

Численное исследование устойчивости естественной конвекции

Павел Иванович Томчик[✉], Анатолий Александрович Кислицын

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

Контакт для переписки: p.i.tomchik@utmn.ru[✉]

Аннотация. Аналитическая теория устойчивости естественной конвекции, основы которой были созданы в середине XX в., на практике применима лишь для анализа достаточно простых модельных объектов: жидкости между твердыми плоскостями, в полостях шаровой и кубической формы, в каналах круглого, прямоугольного и кольцевого сечений и ряда других. Анализ современных технических систем требует привлечения численных методов — наиболее мощных в рамках математического анализа в настоящее время. Тем не менее аналитические методы необходимы для тестирования расчетных кодов и верификации результатов, полученных с помощью численных методов. В статье выполнен цикл численных экспериментов с целью исследования устойчивости стационарных одно- и двухвихревых режимов конвекции, установлены области бифуркации, в которых происходят переходы между этими режимами, и связь этих переходов с изменениями энергетических параметров конвективных течений. Численное моделирование выполнялось в квадратных ячейках на сетке 21×21 методом контрольных объемов с помощью алгоритма SIMPLER. В качестве жидкости была взята вода в диапазоне температур от 20 до 50 °C и чисел Грасгофа от 100 до 22 400. При моделировании учитывалась зависимость числа Прандтля от температуры. В результате исследований установлены 4 области бифуркации, в которых установившийся вид конвективных потоков теряет устойчивость и переходит в другой вид: $313,6 < Gr < 396,8$; $3\ 135,8 < Gr < 3\ 527,3$; $10\ 913,3 < Gr < 13\ 307,2$; $Gr > 22\ 406,0$. Установлены 4 критических числа Рэлея, соответствующие этим областям, которые с учетом зависимости числа Pr от температуры равны: $Ra_{кр1} = 1\ 790,7$; $Ra_{кр2} = 14\ 738,3$; $Ra_{кр3} = 45\ 835,9$; $Ra_{кр4} = 79\ 317,2$. Показано, что все эти области бифуркации связаны с переходами потенциальной энергии жидкости в кинетическую и обратно. Установлено, что границе применимости приближения Буссинеска соответствует значение $Gr \approx 13\ 307,2$, или $Ra \approx 55\ 890,2$. Сравнение значений критических чисел Рэлея, полученных

в численных экспериментах, с числами аналитической теории показывает совпадение первых двух критических чисел $Ra_{кр1}$ и $Ra_{кр2}$. Значения $Ra_{кр3}$ совпадают по порядку величины, а $Ra_{кр4}$ различаются почти в 2 раза, что объясняется тем, что значение $Ra_{кр4}$ выходит за пределы области применимости приближения Буссинеска и, строго говоря, не имеет физического смысла.

Ключевые слова: естественная конвекция, приближение Буссинеска, аналитическая теория устойчивости, численные методы, алгоритм SIMPLER

Цитирование: Томчик П. И., Кислицын А. А. 2024. Численное исследование устойчивости естественной конвекции // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 10. № 4 (40). С. 50–67. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-4-50-67>

Поступила 11.12.2024; одобрена 12.12.2024; принята 16.12.2024

Numerical study of natural convection stability

Pavel I. Tomchik✉, Anatoliy A. Kislitsin

University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: p.i.tomchik@utmn.ru✉

Abstract. The analytical theory of natural convection stability, founded in the middle of the 20th c., is practically applicable only to the analysis of simple model objects: liquid between solid planes, in cavities of spherical and cubic shape, in channels of round, rectangular and annular sections, among others. The analysis of modern technical systems requires the use of numerical methods, which are currently the most powerful methods of mathematical analysis. Yet, analytical methods are necessary for testing calculation codes and verifying the results obtained using numerical methods. This article presents a series of numerical experiments aimed at investigating the stability of stationary one- and two-vortex convection regimes, establishing bifurcation regions in which transitions between these regimes occur, and the relationship of these transitions with changes in the energy parameters of convective flows. Numerical simulation was performed in square cells on a 21×21 grid using the control volume method and the SIMPLER algorithm. In place of a liquid, water was taken in the temperature range of 20–50 °C, and Grashof numbers from 100 to 22,400. The dependence of the Prandtl number on temperature was considered in the simulation. The results have established 4 bifurcation regions in which the established type of convective flows loses stability and changes to another form: $313.6 < Gr < 396.8$; $3135.8 < Gr < 3527.3$; $10913.3 < Gr < 13307.2$; $Gr > 22406.0$. Four critical Rayleigh numbers corresponding to these regions have been

found, which, considering the dependence of the number Pr of the temperature is equal to: $Ra_{cr1} = 1,790.7$; $Ra_{cr2} = 14,738.3$; $Ra_{cr3} = 45,835.9$; $Ra_{cr4} = 79,317.2$. All these bifurcation regions are associated with transitions of the potential energy of the liquid into kinetic energy and vice versa. The limit of the Boussinesq approximation applicability corresponds to the values $Gr \approx 13,307.2$, or $Ra \approx 55,890.2$. The comparison of the values of the critical Rayleigh numbers obtained in numerical experiments with the numbers of the analytical theory shows a very good coincidence of the first two critical numbers Ra_{cr1} and Ra_{cr2} . The Ra_{cr3} values coincide in order of magnitude, and Ra_{cr4} differ almost twofold, which is explained by the Ra_{cr4} value going beyond the scope of the Boussinesq approximation, and, strictly speaking, has no physical meaning.

Keywords: natural convection, Boussinesq approximation, analytical stability theory, numerical methods, SIMPLER algorithm

Citation: Tomchik, P. I., & Kislitsin, A. A. (2024). Numerical study of natural convection stability. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 10(4), 50–67. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-4-50-67>

Received Dec. 11, 2024; Reviewed Dec. 12, 2024; Accepted Dec. 16, 2024

Введение

Естественная конвекция играет важную роль как в природе, так и в работе многих технических устройств, поэтому ее изучение, прежде всего с точки зрения возникновения и устойчивости, остается актуальной задачей для многих областей современной науки и техники.

Основы аналитической теории устойчивости естественной конвекции были заложены в середине XX в. [Остроумов, 1952; Сорокин, 1953; Гершуни, Жуховицкий, 1972; Джозеф, 1981; Ландау, Лифшиц, 1988; Гершуни и др., 1989]. Но аналитическое исследование конвекции даже в простейшей системе из слоя жидкости между двумя твердыми плоскостями является, как будет показано ниже, сложной задачей. Анализ более сложных систем требует преодоления еще больших трудностей. Г. А. Остроумов [1952] привел результаты исследования естественной конвекции в вертикальной цилиндрической трубе круглого сечения, а также в наклонной щели. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий [1972] рассмотрели еще несколько достаточно простых модельных задач: устойчивость вязкой несжимаемой жидкости в полостях шаровой и кубической формы, в каналах эллиптического, прямоугольного и кольцевого сечений.

Дальнейшее усложнение объектов исследования требует привлечения численных методов. В монографиях Джозефа [1981] и Г. З. Гершуни с соавторами [1989] для анализа влияния на устойчивость осложняющих факторов (таких как магнитные и электрические поля, неоднородность состава, температурная зависимость вязкости, неньютоновские жидкости и др.) уже применялись методы Галеркина, пошагового интегрирования и Рунге — Кутты. В дальнейшем широкое применение получили сеточные численные методы

[Пасконов и др., 1984; Андерсон и др., 1990] и метод контрольного объема [Патанкар, 1984]. На основе этих методов разработаны расчетные коды SABENA, SIMPLER и др., на которых выполняются современные численные эксперименты.

В ядерной энергетике результаты экспериментальных исследований реакторов на быстрых нейтронах [Сорокин и др., 2020] показывают опасность возникновения в аварийных режимах кипения теплоносителя (жидкого металла) в активной зоне реактора. В этом случае устойчивость естественной циркуляции теплоносителя является решающим условием, позволяющим сохранить необходимую интенсивность и продолжительность охлаждения тепловыделяющих элементов (ТВЭЛов) и тем самым минимизировать последствия аварии. А. П. Сорокин и др. [2021, 2022] представили результаты экспериментальных и теоретических исследований теплообмена и устойчивости естественной конвекции теплоносителя:

«Полученные результаты показывают, что процесс кипения жидких металлов в ТВС¹ формируется под воздействием различных факторов, имеет сложную структуру, характеризуется как устойчивыми, так и пульсационными режимами с значительными колебаниями технологических параметров (расхода, давления, температуры), которые могут продолжаться в течение десятков секунд и обуславливать кризис теплообмена» [Сорокин и др., 2020, с. 151].

При этом «режим устойчивого пузырькового кипения... отмечается лишь в ограниченной области тепловых потоков» [Сорокин и др., 2020, с. 164], а возникновение неустойчивого пульсационного режима приводит к увеличению амплитуды колебаний расхода теплоносителя, к росту температуры теплоносителя и перегреву оболочек ТВЭЛов. Численные эксперименты, выполненные с помощью кода SABENA-3D, позволяют промоделировать эти процессы и выработать рекомендации сохранения устойчивости теплообмена. А. П. Сорокин и др. [2024] представили итоги анализа и обобщения результатов исследований. Главным итогом является «экспериментальное и расчетное подтверждение возможности устойчивого охлаждения активной зоны в процессе протекания аварии с кипением натрия в тепловыделяющих сборках твэлов (ТВС) активной зоны, изучение границы устойчивого охлаждения активной зоны, получение данных для валидации модели процесса кипения натрия и верификации расчетных кодов» [Сорокин и др., 2024, с. 155]. Приведены результаты сравнения расчетов и экспериментальных исследований: «впервые... показано, что обеспечивается длительное охлаждение ТВС... при плотности теплового потока на поверхности имитаторов твэлов до 140 кВт/м² в режиме естественной конвекции» [Сорокин и др., 2024, с. 170].

В современной технике часто используются жидкости с особыми свойствами, для которых методика исследований естественной конвекции, основанная на приближении Буссинеска, неприменима. Например, М. М. Рамазанов [2012, 2014] исследовал условия возникновения и устойчивости естественной конвекции в сжимаемых жидкостях и газах. В частности, «рассмотрена задача о стационарной конвекции околоскритического газа Ван-дер-Ваальса в пористом, тонком кольце в теплопроводной плоскости с заданным на бесконечности градиентом температуры» [Рамазанов, 2012, с. 76], находящегося вблизи критической точки, для которого одно из основных допущений приближения

¹ ТВС — тепловыделяющие сборки ТВЭЛов (П. Т., А. К.).

Буссинеска — слабая сжимаемость — в этой области параметров не выполняется. Показано, что в этом случае в систему уравнений перепад температуры входит не только через число Рэлея: «Изучены различные предельные случаи, найдены соответствующие асимптотики критического числа Рэлея–Дарси в зависимости от близости к термодинамической критической точке» [Рамазанов, 2012, с. 76]; «в параметрической плоскости число Рэлея — заданный перепад температуры имеет область, где конвекция не возникает ни при каких числах Рэлея» [Рамазанов, 2014, с. 27]. Выведены «необходимое и достаточное условия абсолютной конвективной устойчивости» [Рамазанов, 2014, с. 32] и критерий, определяющий границу этой области.

Другой важной областью применения численных моделей конвективных потоков являются исследования фильтрации грунтовых вод:

«В последние годы все более актуальной становится проблема качества грунтовых вод. Недостаток питьевой воды, воды для орошения сельскохозяйственных культур ощущается, в первую очередь, в засушливых регионах. Качество грунтовых вод определяется происходящими в грунтах физико-химическими и биологическими процессами, которые могут быть техногенного происхождения или вызываться природными явлениями... Показатели качества грунтовых вод зависят от наличия растворенных примесей или примесей в виде мелкодисперсных частиц или включений. Поэтому движения примесей вместе с потоком... играют ключевую роль в рассматриваемых явлениях» [Соболева, Цыпкин, 2014, с. 81].

В статье Е. Г. Соболевой, Г. Г. Цыпкина [2014] выполнено численное моделирование конвективных потоков грунтовых вод. Изучено естественно-конвективное ламинарное течение и его взаимодействие с вынужденной конвекцией в пористых средах, состоящих из твердого скелета, насыщенного водой. Исследована динамика изменения концентрации соли в воде в процессе ее фильтрации. Результаты моделирования показали наличие устойчивого и неустойчивого режимов движения. Определен порог устойчивости вынужденного течения и воздействие на него естественной конвекции.

Особую роль естественная конвекция играет в производстве элементной базы микроэлектронных устройств. Качество получаемых монокристаллов напрямую зависит от устойчивости процессов конвекции и теплообмена при их выращивании из расплавов. О. А. Бессонов [2017] привел результаты многолетних поисков решения проблемы повышения эффективности выращивания кристаллов методом Чохральского:

«Представлены результаты расчетов и анализ влияния... на устойчивость течений в широком диапазоне чисел Прандтля (от 0.01 до 10). Определены режимы с повышенным порогом устойчивости... Построена сводная диаграмма (карта) предельных режимов естественной и смешанной конвекций. Представлена методика контроля и анализа двумерной и пространственной мод неустойчивости» [Бессонов, 2017, с. 44].

Результаты численного исследования внесли значительный вклад в «... понимание практических вопросов повышения устойчивости течения и устранения колебаний расплава при выращивании кристаллов методом Чохральского» [Бессонов, 2017, с. 55].

Таким образом, численные методы являются в настоящее время наиболее мощными методами математического анализа; с их помощью можно детально проанализировать практически любой объект с учетом осложняющих факторов, фазовых переходов, зависимостей

физических параметров от температуры и давления и т. п.; применимость этих методов ограничена только производительностью суперкомпьютеров. Но аналитические методы по-прежнему необходимы для тестирования расчетных кодов и верификации результатов, полученных с помощью численных методов.

Ранее [Томчик и др., 2024] нами были опубликованы предварительные результаты численного моделирования естественной конвекции несжимаемой жидкости в квадратной области. В данной статье мы представляем результаты более детальных численных экспериментов и их сравнение с результатами аналитической теории устойчивости естественной конвекции. Целью исследований является установление критериев устойчивости стационарных режимов конвекции и переходов между этими режимами («точек бифуркации»).

Аналитическая теория устойчивости естественной конвекции

Для идеальной жидкости условие равновесия имеет вид [Ландау, Лифшиц, 1988]:

$$-\frac{dT}{dy} < \frac{g\beta T}{c_p}, \quad (1)$$

где T — температура, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, β — коэффициент теплового расширения жидкости, g — ускорение свободного падения, y — координата, направленная вертикально вверх. Согласно этой формуле, при нормальных условиях конвекция в воде должна начаться при градиенте температур $\approx 1,5 \cdot 10^{-4}$ К/м, а в воздухе — $\approx 0,01$ К/м. Однако, как показывает опыт, свободная конвекция начинается при гораздо больших градиентах температуры. Это означает, что в данном случае вязкостью жидкости или газа пренебрегать нельзя и надо исследовать устойчивость естественной конвекции на основе уравнения Навье — Стокса.

Метод аналитического исследования устойчивости естественной конвекции заключается в том, что на исследуемое стационарное (т. е. не зависящее явно от времени) решение накладываются малые возмущения, зависимость которых от времени определяется множителем $e^{-i\omega t}$. «Сами частоты ω возмущений не произвольны, а определяются в результате решения уравнений (движения)» [Ландау, Лифшиц, 1988, с. 138]. В данном случае это уравнения стационарной конвекции в приближении Буссинеска:

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta\mathbf{g}T', \quad (2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}\nabla T' = a\Delta T', \quad (4)$$

где \mathbf{v} — скорость жидкости; a , ν , ρ — температуропроводность, кинематическая вязкость, плотность жидкости соответственно; T' и p' — отклонение температуры и давления от значений стационарного решения; векторы выделены жирным шрифтом.

«Эти частоты... комплексны. Если имеются такие ω , мнимая часть которых положительна, то $e^{-i\omega t}$ будет неограниченно возрастать со временем. Другими словами, такие возмущения, раз возникнув, будут возрастать, т. е. движение будет неустойчивым... Для устойчивости движения необходимо, чтобы у всех возможных частот ω мнимая часть была отрицательна. Тогда возникающие возмущения будут экспоненциально затухать со временем» [Ландау, Лифшиц, 1988, с. 138].

Применительно к простейшей системе — горизонтальному слою жидкости толщиной h между двумя твердыми плоскостями — метод аналитического исследования на устойчивость естественной конвекции жидкости в процессе ее нагрева выглядит следующим образом. В исходном состоянии жидкость неподвижна, а ее температура во всем объеме постоянна и равна T_c . В начальный момент времени температура нижней плоскости («дна») быстро («скачком») устанавливается равной $T_h > T_c$ и затем поддерживается на этом уровне, а температура верхней плоскости («крышки») остается и поддерживается равной T_c . Начинается прогрев слоя жидкости снизу, в некоторый момент времени равновесие нарушается, и начинается конвекция. Еще через некоторое время поток тепла от нижней стенки к верхней достигает стационарного значения, а линии тока конвективного течения приобретают стационарную форму в виде одного или нескольких вихрей. При дальнейшем повышении температуры скорость конвективных потоков и поток тепла увеличивается, структура вихрей теряет устойчивость, в некоторый момент происходит ее перестройка, и моделирование можно продолжать до тех пор, пока приближение Буссинеска не станет неприменимым.

Наложение возмущения на температуру и давление означает представление T' и p' в виде:

$$T' = T'_0 + \tau_0 \cdot e^{-i\omega t}, \quad p' = p'_0 + \rho w_0 \cdot e^{-i\omega t}, \quad (5)$$

где $\tau_0 \cdot e^{-i\omega t}$ и $w_0 \cdot e^{-i\omega t}$ — возмущения температуры и давления, а T'_0 и p'_0 соответствуют неподвижной жидкости и, следовательно, удовлетворяют уравнениям (2) и (4) при $\mathbf{v} = 0$, т. е.

$$\frac{dp'_0}{dy} + \rho \beta g T'_0 = 0, \quad (6)$$

$$\Delta T'_0 = \frac{d^2 T'_0}{dy^2} = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) легко интегрируется. С учетом того, что T'_0 — это отклонение температуры от равновесного значения, получаем:

$$T'_0 = -Ay, \quad (8)$$

где координата y отсчитывается вертикально вверх, $A = (T_h - T_c)/h$ — константа интегрирования, причем $A > 0$.

Кроме этого, надо учесть, что на первом этапе возникновения конвекции скорость \mathbf{v} также является малой величиной, поскольку невозмущенная скорость отсутствует. Соответственно, скорость \mathbf{v} в данном случае также надо рассматривать как возмущение, зависящее от времени:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \cdot e^{-i\omega t}. \quad (9)$$

Подстановка (5), (8) и (9) в уравнения (2) и (4) с сохранением только членов 1-го порядка малости дает:

$$-i\omega \mathbf{v} = -\nabla w + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta \tau \mathbf{g}, \quad (10)$$

$$-i\omega \tau - \nu_y A = a \Delta \tau. \quad (11)$$

Чтобы привести эти уравнения к безразмерному виду, надо выбрать характерные значения величин, которые фигурируют в этих уравнениях (их можно назвать также единицами измерения этих величин). Для длины такая единица измерения очевидна — это толщина слоя h . Для динамических переменных надо подобрать такие комбинации физических параметров жидкости, которые имеют соответствующую размерность: для частоты — ν/h^2 , для скорости — ν/h , для давления — $\rho \nu^2/h^2$, для температуры — $A h \nu/a$. Далее, принимая условие, что теперь все буквы обозначают соответствующие безразмерные динамические переменные, получаем систему уравнений для определения частот ω :

$$-i\omega \mathbf{v} = -\nabla w + \Delta \mathbf{v} - \text{Ra} \tau \mathbf{n}, \quad (12)$$

$$-i\omega \tau \text{Pr} = \Delta \tau + \nu_y, \quad (13)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (14)$$

$$\text{Gr} = \frac{g\beta(T_h - T_c)h^3}{\nu^2}, \quad \text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} = \frac{g\beta(T_h - T_c)h^3}{\nu \cdot a},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, направленный по оси y вертикально вверх, $\text{Pr} = \nu/a$ — число Прандтля, Gr и Ra — числа Грасгофа и Рэлея соответственно.

Простейшие граничные условия, отвечающие идеальным теплопроводящим стенкам, имеют вид:

$$\mathbf{v} = 0, \tau = 0. \quad (15)$$

Умножим уравнения (12) и (13) на $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_0 \cdot e^{+i\omega t}$ и на $\tau^* = \tau_0 \cdot e^{+i\omega t}$ соответственно и проинтегрируем их по всему объему, занимаемому жидкостью:

$$-i\omega \int |\mathbf{v}|^2 dV = -\int (\mathbf{v}^* \nabla w + \mathbf{v}^* \Delta \mathbf{v} - \text{Ra} \tau \nu_y^*) dV,$$

$$-i\omega \text{Pr} \int |\tau|^2 dV = \int (\tau^* \Delta \tau + \tau^* \nu_y) dV.$$

С помощью формул векторного анализа и нулевых граничных условий (15) эти уравнения можно упростить и преобразовать к виду:

$$-i\omega \int |\mathbf{v}|^2 dV = \int \left(-|\text{rot} \mathbf{v}|^2 + \text{Ra} \tau \nu_y^* \right) dV, \quad (16)$$

$$-i\omega \text{Pr} \int |\tau|^2 dV = \int \left(-|\text{grad} \tau|^2 + \tau^* \nu_y \right) dV. \quad (17)$$

Вычтем из уравнений (16) и (17) уравнения, которые являются им комплексно-сопряженными:

$$-i(\omega + \omega^*) \int |\mathbf{v}|^2 dV = \text{Ra} \int (\tau v_y^* - \tau^* v_y) dV, \quad (18)$$

$$-i(\omega + \omega^*) \text{Pr} \int |\tau|^2 dV = - \int (\tau v_y^* - \tau^* v_y) dV. \quad (19)$$

Теперь умножим обе части уравнения (19) на число Рэлея (Ra) и сложим с уравнением (18). Правые части при этом взаимно уничтожатся:

$$-i(\omega + \omega^*) \int (|\mathbf{v}|^2 + \text{Ra Pr} |\tau|^2) dV = 0, \quad (20)$$

а сумма $(\omega + \omega^*)$ будет равна удвоенной действительной части частоты ω . Интеграл в уравнении (20) всегда положителен, поэтому действительная часть частоты ω равна нулю. Таким образом, частота ω возмущений, случайно возникающих в стационарном конвективном движении, является чисто мнимой: $\omega = i\gamma$.

Чтобы определить значение γ , умножим уравнение (19) на число Рэлея (Ra) и сложим с уравнением (18):

$$i\omega \int (|\mathbf{v}|^2 + \text{Ra Pr} |\tau|^2) dV = \int (|\text{rot } \mathbf{v}|^2 + \text{Ra} |\text{grad } \tau|^2 - 2\text{Ra} \tau v_y^*) dV. \quad (21)$$

Обозначим:

$$\int (|\mathbf{v}|^2 + \text{Ra Pr} |\tau|^2) dV = N, \quad (22)$$

$$\int (|\text{rot } \mathbf{v}|^2 + \text{Ra} |\text{grad } \tau|^2 - 2\text{Ra} \tau v_y^*) dV = J. \quad (23)$$

Учитывая, что $i\omega = i \cdot i\gamma = -\gamma$, получим из уравнения (21) для значения γ следующее выражение:

$$\gamma = -J/N. \quad (24)$$

Интеграл N всегда положителен, а знак интеграла J зависит от числа Рэлея: при $\text{Ra} \rightarrow 0$, очевидно, $J > 0$, значит $\gamma < 0$, и случайно возникающие возмущения затухают. При $\text{Ra} \rightarrow \infty$ происходит смена знака интеграла J , причем неоднократно. Тогда возможны несколько критических значений $\text{Ra}_{\text{кр}}$, при которых происходит смена знака декремента γ . Физический смысл имеют несколько первых из них, а именно те значения, для которых еще применимо приближение Буссинеска, и сохраняется ламинарный режим течения. Чтобы найти эти значения, надо положить в уравнениях (12)–(14) частоту ω равной 0:

$$\Delta \mathbf{v} - \nabla w + \text{Ra} \tau \mathbf{n} = 0,$$

$$\Delta \tau = -v_y, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Эта система уравнений решается стандартными методами, и с учетом граничных условий (15) она приводит к системе алгебраических уравнений, условие совместимости которых дает трансцендентное уравнение, корни которого и определяют искомые значения $\text{Ra}_{\text{кр}}$. Детали этих громоздких вычислений достаточно подробно изложены Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицким [1972], а первые 4 значения $\text{Ra}_{\text{кр}}$ приведены в табл. 1.

Постановка задачи и алгоритм численных экспериментов

Рассматривается конвективное движение несжимаемой жидкости в квадратной области x, y , находящейся в поле действия силы тяжести \mathbf{g} , которая направлена вертикально вниз по оси y . Верхняя и нижняя стенки области горизонтальны, боковые стенки вертикальны и теплоизолированы. Размер стороны квадрата h принят за единицу длины, в направлении третьей координаты область не ограничена. Система уравнений, описывающих естественную нестационарную конвекцию в приближении Буссинеска, имеет вид [Ландау, Лифшиц, 1988]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta \mathbf{g} T',$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T' = a \Delta T', \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

с теми же обозначениями, что и в уравнениях (2)–(4).

Алгоритм численных экспериментов соответствует описанному выше методу аналитического исследования на устойчивость. В исходном состоянии жидкость (вода) неподвижна, ее температура во всем объеме равна T_c . В начальный момент времени температура нижней стенки устанавливается равной $T_h > T_c$, температура верхней стенки остается равной T_c , наблюдается процесс прогрева жидкости до установления равновесия. Если разность температур $(T_h - T_c)$ соответствует числу Рэлея $Ra < Ra_{кр1}$, то условие механического равновесия не нарушается, и через некоторое время устанавливается стационарное температурное поле в неподвижной жидкости. Если же разность температур $(T_h - T_c)$ соответствует числу $Ra > Ra_{кр1}$, то равновесие в жидкости нарушается, и начинается конвекция. Через некоторое время линии тока конвективного течения приобретают стационарную форму в виде одного или нескольких вихрей, а поток тепла от нижней стенки к верхней достигает стационарного значения. При еще большей разности температур число Рэлея превысит не только 1-е, но и 2-е, 3-е и т. д. критические значения, что позволит наблюдать форму конвективных потоков, и сравнить теоретические значения критических чисел Рэлея со значениями, полученными в численных экспериментах.

По описанному алгоритму нами были выполнены 30 численных экспериментов с шагом разности температур $(T_h - T_c)$ в 1°C до тех пор, пока характер конвективных потоков не начал приобретать признаки турбулентности. Начальная температура соответствовала нормальным условиям: $T_c = 20^\circ\text{C}$. Расчеты выполнялись на сетке 21×21 методом контрольных объемов с помощью алгоритма SIMPLER, адаптированного для компилятора GNU Fortran [Патанкар, 1984]. В каждом эксперименте фиксировалось время стабилизации (в единицах безразмерного времени $\tau = h^2/\nu$) безразмерного температурного поля $\theta = (T - T_c)/(T_h - T_c)$, потенциальная и кинетическая энергия жидкости во всей области, вид линий тока конвективного течения, а также числа Рэлея и Рейнольдса. Более подробно постановка задачи, математическая модель и алгоритм численных экспериментов описаны нами в предыдущей статье [Томчик и др., 2024].

Результаты моделирования

Цель экспериментов заключалась в определении значений числа Рэлея, при которых наблюдается возникновение конвекции ($Ra_{кр1}$), в наблюдении перестройки характера конвективных потоков ($Ra_{кр2}$, $Ra_{кр3}$ и т. д.), в определении изменений потенциальной и кинетической энергии. Результаты приведены на рис. 1–4 и в табл. 1.

Одно из преимуществ метода численного моделирования перед аналитической теорией заключается, как отмечено выше, в возможности учета зависимости числа Прандтля от температуры, меняющейся в процессе развития конвекции. Поэтому в численных экспериментах в качестве параметра бралось число Грасгофа, которое зависит от температуры значительно слабее, чем число Прандтля, а вычисления выполнялись при фиксированном значении числа Прандтля $Pr = 6,96$, соответствующем температуре $20\text{ }^\circ\text{C}$ [Варгафтик, 1972]. В дальнейшем число Рэлея бралось как произведение числа Gr на число Pr , соответствующее значению T_μ .

На рис. 1 представлена зависимость времени стабилизации температурного поля θ от числа Грасгофа, зависимости потенциальной (E_p) и кинетической (E_k) энергий, а также их изменения при изменении числа Грасгофа. Четко видно, что резкие изменения значений времени, E_p и E_k на всех графиках происходят при одних и тех же числах Gr . Эти числа (точки бифуркации) обозначены буквами a, b, c, d, e, f, g и соответствуют возникновению конвекции ($Ra_{кр1}$), а также переходам между одновихревым и двухвихревым течением ($Ra_{кр2}$, $Ra_{кр3}$ и $Ra_{кр4}$).

В области левее точки a жидкость неподвижна, конвекция отсутствует, кинетическая энергия равна нулю, число Рейнольдса $Re = 0$, идет накопление потенциальной энергии. В точке a ($Gr = 313,6$) достигается значение $Ra_{кр1} = 1\,790,7$, часть накопленной потенциальной энергии переходит в кинетическую, и возникает конвекция. В точке b ($Gr = 396,8$, $Ra = 2\,261,8$, $Re = 144,0$) происходит стабилизация конвекции, и устанавливается стационарное одновихревое течение (рис. 2).

В области от точки b до точки c идет увеличение кинетической энергии. В точке c ($Gr = 3\,135,8$, $Ra = Ra_{кр2} = 14\,738,3$, $Re = 418,4$) одновихревое течение переходит в двухвихревое, при этом часть кинетической энергии переходит в потенциальную. В точке d ($Gr = 3\,527,3$, $Ra = 16\,578,3$, $Re = 317,6$) происходит стабилизация конвекции и устанавливается стационарное двухвихревое течение (рис. 3).

В области от точки d до точки e идет увеличение кинетической энергии, скорости движения жидкости и среднего значения числа Рейнольдса. В точке e ($Gr = 10\,913,3$, $Ra = Ra_{кр3} = 45\,835,9$, $Re = 579,1$) часть кинетической энергии переходит в потенциальную, и заканчивается область стабильной двухвихревой конвекции. Линии тока, соответствующие этой точке, практически еще не отличаются от линий, представленных на рис. 3, но увеличенное время стабилизации указывает на начинающуюся область неустойчивости. В точке f ($Gr = 13\,307,2$, $Ra = 55\,890,2$, $Re = 615,6$) время стабилизации достигает максимума, а вид линий конвективного тока (рис. 4) уже заметно отличается от стационарных линий на рис. 3. В точке f , по-видимому, заканчивается область применимости приближения Буссинеска.

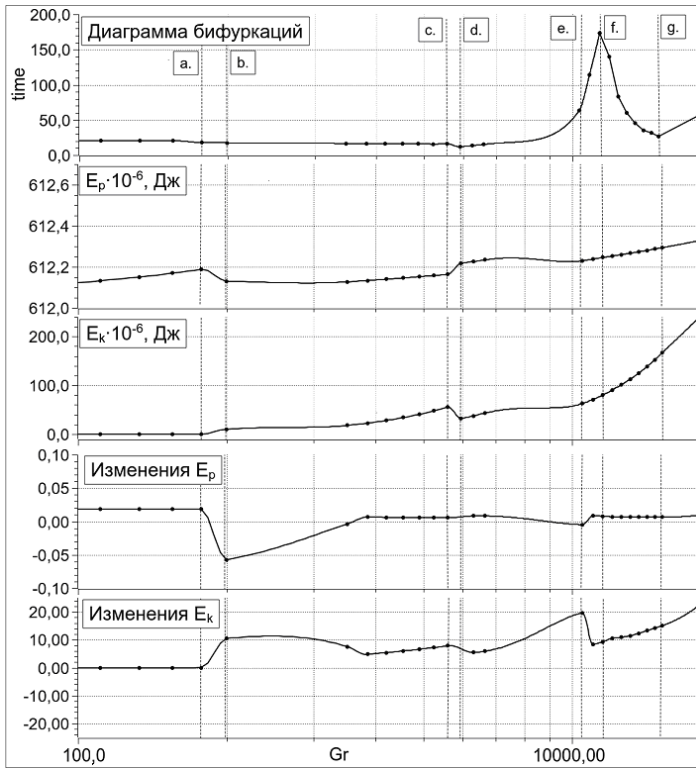


Рис. 1. Зависимость времени стабилизации (time) температурного поля θ , потенциальной (E_p) и кинетической (E_k) энергий конвективных потоков от числа Грасгофа

Fig. 1. Dependence of the stabilization time of the temperature field θ , potential (E_p) and kinetic (E_k) energies of convective flows on the Grashof no.

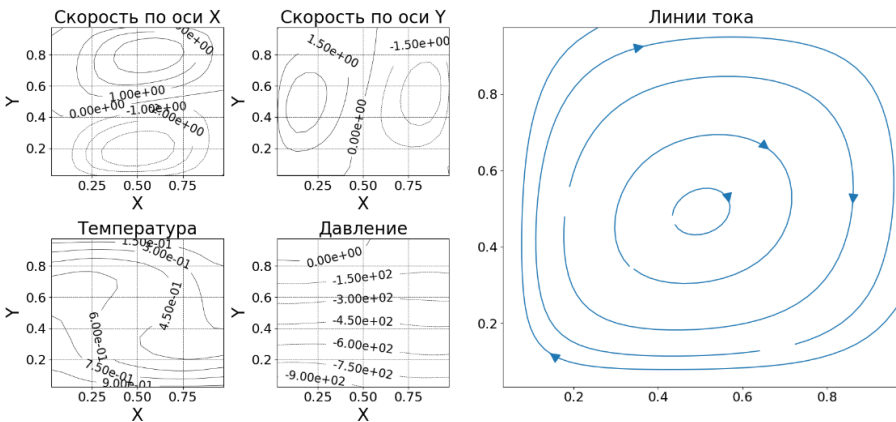


Рис. 2. Одновихревое течение (точка *b* на рис. 1, $Gr = 313,6$, $Ra = 1\,790,7$)

Fig. 2. Single-vortex flow (point *b* in Fig. 1, $Gr = 313.6$, $Ra = 1,790.7$)

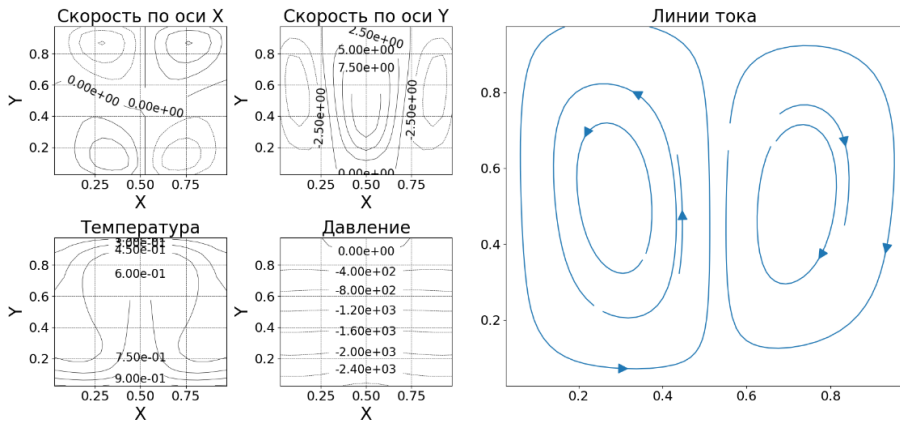


Рис. 3. Двухвихревое течение (точка с на рис. 1, $Gr = 3\,135,8$, $Ra = 14\,550,1$)
Fig. 3. Two-vortex flow (point c in Fig. 1, $Gr = 3,135.8$, $Ra = 14,550.1$)

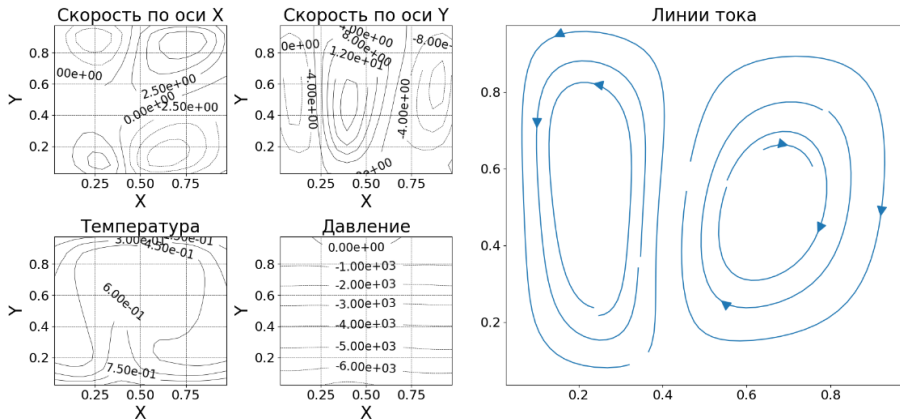


Рис. 4. Смещенное двухвихревое течение (точка f на рис. 1, $Gr = 13\,307,2$, $Ra = 55\,890,2$)
Fig. 4. Offset two-vortex flow (point f in Fig. 1, $Gr = 13,307.2$, $Ra = 55,890.2$)

В точке g ($Gr = 22\,406,0$, $Ra = Ra_{кр4} = 79\,317,2$, $Re = 889,0$) достигается минимальное время стабилизации температурного поля, зарождается трехвихревой режим конвекции (рис. 5), но, несмотря на стабильность температурного поля, картина линий тока трехвихревой конвекции остается нестабильной, что указывает на переход к турбулентному режиму конвекции.

В табл. 1 приведены основные результаты выполненных численных экспериментов. При сравнении теоретических значений $Ra_{кр}$ и значений $Ra_{кр}$, полученных в численных экспериментах, надо учитывать, что в аналитической теории число Рэлея считается константой, не зависящей от температуры, и сравнивать два последних столбца таблицы. Видно, что совпадение первых двух критических чисел Рэлея очень хорошее. Параметры конвективного течения, соответствующего точке e, находятся на границе области

применимости приближения Буссинеска, а точка *g*, как показано выше, уже выходит за пределы этой области. Соответственно, значения $Ra_{кр3}$, совпадающие по порядку величины, надо рассматривать как приближенные, а последние значения $Ra_{кр4}$, различающиеся почти в 2 раза, по-видимому, уже не имеют физического смысла.

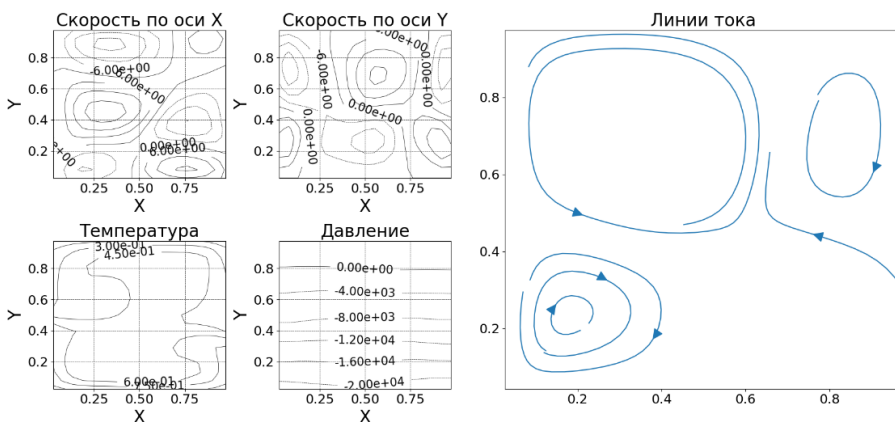


Рис. 5. Разрушение двухвихревого течения, переход к турбулентному режиму конвекции (точка *g* на рис. 1, $Gr = 22\,406,0$, $Ra = 79\,317,0$, $Re = 889,0$)

Fig. 5. Destruction of the two-vortex flow, transition to a turbulent convection regime (point *g* in Fig. 1, $Gr = 22,406.0$, $Ra = 79,317.0$, $Re = 889.0$)

Табл. 1. Значения критических чисел Рэлея

Table 1. Values of Rayleigh critical nos.

Точка на рис. 1	$Gr_{числ}$	$T_{н'}$, °C	Pr	$Ra_{кр числ}$	$Ra_{кр теор}$	$Ra_{кр числ}^*$
a	313,6	28	5,70	1 787,5	1 707,8	1 787,5
c	3 135,8	37	4,70	14 738,3	17 610,4	17 874,1
e	10 913,3	42	4,20	45 835,9	75 709,8	62 205,8
g	22 406,0	50	3,54	79 317,2	219 885,0	127 714,2

Примечание. $Gr_{числ}$ — числа Грасгофа, полученные в численном эксперименте; Pr [Варгафтик, 1972] — число Прандтля для воды, соответствующее температуре $T_{н'}$; $Ra_{кр числ}$ — критические числа Рэлея, полученные в численном эксперименте с учетом зависимости Pr от температуры; $Ra_{кр теор}$ [Гершуни, Жуховицкий, 1972] — критические числа Рэлея, полученные в аналитической теории устойчивости естественной конвекции; $Ra_{кр числ}^* = Gr \cdot 5,7$ — критические числа Рэлея, полученные в численном эксперименте без учета зависимости Pr от температуры.

Note. $Gr_{числ}$ — Grashof nos. obtained in the numerical experiment; Pr (Vargaftik, 1972) — Prandtl no. of water corresponding to the temperature $T_{н'}$; $Ra_{кр числ}$ — Rayleigh critical nos. obtained in the numerical experiment accounting for Pr depending on the temperature; $Ra_{кр теор}$ (Gershuni & Zhukhovitsky, 1972) — Rayleigh critical nos. obtained in the analytical theory of natural convection stability; $Ra_{кр числ}^* = Gr \cdot 5.7$ — Rayleigh critical nos. obtained in the numerical experiment without accounting for Pr depending on the temperature.

Заключение

Выполнен цикл численных экспериментов с целью исследования устойчивости стационарных одно- и двухвихревых режимов конвекции, установлены области бифуркации, в которых происходят переходы между этими режимами, и связь этих переходов с изменениями энергетических параметров конвективных течений. Численное моделирование выполнялось в квадратных ячейках на сетке 21×21 методом контрольных объемов с помощью алгоритма SIMPLER. В качестве жидкости была взята вода в диапазоне температур от 20 до 50 °С и чисел Грасгофа от 100 до 22 400.

В результате исследований выявлены 4 области бифуркации, в которых установившийся вид конвективных потоков теряет устойчивость и переходит в другой вид. Найдены 4 критических числа Рэлея, соответствующих этим областям. Показано, что все эти переходы связаны с переходами потенциальной энергии жидкости в кинетическую и обратно.

В первой области бифуркации первоначально неподвижная жидкость в процессе нагрева накапливает потенциальную энергию, и при значении $Gr = 313,6$ часть накопленной потенциальной энергии переходит в кинетическую, в результате возникает конвекция. При значении $Gr = 396,8$ происходит стабилизация конвекции, и устанавливается стационарное одновихревое течение.

Во второй области бифуркации наблюдается обратный процесс. Накопившаяся в процессе нагрева кинетическая энергия при значении $Gr = 3\,135,8$ частично переходит в потенциальную, и одновихревое течение переходит в двухвихревое. При $Gr = 3\,527,3$ происходит стабилизация конвекции и устанавливается стационарное двухвихревое течение.

В третьей области накопившаяся кинетическая энергия при $Gr = 10\,913,3$ частично переходит в потенциальную, заканчивается область стабильной двухвихревой конвекции. Двухвихревой режим сохраняется, но вихри становятся несимметричными, а время стабилизации достигает максимума. При $Gr = 13\,307,2$ и $Re = 615,6$, по-видимому, заканчивается область применимости приближения Буссинеска.

В четвертой области при $Gr = 22\,406,0$ зарождается трехвихревой режим конвекции, но стабилизации этого режима не происходит, что указывает на переход к турбулентному режиму конвекции и выход за пределы области применимости приближения Буссинеска.

Сравнение значений критических чисел Рэлея, полученных в численных экспериментах, с числами аналитической теории показывает очень хорошее совпадение первых двух критических чисел $Ra_{кр1}$ и $Ra_{кр2}$. Значения $Ra_{кр3}$ совпадают по порядку величины, а $Ra_{кр4}$ различаются почти в 2 раза, но, по-видимому, уже не имеют физического смысла.

Список источников

- Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. 1990. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2 т. / пер. с англ. М.: Мир. Т. 1. 384 с.; Т. 2. 392 с.
- Бессонов О. А. 2017. Анализ смешанной конвекции в модели метода Чохральского в широком диапазоне чисел Прандтля // Известия РАН. Механика жидкости и газа. № 3. С. 44–56. <https://doi.org/10.7868/S0568528117030057>

- Варгафтик Н. Б. 1972. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука. 720 с.
- Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. 1972. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука. 392 с.
- Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. 1989. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука. 320 с.
- Джозеф Д. 1981. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир. 640 с.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. 1988. Теоретическая физика: в 10 т. / отв. ред. Л. П. Питаевский. Том 6: Гидродинамика. М.: Наука. 736 с.
- Остроумов Г. А., 1952. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.-Л.: ГИТТЛ. 256 с.
- Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. 1984. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука. 288 с.
- Патанкар С. В. 1984. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / пер. с англ. под. ред. В. Д. Виленского. М.: Энергоатомиздат. 150 с.
- Рамазанов М. М. 2012. Аналитическое исследование стационарной конвекции околокритического газа Ван дер Ваальса в пористом тонком кольцевом цилиндре в теплопроводном пространстве // Известия РАН. Механика жидкости и газа. № 2. С. 64–77.
- Рамазанов М. М. 2014. О критериях абсолютной конвективной устойчивости сжимаемой жидкости и газа // Известия РАН. Механика жидкости и газа. № 5. С. 27–37.
- Соболева Е. Г., Цыпкин Г. Г. 2014. Численное моделирование конвективных течений в грунте при испарении воды, содержащей растворенную примесь // Известия РАН. Механика жидкости и газа. № 5. С. 81–92.
- Сорокин В. С. 1953. Вариационный метод в теории конвекции // Прикладная математика и механика. Том XVII. С. 39–48.
- Сорокин А. П., Денисова Н. А., Иванов Е. Ф., Кузина Ю. А., Низовцев А. А., Привезенцев В. В., Сорокин Г. А. 2020. Экспериментальные и расчетные исследования теплообмена при кипении жидких металлов на моделях ТВС быстрых реакторах в аварийных режимах // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-реакторные константы. № 2. С. 150–172. <https://www.elibrary.ru/xaурут>
- Сорокин А. П., Иванов Е. Ф., Кузина Ю. А., Денисова Н. А., Низовцев А. А., Привезенцев В. В., Сорокин Г. А. 2021. Экспериментальные и расчетные исследования теплообмена и устойчивости циркуляции при кипении жидких металлов в аварийных режимах в сборках реакторов на быстрых нейтронах // Теплоэнергетика. № 10. С. 24–36. <https://doi.org/10.1134/S0040363621090095>
- Сорокин А. П., Кузина Ю. А., Денисова Н. А., Сорокин Г. А. 2022. Моделирование процесса кипения жидких металлов в модельных сборках быстрых реакторов в аварийных режимах // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-реакторные константы. № 2. С. 204–220. <https://www.elibrary.ru/cofzrv>
- Сорокин А. П., Кузина Ю. А., Денисова Н. А., Сорокин Г. А. 2024. Обобщение результатов экспериментального и численного моделирования кипения щелочных жидких металлов в активной зоне быстрых реакторов (картограмма режимов, теплоотдача) // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-реакторные константы. № 1. С. 154–178. <https://www.elibrary.ru/yhjpps>

Томчик П. И., Зубков П. Т., Кислицын А. А. 2024. Численное исследование механической устойчивости течения в условиях естественной конвекции // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 10. № 3 (39). С. 71–87. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-3-71-87>

References

- Anderson, D., Tannehill, J., & Pletcher, R. (1990). *Computational Hydromechanics and Heat Transfer in 2 vols.* Mir. [In Russian]
- Bessonov, O. A. (2017). Analysis of mixed convection in the model of the Czochralski method in a wide range of Prandtl numbers. *Izvestiya RAS. Mechanics of Liquid and Gas*, (3), 44–56. <https://doi.org/10.7868/S0568528117030057> [In Russian]
- Vargaftik, N. B. (1972). *Handbook of Thermophysical Properties of Gases and Liquids.* Nauka. [In Russian]
- Gershuni, G. Z., & Zhukhovitsky, E. M. (1972). *Convective Stability of an Incompressible Fluid.* Nauka. [In Russian]
- Gershuni, G. Z., Zhukhovitsky, E. M., & Nepomnyashchy, A. A. (1989). *Stability of Convective Currents.* Nauka. [In Russian]
- Joseph, D. (1981). *Stability of Fluid Movements.* Mir. [In Russian]
- Landau, L. D., & Lifshits, E. M. (1988). *Theoretical Physics: in 10 vols. Vol. 6: Hydrodynamics* (L. P. Pitaevsky, Ed.). Nauka. [In Russian]
- Ostroumov, G. A. (1952). *Free Convection in the Conditions of an Internal Problem.* GITTL. [In Russian]
- Paskonov, V. M., Polezhaev, V. I., & Chudov, L. A. (1984). *Numerical Modeling of Heat and Mass Transfer Processes.* Nauka. [In Russian]
- Patankar, S. V. 1984. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* (V. D. Vilenky, Trans.). Energoatomizdat. [In Russian]
- Ramazanov, M. M. (2012). Analytical study of stationary convection of near-critical Van der Waals gas in a porous thin annular cylinder in a thermally conductive space. *Izvestiya RAS. Mechanics of Liquid and Gas*, (2), 64–77. [In Russian]
- Ramazanov, M. M. (2014). On the criteria of absolute convective stability of a compressible liquid and gas. *Izvestiya RAS. Mechanics of Liquid and Gas*, (5), 27–37. [In Russian]
- Soboleva, E. G., & Tsyppkin, G. G. (2014). Numerical modeling of convective flows in soil during evaporation of water containing dissolved admixture. *Izvestiya RAS. Mechanics of Liquid and Gas*, (5), 81–92. [In Russian]
- Sorokin, V. S. (1953). The variational method in the theory of convection. *Applied Mathematics and Mechanics*, 17, 39–48. [In Russian]
- Sorokin, A. P., Denisova, N. A., Ivanov, E. F., Kuzina, Yu. A., Nizovtsev, A. A., Priezentssev, V. V., & Sorokin, G. A. (2020). Experimental and computational studies of the boiling process of liquid metal during the development of an accident in a fast reactor: heat transfer and circulation stability. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear and Reactor Constants*, (2), 150–172. <https://www.elibrary.ru/xaypyt> [In Russian]
- Sorokin, A. P., Ivanov, E. F., Kuzina, Yu. A., Denisova, N. A., Nizovtsev, A. A., Priezentssev, V. V., & Sorokin, G. A. (2021). Experimental and numerical investigations into heat exchange and stability

of circulation during liquid metals' boiling in assemblies of fast neutron reactors in accident regimes. *Теплоэнергетика*, (10), 24–36. <https://doi.org/10.1134/S0040363621090095> [In Russian] (English version: *Thermal Engineering*, 68(10), 752–762)

Sorokin, A. P., Kuzina, Yu. A., Denisova, N. A., & Sorokin, G. A. (2022). Simulation of the boiling process of liquid metals in model assemblies of fast reactors in accident regimes. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear and Reactor Constants*, (2), 204–220. <https://www.elibrary.ru/cofzrv> [In Russian]

Sorokin, A. P., Kuzina, Yu. A., Denisova, N. A., & Sorokin, G. A. (2024). Generalization of the results of experimental and numerical simulation of boiling of alkaline liquid metals in the core of fast reactors (cartogram of two-phase flow regimes, heat transfer). *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear and Reactor Constants*, (1), 154–178. <https://www.elibrary.ru/yhjjs> [In Russian]

Tomchik, P. I., Zubkov, P. T., & Kislitsin, A. A. (2024). Numerical study of the mechanical stability of the flow under the conditions of natural convection. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 10(3), 71–87. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-3-71-87> [In Russian]

Информация об авторах

Павел Иванович Томчик, аспирант, кафедра фундаментальной математики и механики, Школа компьютерных наук, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия
p.i.tomchik@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6960-4097>

Анатолий Александрович Кислицын, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной и технической физики, Школа естественных наук, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия
a.a.kislitsyn@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3863-0510>

Information about the authors

Pavel I. Tomchik, Postgraduate Student, Department of Fundamental Mathematics and Mechanics, School of Computer Sciences, University of Tyumen, Tyumen, Russia
p.i.tomchik@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6960-4097>

Anatoliy A. Kislitsin, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Applied and Technical Physics, School of Natural Sciences, University of Tyumen, Tyumen, Russia
a.a.kislitsyn@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3863-0510>