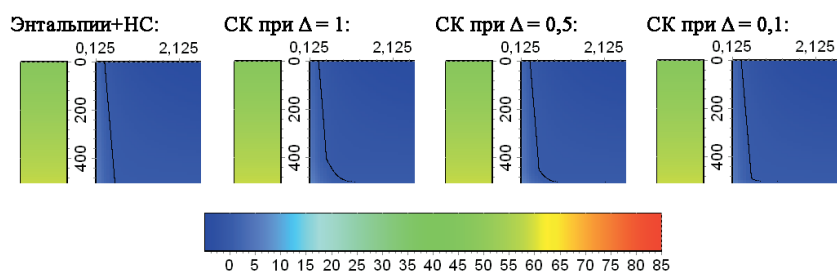


Рис. 4. Распределения по глубине и радиальной координате температуры в скважине и ММП на 30 суток эксплуатации.

Зеленые столбцы — температура в скважине,
синие — температура в ММП.

Черной линией показана граница протаивания

Выводы

На основе результатов сравнительного анализа 7 численных методов сделаны следующие выводы:

1) использование явной схемы приводит к значительному увеличению времени расчетов, а шеститочечная симметричная схема может давать колеблющееся решение. Таким образом, наилучшей является неявная схема;

2) для одномерных однофронтных задач Стефана наиболее эффективным численным методом (из рассмотренных) является метод ловли фронта в узел сетки с использованием неявной схемы;

3) для многомерных многофронтных задач Стефана наиболее эффективными численными методами являются метод энтальпий с использованием неявной схемы (имеется устранимый недостаток, приведенный в статье), а также метод сглаживания коэффициентов с использованием неявной схемы (во избежание неверного результата вычислений необходимо правильно подобрать параметр сглаживания для каждой конкретной задачи и начальных условий).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилюк И. И. О задаче Стефана / И. И. Данилюк // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. № 5. С. 133-185.
2. Крылов Д. А. Подходы к решению трехмерных задач теплопроводности с учетом фазовых переходов в дисперсных средах / Д. А. Крылов // Молодежный научно-технический вестник. 2013. № 3. URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/562218.html>
3. Медведский Р. И. Строительство и эксплуатация скважин на нефть и газ в вечноммерзлых породах / Р. И. Медведский. М.: Недра, 1987. 230 с.
4. Мусакаев Н. Г. Численное исследование закономерностей движения фронта фазового перехода в многолетнемерзлых породах / Н. Г. Мусакаев, С. Н. Романюк, С. Л. Бородин // Известия вузов. Нефть и газ. 2011. № 6. С. 122-128.

5. Новый справочник химика и технолога. Процессы и аппараты химической технологии. СПб.: НПО «Профессионал». 2004. Ч. I; 2006. Ч. II.
6. Основы геокриологии / под. ред. Э. Д. Ершова. М.: Из-во МГУ. 2001, Ч. 4. Динамическая геокриология.
7. Павлов А. Р. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса при фазовых переходах: учебное пособие / А. Р. Павлов. Якутск, 2001. 58 с.
8. Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. В. Патанкар. М.: Энергоатомиздат, 1984. 146 с.
9. Полежаев Ю. В. Тепловая защита / Ю. В. Полежаев, Ф. Б. Юревич. М.: Энергия, 1976. 392 с.
10. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
11. Самарский А. А. Численные методы: учеб. пособие для ВУЗов / А. А. Самарский, А. В. Гулин. М.: Наука, 1989. 432 с.
12. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1977. 735 с.
13. Самарский А. А. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана / А. А. Самарский, Б. Д. Моисеенко // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 5. С. 816-827.
14. Шагапов В. Ш. Теплообмен скважины с окружающими породами / В. Ш. Шагапов, Н. Г. Мусакаев // Инженерно-физический журнал. 1998. Т. 71. № 6. С. 1134-1140.
15. Jozef Stefan: His Scientific Legacy on the 175th Anniversary of His Birth / J. C. Crepeau (Ed.). М. — Idaho — USA, 2013.

REFERENCES

1. Danyluk I. I. On the Stefan problem. Uspekhi Matematicheskikh nauk [Russian Mathematical Surveys]. 1985. Vol. 40. No 5. Pp. 133-185. (In Russian)
2. Krylov D. A. Podhody k resheniju trehmernyh zadach teploprovodnosti s uchetom fazovyh perehodov v dispersnyh sredah [Approaches to Solving Three-dimensional Problems of Heat Conduction with Phase Transitions in Dispersion Medium] // Molodezhnyj nauchno-tehnicheskij vestnik [Youth Scientific and Technical Herald]. 2013. No 3. <http://sntbul.bmstu.ru/doc/562218.html>. (In Russian)
3. Medvedskij R. I. Stroitel'stvo i ekspluatacija skvazhin na neft' i gaz v vechnomerzlyh porodah [Construction and Operation of Oil and Gas Wells in Permafrost]. М.: Nedra, 1987. 230 p. (In Russian)
4. Musakaev N. G., Romanjuk S. N., Borodin S. L. Chislennoe issledovanie zakonmernostej dvizhenija fronta fazovogo perehoda v mnogoletnemerzlyh porodah [Numerical Study of Mechanism of Phase Transition Front Movement in Permafrost Rocks] // Izvestija vuzov. Neft' i gaz [Higher Educational Institutions News. Oil and Gas]. 2011. No 6. Pp. 122-128. (In Russian)
5. Novyj spravocnik himika i tehnologa. Processy i apparaty himicheskoj tehnologii [New Guide for Chemists and Technologists. Processes and Devices of Chemical Technology]. SPb.: Professional NPO. 2004. Part I; 2006. Part II. (In Russian)
6. Osnovy geokriologii. [Fundamentals of Geocryology.] / Je. D. Ershova (Ed.). М.: Izd-vo MGU [Moscow State University Publishing House], 2001. Ch. 4. Dinamicheskaja geokriologija [P. 4. Dynamic Geocryology] (In Russian)
7. Pavlov A. R. Matematicheskoe modelirovanie processov teplomassoperehosa pri fazovyh perehodah. Uchebnoe posobie [Mathematical Modelling of Heat and Mass

- Transfer Processes at Phase Transitions. Textbook]. Yakutsk, 2001. 58 p. (In Russian)
8. Patankar S. V. Chislennye metody reshenija zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti [Numerical Methods for Solving Problems of Heat Transfer and Fluid Dynamics]. M.: Energoatomizdat, 1984. 146 p. (In Russian)
 9. Polezhaev Ju. V., Jurevich F. B. Teplovaja zashhita [Thermal Protection]. M.: Energija [Energy], 1976. 392 p. (In Russian)
 10. Samarskij A. A., Vabishhevich P. N. Vychislitel'naja teploperedacha [Computational Heat Transfer]. M.: Editorial URSS, 2003. 784 p. (In Russian)
 11. Samarskij A. A., Gulin A. V. Chislennye metody: uchebnoje posobie dlja VUZov [Numerical Methods: Textbook for University Students]. M.: Nauka [Science], 1989. 432 p. (In Russian)
 12. Samarskij A. A., Moiseenko B. D. Ekonomichnaja shema skvoznogo scheta dlja mnogomernoj zadachi Stefana [An Economic Continuous Calculation Scheme for the Stefan Multidimensional Problem] // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoj Fiziki [Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 1965. Vol. 5. No 5. Pp. 816-827. (In Russian)
 13. Tihonov A. N., Samarskij A. A. Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of Mathematical Physics]. M.: Nauka [Science], 1977. 735 p. (In Russian)
 14. Shagapov V. Sh., Musakaev N. G. Teploobmen skvazhiny s okruzhajushhimi porodami [Heat Transfer in the Well with Surrounding Formations] // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal [Engineering Physics and Thermophysics]. 1998. Vol. 71. No 6. Pp.1134-1140. (In Russian)
 15. Jozef Stefan: His Scientific Legacy on the 175th Anniversary of His Birth / J. C. Crepeau (Ed.). M. — Idaho — USA, 2013.

Автор публикации

Бородин Станислав Леонидович — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Тюменского филиала ФГБУН Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

Author of the publication

Stanislav L. Borodin — Cand. Sci. (Phys. and Math.), Research Officer at the Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences