

Андрей Гарьевич ПЛАВНИК<sup>1</sup>  
Андрей Николаевич СИДОРОВ<sup>2</sup>

УДК 004.94+519.65:550.8

## СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В РАМКАХ ВАРИАЦИОННО-СЕТОЧНОГО МЕТОДА ГЕОКАРТИРОВАНИЯ

<sup>1</sup> доктор технических наук, главный научный сотрудник,  
Западно-Сибирский филиал института геологии нефти и газа  
СО РАН (г. Новосибирск);  
профессор кафедры геологии месторождений нефти и газа,  
Тюменский индустриальный университет  
plavnikag@ipgg.sbras.ru; ORCID: 0000-0001-8099-4874

<sup>2</sup> кандидат геолого-минералогических наук, заведующий отделением,  
Научно-аналитический центр рационального недропользования (г. Тюмень)  
andrey.sidorov21@gmail.com

### Аннотация

Необходимость стохастического моделирования свойств геологических объектов обусловлена их существенной неоднородностью и ограниченностью объема фактических данных. Существующие методы моделирования в своей постановке в значительной степени базируются на стохастическом представлении модельных условий, заложенных и реализуемых в кригинге.

В рамках других методов картирования, использующих иные модельные условия, необходима выработка новых подходов к постановке задачи и реализации методов стохастического моделирования.

В данной работе рассматривается подход, базирующийся на применении вариационно-сеточного метода геокартирования, в котором решение осуществляется на основе

---

**Цитирование:** Плавник А. Г. Стохастическое моделирование в рамках вариационно-сеточного метода геокартирования / А. Г. Плавник, А. Н. Сидоров // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Том 6. № 3 (23). С. 110-130.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-110-130

---

минимизации квадратичного функционала с возможностью учета множества разнородных данных, в том числе и имеющих стохастическую природу.

Предложен и апробирован метод прямого стохастического моделирования, который заключается в формировании минимизируемого функционала из трех составных элементов, отвечающих за аппроксимацию данных, за учет общих пространственных закономерностей и за вклад случайной составляющей в модельные построения. Метод характеризуется небольшим количеством управляющих параметров, с прогнозируемым влиянием их изменения на результаты моделирования, применим для моделирования как непрерывных, так и категориальных параметров. Обеспечивает простую возможность построения точной карты математического ожидания множества вариантов стохастического моделирования.

Математические особенности реализации подхода, заключающиеся в сведении задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений с симметричной и положительно-определенной матрицей и в возможности однократного выполнения ее факторизации, определяют вычислительную эффективность проведения многовариантных расчетов.

Приведены расчеты, выполненные для двух групп данных с существенно различающимися не только количественными, но и модельными параметрами, демонстрирующие возможности и особенности реализации предлагаемого подхода в разных условиях. Продемонстрирована возможность согласования параметров вариограмм стохастических решений и фактических данных.

#### **Ключевые слова**

Геологические объекты, неоднородность свойств, вариационно-сеточный метод, прямое стохастическое моделирование, вычислительная эффективность, последовательное гауссово моделирование, индикаторное моделирование, кригинг.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-110-130**

#### **Введение**

Недостаток объема и качества фактических данных, характеризующих свойства геологических объектов, как правило, не позволяет выполнить моделирование их пространственных закономерностей с требуемой для решения практических задач детальностью и достоверностью. В этих условиях активно используются методы стохастического моделирования и расчета множества возможных вариантов построений, позволяющие осуществлять вероятностную оценку неоднородности распределения изучаемых свойств и на этой основе принимать решения по оптимизации процессов геологоразведки и разработки месторождений минеральных ресурсов.

Стохастическое моделирование свойств геологических объектов, активно развиваемое с 1970-х гг., отличается разнообразием применяемых подходов и областей практического приложения [5, 13, 20, 21]. Одним из наиболее распространенных алгоритмов является метод последовательного гауссова моделирования, который активно используется при вероятностном описании непрерывных

величин. При описании категориальных переменных используется метод усеченного гауссова моделирования. Для обоих типов данных используются методы последовательного индикаторного моделирования и моделирования отжига. Разработаны и применяются методы объектного моделирования, позволяющие учитывать и описывать сложную геометрию изучаемых объектов. Эти методы находят применение при решении широкого спектра прикладных вопросов, например, при моделировании гидрогеологических условий [14, 15], при моделировании пространственного расположения литофаций [9, 10, 19], распространения трещин [1, 16], при обработке пиксельных изображений земной поверхности [12], в задачах оптимизации расположения нефтегазодобывающих скважин [11] и во многих других задачах геологического моделирования [2, 7, 18 и др.].

Общим для широко используемых методов стохастического моделирования является требование обеспечения идентичности плотности распределения и пространственной корреляционной структуры в результатах моделирования соответствующим показателям, прослеживаемым в исходных данных [5, с. 185]. Такая постановка задач моделирования в значительной степени базируется на стохастическом представлении модельных условий пространственных закономерностей, заложенных и реализуемых в кригинге.

В рамках других методов картирования, использующих иные модельные условия для описания пространственных закономерностей изменения свойств геологических объектов, необходима выработка других подходов к постановке задачи и реализации методов стохастического моделирования. Перспективность развития таких подходов, с одной стороны, обусловлена дополнительным расширением сферы применимости этих методов картирования, а с другой — возможным повышением эффективности решения прикладных задач по сравнению существующими подходами, в определенной мере ограниченными модельными рамками.

В данной работе эта задача рассматривается для подхода, реализующего вариационно-сеточный метод (ВСМ) геокартирования [3, 4, 6], в котором модельные условия формулируются в виде уравнений в частных производных по пространственным координатам и статистические закономерности, прослеживаемые в экспериментальных данных, напрямую не могут быть учтены. Однако этот метод отличается простотой решения задач картирования с использованием множества разнородных данных, в том числе имеющих стохастическую природу.

Несмотря на длительный период развития ВСМ, вопросы стохастического моделирования ранее детально не рассматривались. Это связано в первую очередь с большим выбором возможных модельных условий и с необходимостью сужения их рамок для получения конкретного подхода, допускающего, с одной стороны, простоту практического приложения, а с другой — обеспечивающего решение для широкого класса прикладных задач.

В данной работе приведены подходы и результаты, отражающие материалы первых этапов исследований и свидетельствующие, как представляется, о значительном потенциале этого направления.

### Основные элементы вариационно-сеточного метода геокартирования

Обобщенная постановка задачи в рамках ВСМ, применимая для решения широкого круга задач, представлена в [6]. Здесь приводятся лишь краткие сведения об этом методе, необходимые для дальнейшего изложения.

Значения картируемой поверхности в ВСМ аппроксимируются функцией, определяемой в виде линейной комбинации набора базисных функций  $g_m(x, y)$ :

$$S(x, y) = \sum_m f_m g_m(x, y),$$

где  $f_m$  — коэффициенты.

Решение задачи геокартирования осуществляется на основе минимизации функционала, представляющего собой сумму слагаемых, определяемых квадратами невязок расчетных и фактических данных и невязок между задаваемыми модельными условиями (количество которых не ограничено) и закономерностями, прослеживаемыми в результатах картирования. Слагаемые входят в функционал с весовыми коэффициентами, которые позволяют управлять соотношением точности аппроксимации данных и согласованности с модельными условиями.

Квадратичность минимизируемого функционала относительно неизвестных параметров определяет простоту решения для такого класса задач, которое в конечном итоге сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $f_m$ . В качестве базисных функций  $g_m(x, y)$  используются бикубические В-сплайны на регулярной прямоугольной сетке, что обеспечивает сильную разреженность матрицы системы уравнений, надежность и высокую вычислительную эффективность решения.

Использование весовых коэффициентов и детальности сетки в качестве управляющих параметров позволяет добиваться согласования необходимой точности результатов и их соответствия модельным условиям. Возможность аддитивного включения в минимизируемый функционал множества разнородной информации обеспечивает особую гибкость метода. Метод реализован в программном комплексе GST [8, 17], в рамках которого получены представленные далее результаты.

В данной работе составная часть функционала, определяемая фактическими данными, имеет стандартный для метода наименьших квадратов вид:

$$\Phi_z = \rho_z \sum_{i=1} (S(x_i, y_i) - z_i)^2,$$

где  $z_i$  — фактические значения параметра в точке  $(x_i, y_i)$ ,  $\rho_z$  — весовой коэффициент.

И наиболее часто используемые при картировании априорные условия со стабилизаторами минимума поверхности и минимума кривизны применяются в качестве модельных. В первом варианте ограничиваются первые произ-

водные искомой функции  $S(x, y)$  ( $S_x$  и  $S_y$ ), и минимизируемый функционал имеет вид:

$$\Phi_s = \Phi_z + \rho_s \int_{\Omega} (S_x^2 + S_y^2) dx dy, \quad (1)$$

где  $\rho_s$  — весовой коэффициент. Во втором ограничиваются вторые производные ( $S_{xx}$ ,  $S_{xy}$  и  $S_{yy}$ ), и функционал имеет вид:

$$\Phi_c = \Phi_z + \rho_s \int_{\Omega} (S_{xx}^2 + 2S_{xy}^2 + S_{yy}^2) dx dy. \quad (2)$$

Отметим, что решение зависит от соотношения весовых коэффициентов, а не от их абсолютных значений. Увеличение веса на данные ( $\rho_z$ ) приводит к повышению точности аппроксимации, а увеличение веса на стабилизатор ( $\rho_s$ ) приближает решение к трендовой плоскости, горизонтальной для варианта (1) или к наклонной для варианта (2).

#### Метод прямого стохастического моделирования

Для реализации стохастического моделирования в данной работе в минимизируемый функционал добавляется дополнительное слагаемое, зависящее от функции  $\zeta(x, y)$ , значения которой задаются в узлах сетки в виде случайных чисел с заданным законом распределения.

При отсутствии трендовой составляющей в качестве дополнительного модельного условия принято допущение о линейной близости картируемого показателя и функции  $\zeta$ :

$$S \approx a\xi + b,$$

где  $a$  и  $b$  — коэффициенты, отвечающие за масштабирование и смещение случайной составляющей (отметим, что в рамках ВСМ оптимальное значение параметра  $b$  может определяться одновременно с решением задачи картирования).

При наличии тренда ( $T$ ) это условие имеет вид:

$$S \approx T + a\xi + b.$$

С учетом этого дополнительного условия задача преобразуется к минимизации функционала следующего вида:

$$\Phi^{\xi} = \Phi^* + \rho_{\xi} \int_{\Omega} (S - T - a\xi + b)^2 dx dy,$$

где  $\Phi^* = \Phi_s$  при использовании стабилизатора минимума поверхности и  $\Phi^* = \Phi_c$  при использовании стабилизатора минимума кривизны.

Такой метод прямого стохастического моделирования (ПСМ)<sup>1</sup> представляет собой простой вариант для реализации, не требующий использования продвинутых возможностей ВСМ. В рамках этого метода решение зависит от соотношения весовых коэффициентов  $\rho_z, \rho_s, \rho_\xi$  и масштабирующего множителя  $a$ . Выбор соотношения весовых коэффициентов позволяет согласовывать условия точности картирования и приближенного соблюдения задаваемых модельных закономерностей. Параметр  $a$  позволяет контролировать величину дисперсии картируемого показателя.

### Объекты исследования и результаты детерминированного картирования

Исходными для последующих построений являются фактические данные определения глубин залегания кровли продуктивных пластов, полученные по результатам интерпретации геофизических исследований в скважинах на двух месторождениях Западной Сибири. Одно из них (месторождение I) изучено небольшим числом (семь) разведочных скважин. Другое (месторождение II) охарактеризовано большим количеством (около 850) эксплуатационных скважин. Выбор таких групп данных с существенно различающимися не только количественными, но и модельными параметрами направлен на то, чтобы продемонстрировать возможности и особенности реализации предлагаемого подхода в разных условиях.

На рис. 1 приведены результаты двух вариантов построения карт по данным месторождения I с использованием стабилизатора минимума поверхности (а, в) и минимума кривизны (б, г) без внесения стохастической составляющей в функционал. Точками отмечены места расположения скважин. Построения выполнены в области 40 на 25 км по сетке с шагом 0,25 км.

Отметим, что на всех рисунках цветовая гамма соответствует глубинам, отраженным в легенде. Но из-за различий в перепаде картируемых глубин шаг изолиний на рис. 1а, 1в и 1г составляет 2 м, а на рис. 1б — 10 м.

Варианты (в) и (г) отличаются наличием дополнительного условия близости среднего значения по всей области к среднему значению параметра по фактическим данным ( $S_{cp}$ ). В этом случае к функционалу  $\Phi_s$  или  $\Phi_c$  добавляется с собственным весовым коэффициентом  $\rho_a$  слагаемое

$$\int_{\Omega} (S - S_{cp})^2 dx dy.$$

<sup>1</sup> Альтернативный подход (метод модельного стохастического дополнения) состоит в непосредственном включении случайных компонентов в параметры модельных условий. Он предоставляет более широкие возможности для моделирования, но и более сложен в практическом использовании. Рассмотрение этого подхода выходит за рамки данной работы.

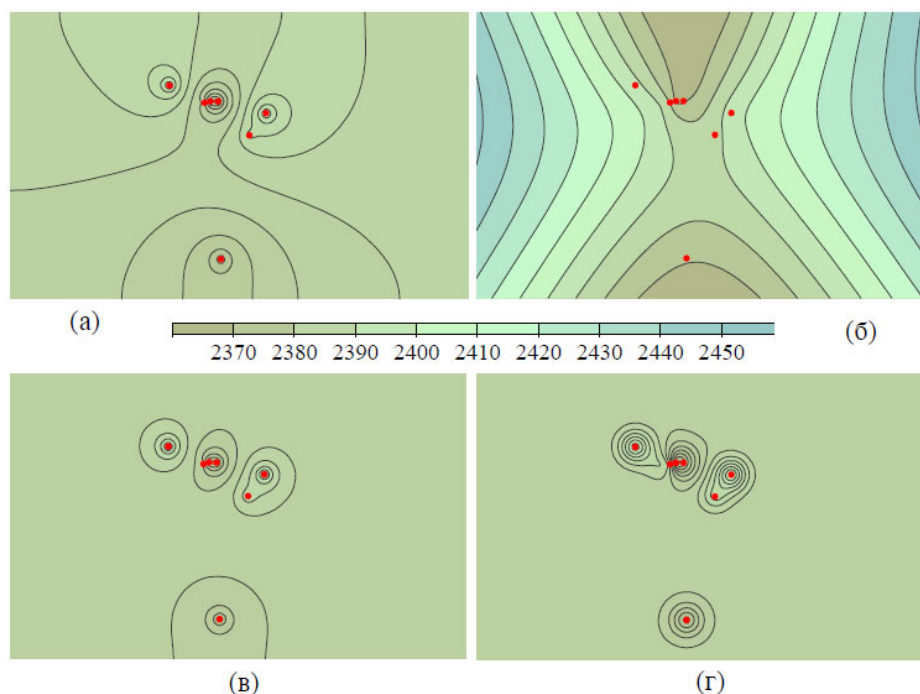


Рис. 1. Варианты детерминированного картирования по данным месторождения I

Fig. 1. The variants of the field I data deterministic mapping

Среднее значение кровли пласта, по фактическим данным, составляет 2 380,5 м, среднеквадратичное отклонение — 11,2 м. Максимальная ошибка аппроксимации данных для всех вариантов составляет около 0,05 м. Среднее значение картируемой поверхности по области для варианта (а) составляет 2 358,6 м, для варианта (б) — 2 383,7 м, для вариантов (в) и (г) — 2 380,5 м, среднеквадратичные отклонения равны 2,8 м, 24,4 м, 1,4 м и 2,0 м соответственно.

По второму месторождению глубины кровли пласта изменяются от 1 538,5 м до 1 668,9 м, при среднем значении 1 630,3 м и среднеквадратичном отклонении 17,8 м. На рис. 2 приведены результаты двух вариантов детерминированного картирования с использованием стабилизатора минимума поверхности (а) и кривизны (б). Здесь и на последующих рисунках места расположения скважин также отмечены точками. Расчеты проведены по области 52 на 40 км с шагом 0,25 км. Максимальная ошибка аппроксимации фактических данных составляет около 0,06 м. Для варианта (а) среднее значение картируемой поверхности составляет 1 626,8 м, для варианта (б) — 1 636,6 м соответственно.

Построения с условием близости результата картирования к среднему значению по фактическим данным по этому месторождению не проводились, поскольку здесь явно прослеживается нелинейный тренд. На рис. 2в приведена карта тренда, построенная с использованием стабилизатора минимума кривизны,

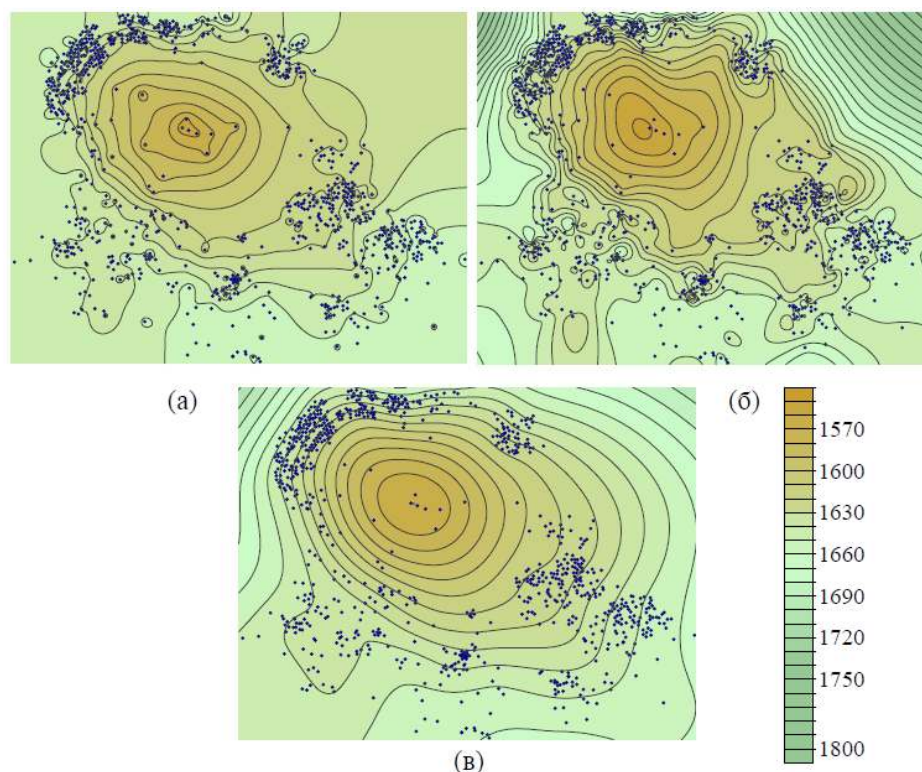


Рис. 2. Варианты детерминированного картирования по данным месторождения П

Fig. 2. The variants of the field П data deterministic mapping

которая в последующем используется в качестве основы для расчетов в задаче стохастического моделирования.

Среднеквадратичное отклонение трендовой поверхности от фактических значений оставляет 5,5 м, при максимальной разнице в 22,3 м.

### Результаты стохастического моделирования

Представленные далее в данной работе результаты применения метода ПСМ получены в рамках следующей технологической последовательности:

1. Значения функции  $\zeta$  генерируются соответствующими нормальному закону распределения, с нулевым средним значением и единичной дисперсией. Отметим, что в общем случае в рамках метода ПСМ закон распределения может быть произвольным. Более того, этот закон может быть разным в различных частях области картирования.
2. Для соотношения параметров  $\rho_s$  и  $\rho_\zeta$  рассматривается несколько вариантов — 1:1, 2:1, 5:1 и 10:1. Параметр  $a$  при отсутствии тренда определяется из условия близости среднеквадратичного отклонения картируемого показателя в узлах сетки к значению этого показателя по фактическим

данным, а при наличии тренда — из условия близости дисперсии расчетных и фактических отклонений от трендовой поверхности.

3. Весовой коэффициент на данные подбирается из условия достижения заданной точности аппроксимации фактических данных — значения максимального отклонения около 0,05 м по месторождению I и около 0,09 м по месторождению II.

Расчеты показывают, что изменение весового коэффициента на данные не оказывает существенного влияния на показатели вариативности построенной карты, и поэтому технология последовательного подбора параметра  $a$ , а затем коэффициента  $\rho_z$  обеспечивает требуемые результаты и легко реализуема.

### Влияние выбора параметров на результаты построений

Значимое влияние на вид результирующих карт оказывает соотношение параметров  $\rho_s$  и  $\rho_z$ . При использовании общей функции случайного поля  $\zeta$  с увеличением веса на стабилизатор увеличиваются размеры выделяемых структурных элементов, но сохраняются общие черты в пространственных закономерностях изменения картируемого показателя. Примеры результатов моделирования при соотношениях  $\rho_s$  и  $\rho_z$  2:1 и 10:1 приведены на рис. 3а и 3б соответственно.

Характерные закономерности прослеживаются в виде вариограмм отклонения фактических данных от трендовых значений построенных карт в узлах расчетной сетки — с увеличением соотношения  $\rho_s$  к  $\rho_z$  увеличивается ранг (рис. 4). Для сопоставления на этом же рисунке приведена экспериментальная вариограмма.

Очевидно, что, исходя из такого сопоставления, может быть выбран вариант, наиболее согласующийся с закономерностями, прослеживаемыми в фактических данных. В данном случае наиболее близкое соответствие прослеживается в варианте с соотношением весовых коэффициентов 5:1.

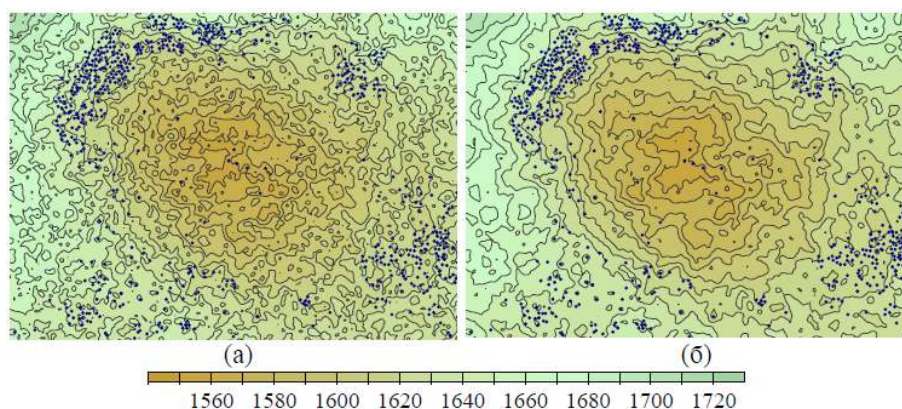


Рис. 3. Результаты моделирования при соотношениях коэффициентов  $\rho_s$  и  $\rho_z$  2:1 (а) и 10:1 (б)

Fig. 3. The simulation results, ratio of the coefficients  $\rho_s$  and  $\rho_z$  2:1 (a) и 10:1 (б)

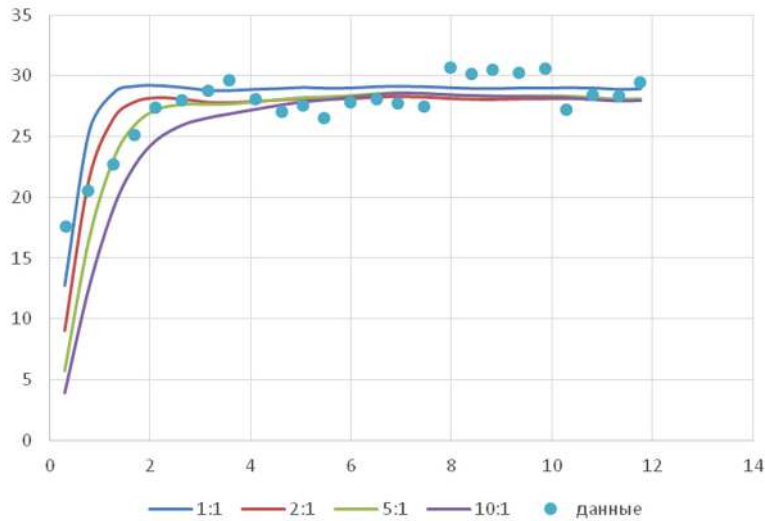


Рис. 4. Вариограммы при различных соотношениях коэффициентов  $\rho_s$  и  $\rho_z$

Fig. 4. The variograms for different ratios of the coefficients  $\rho_s$  and  $\rho_z$

Выбор различных стабилизаторов приводит к существенному различию вида локальной вариативности параметра (рис. 5), хотя точность аппроксимации фактических данных и стандартные отклонения значений в узлах сетки по обеим картам близки.

В этом случае в вариограммах, построенных по значениям в узлах сетки, также наблюдаются существенные различия в рангах (рис. 6). Интересно отметить, что больший ранг характерен для варианта (а), для которого на карте (рис. 5а) визуально выражена явно большая локальная вариативность значений.

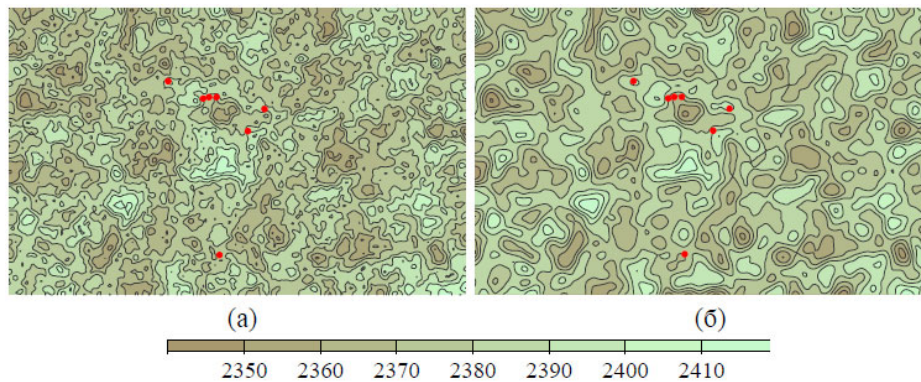


Рис. 5. Результаты моделирования при стабилизаторе минимума поверхности (а) и кривизны (б)

Fig. 5. The simulation results: (а) — at surface minimum and (б) — at curvature minimum stabilizer

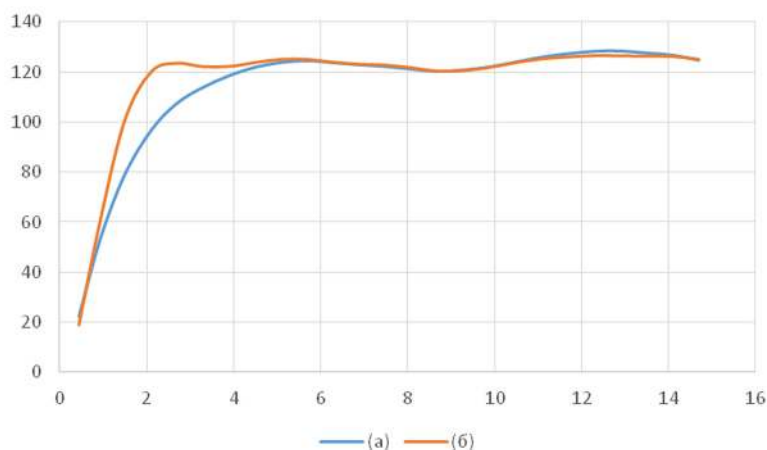


Рис. 6 Вариограммы результатов картирования при стабилизаторах минимума поверхности (а) и минимума кривизны (б)

Fig. 6. The variograms of mapping results: (a) — surface minimum and (б) — curvature minimum stabilizer

Еще одним из основных управляющих параметров при картировании в рамках ВСМ является шаг сетки. На рис. 7 приведены результаты стохастического моделирования на основе одной случайной функции  $\zeta$ , при одинаковом соотношении весовых коэффициентов, но с разными шагами сетки — 0,25 км (а) и 0,5 км (б).

Несмотря на существенно большую локальную изменчивость картирования при меньшем шаге и в целом меньшую согласованность в деталях этих двух карт, стандартное отклонение значений в узлах отличается незначительно — 11,0 м для варианта (а) и 10,8 м для варианта (б).

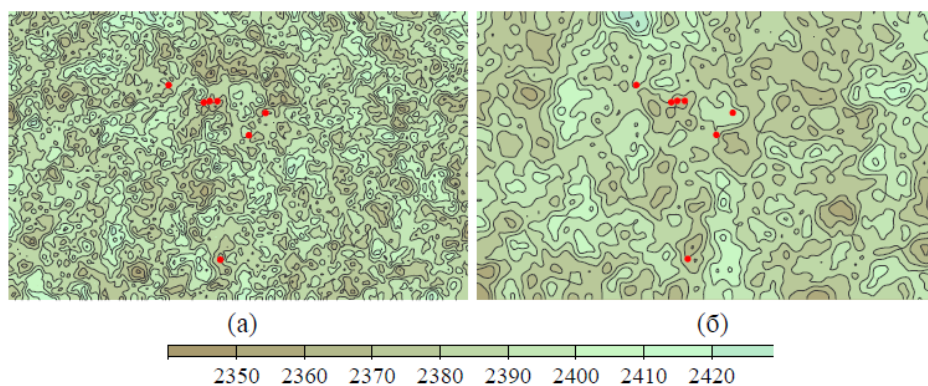


Рис. 7. Результаты расчетов с шагами сетки 0,25 км (а) и 0,5 км (б)

Fig. 7. The simulation results with the grid steps of 0.25 km (а) and 0.5 km (б)

Для вариантов расчетов по второму месторождению со значительно большим количеством данных наблюдений, используемых при картировании, наблюдаются такие же общие закономерности влияния управляющих параметров на конечные результаты. Рисунки по этому месторождению здесь не приводятся, чтобы не перегружать статью иллюстративным материалом.

Подчеркнем, что представленный в данной работе метод ПСМ не зависит напрямую от стохастических закономерностей, которые могут быть прослежены в массиве фактических данных. Построения выполняются при модельных условиях достаточно общего вида. Однако небольшое количество управляющих параметров и предсказуемость влияния их изменения на конечный результат моделирования позволяют легко обеспечить приближенное выполнение некоторых свойств, характерных для конкретных фактических данных.

Это представляется важным достоинством метода, поскольку при стохастическом моделировании, так же как и при детерминированном картировании, достоверность результата определяется в первую очередь не формальными критериями, а экспертной оценкой специалиста-геолога (с использованием различных, в том числе и формальных критериев). Выше было показано, что в качестве таких критериев могут эффективно реализовываться условия согласования стандартных отклонений и вида вариограмм, полученных по фактическим данным и по значениям результатов моделирования в узлах расчетной сетки. В общем случае могут быть использованы и другие формальные критерии.

### Многовариантное моделирование

Многовариантное стохастическое моделирование осуществляется за счет построений с использованием различных функций случайной составляющей  $\zeta$ . При этом настройка модельных параметров может осуществляться только для первой реализации функции  $\zeta_1$ , а для последующих вариантов случайной составляющей ( $\zeta_i$ ) они могут использоваться неизменными.

Результаты построений при сохранении значений управляющих параметров  $\rho_z, \rho_s, \rho_\zeta$  и масштабирующего множителя  $a$ , но при различных вариантах генерации случайной составляющей  $\zeta_i$ , хотя весьма существенно отличаются в деталях, но в целом приводят к единообразному характеру вида карт. На рис. 8 приведены по два примера таких реализаций картирования, выполненных с использованием стабилизатора минимума поверхности и соотношения параметров  $\rho_s$  и  $\rho_\zeta$  равного 5:1. На рис. 8а представлены результаты моделирования по данным месторождения I, на рис. 8б — по данным месторождения II.

При этом, как показывают расчеты, статистические показатели результатов различных вариантов — точность аппроксимации фактических данных и стандартное отклонение значений карты в узлах сетки — сохраняются близкими. В таблице 1 представлены подтверждающие это результаты пяти вариантов моделирования по обоим месторождениям, которые построены при единых значениях управляющих параметров, подобранных при реализации первого варианта.

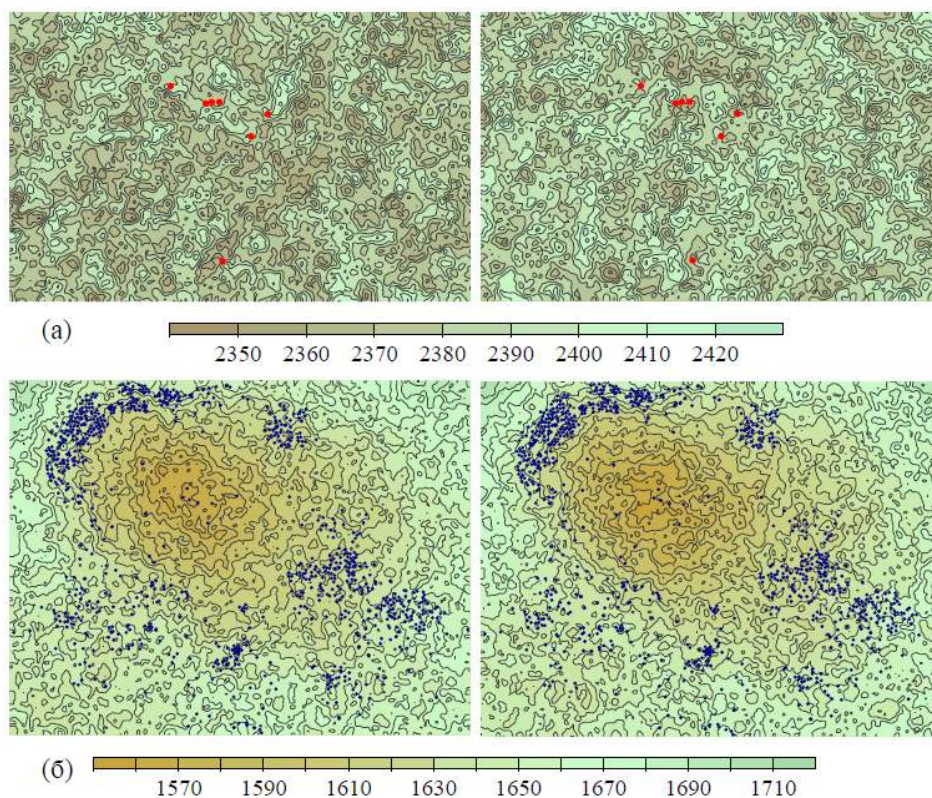


Рис. 8. Варианты стохастического моделирования

Fig. 8. The variants of the stochastic simulation

Вместе с тем, как видно из приведенных результатов, при небольшом объеме фактических данных (месторождение I) стандартное отклонение и максимальное значение ошибки аппроксимации в вариантах 2-5 преимущественно возрастает по сравнению с вариантом 1. При большом количестве данных (месторождение II) значимость конкретного вида случайной составляющей слабо сказывается на средних показателях точности аппроксимации.

#### Вычислительные и прикладные особенности метода ПСМ

Полученные результаты свидетельствуют о том, что применение метода ПСМ не вызывает сложностей технической реализации и приемлемо при решении практических задач для непрерывных переменных. Здесь представляется необходимым кратко остановиться на нескольких вычислительных и прикладных вопросах.

Предварительно отметим еще раз, что решение задачи геокартирования с применением ВСМ сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Для рассматриваемого здесь метода ПСМ эта система имеет вид:

$$Af = h + C\xi.$$

Здесь  $f$  — вектор искомых коэффициентов сплайнов,  $\zeta$  — вектор значений случайной функции  $\zeta(x, y)$  в узлах расчетной сетки. Матрица системы  $A$  зависит от расположения точек с данными, от вида выбранного стабилизатора и весовых коэффициентов  $\rho_z, \rho_s, \rho_\zeta$ . Вектор правой части  $h$  зависит от значений фактических данных, трендовой поверхности  $T$  и коэффициента  $\rho_z$ . Матрица  $C$  прямо пропорциональна параметру  $a$  и зависит от расположения фактических точек и весовых коэффициентов  $\rho_z, \rho_\zeta$ .

Одно из важных следствий этого заключается в том, что, при равенстве нулю среднего значения случайной составляющей  $\zeta$  и независимости ее значений в узлах сетки (реализация этих условий не вызывает затруднений), математическое ожидание  $f^*$  значений множества реализаций метода ПСМ (при постоянных управляющих параметрах) может быть легко определено расчетом с нулевым значением управляющего параметра  $a$ :

$$f^* = A^{-1}h.$$

Таблица 1

Статистические показатели результатов стохастического моделирования

Table 1

The statistical parameters of the stochastic simulation results

№ варианта	Погрешность аппроксимации (м)						Ст. отклонение значений в узлах сетки		
	Ср. кв. отклонение			Макс. отклонение					
	Соотношение весовых коэффициентов								
	2:1	5:1	10:1	2:1	5:1	10:1	2:1	5:1	10:1
Месторождение I									
1	0,03	0,03	0,03	0,05	0,05	0,05	11,2	11,2	11,2
2	0,06	0,03	0,05	0,09	0,05	0,08	11,0	11,0	11,1
3	0,05	0,03	0,05	0,09	0,05	0,08	11,2	11,2	11,2
4	0,05	0,03	0,04	0,1	0,05	0,09	11,0	11,0	11,0
5	0,04	0,03	0,05	0,08	0,05	0,08	11,0	11,0	11,1
Месторождение II									
1	0,01	0,01	0,01	0,09	0,09	0,09	5,36	5,43	5,49
2	0,01	0,01	0,01	0,09	0,1	0,1	5,38	5,52	5,63
3	0,01	0,01	0,01	0,08	0,09	0,09	5,28	5,33	5,36
4	0,01	0,01	0,01	0,1	0,11	0,1	5,33	5,39	5,40
5	0,01	0,01	0,01	0,08	0,09	0,09	5,31	5,38	5,42

Фактически построение карты математического ожидания результатов стохастического моделирования получается обычной реализацией ВСМ с дополнительным учетом трендовой составляющей. В частности, для варианта моделирования по данным месторождения I карты математического ожидания по своему виду близки к картам, приведенным на рис. 1в и 1г.

На рис. 9 приведена карта математического ожидания результатов стохастического моделирования по месторождению II при соотношении весовых коэффициентов  $\rho_s$  и  $\rho_\xi$  равном 5:1. В этом случае, соответственно, прослеживаются общие черты трендовой составляющей (рис. 2в) и локальные особенности карты, построенной с использованием стабилизатора минимума поверхности (рис. 2а).

Другое следствие, важное для повышения эффективности численной реализации метода ПСМ, связано с тем, что матрица  $A$  является симметричной и положительно определенной и допускает решение с помощью факторизации

$$A = LDL^T,$$

где  $L$  — треугольная матрица, а  $D$  — диагональная. Это определяет возможность лишь однократной факторизации матрицы и последующего использования этого разложения для решения уравнений, правая часть которых меняется в зависимости от варианта выбора значений вектора  $\xi$ .

Представленные выше в работе постановка решения задачи в рамках метода ПСМ, результаты его применения, вычислительные и прикладные особенности относятся только к моделированию непрерывных параметров. Однако этот метод очевидным образом может быть использован и для стохастического моделирования возможных вариантов распределения и категориальных параметров аналогично тому, как это реализуется в существующих индикаторных методах.

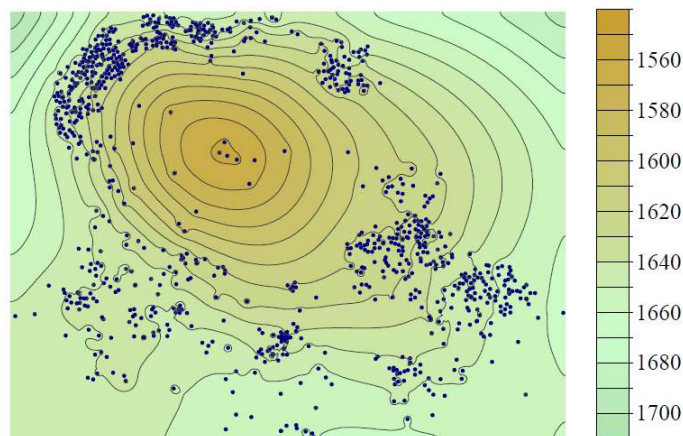


Рис. 9. Карта математического ожидания результатов стохастического моделирования по месторождению II

Fig. 9. The map of stochastic simulation results' mathematical expectation for the field II

И, соответственно, все отмеченные особенности постановки задач, их вычислительной эффективности, обеспечения согласованности с вероятностными параметрами массива фактических данных в полной мере справедливы и для реализации индикаторного варианта метода прямого стохастического моделирования.

В своей основе метод ПСМ существенно отличается от других методов стохастического моделирования, и при его использовании не обеспечивается согласование результатов моделирования с заданными (или определенными по фактическим данным) вероятностными условиями, такими как функции распределения и вариограммы. Но, как представляется, это не принципиально важно с прикладных позиций.

С одной стороны, практика показывает, что удовлетворение формальным критериям этих методов не гарантирует получения приемлемого содержательного результата. С другой, эмпирические закономерности — в первую очередь вариограммы — как правило, весьма далеки от строгих функциональных зависимостей. И, в-третьих, как свидетельствуют приведенные выше результаты, приемлемое согласование результатов моделирования в рамках метода ПСМ с закономерностями, прослеживаемыми в фактических данных, может быть обеспечено. Задача такого согласования, несомненно, требует отдельного, более детального рассмотрения.

Чрезвычайно важным в этом отношении является то, что в методе ПСМ осуществляется явное разделение трех составных элементов, отвечающих за точность аппроксимации фактических данных, за добавление случайной составляющей в построение и за контроль пространственных закономерностей при удалении от точек с данными. Это обеспечивает возможность гибкого и в определенной степени независимого управления соответствующими свойствами результатов моделирования.

Отмеченные особенности метода составляют надежную и потенциально перспективную основу для дальнейшего развития этого направления стохастического моделирования в рамках вариационно-сеточного метода геокартирования.

### **Заключение**

Необходимость стохастического моделирования в решении геологических задач обусловлена ограниченностью объема имеющихся экспериментальных определений свойств изучаемых объектов и существенным влиянием неоднородности их строения на эффективность разведки и эксплуатации месторождений. К настоящему времени разработаны и применяются на практике множество методов моделирования, основанных на заложенных и реализуемых в кригинге модельных условиях, с воспроизведением плотности распределения и пространственной корреляционной структуры, прослеживаемых в исходных данных. Это в определенной степени ограничивает возможности этих методов границами таких модельных условий.

Представленный в данной работе подход базируется на применении вариационно-сеточного метода геокартирования, в котором модельные условия фор-

мулируются в виде уравнений в частных производных, а решение осуществляется на основе минимизации функционала с возможностью учета множества разнородных данных, в том числе и имеющих стохастическую природу.

Предложенный и апробированный в работе метод прямого стохастического моделирования заключается в формировании функционала из трех составных элементов, отвечающих за аппроксимацию данных, за учет общих пространственных закономерностей и за вклад случайной составляющей в модельные построения.

Метод реализуется в рамках существующего программного обеспечения и характеризуется небольшим количеством управляющих параметров, с прогнозируемым влиянием их изменения на результаты моделирования. Особенности его математической постановки и численной схемы обеспечивают вычислительную эффективность при многовариантных расчетах. Он применим для стохастического моделирования как непрерывных, так и категориальных параметров. В целом это определяет перспективность использования метода прямого стохастического моделирования свойств геологических объектов в решении прикладных задач.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахметсафина А. Р. Стохастические методы в программе геологического моделирования / А. Р. Ахметсафина, И. Р. Миннихметов, А. Х. Пергамент // Вестник ЦКР Роснедра. 2010. № 1. С. 34-45.
2. Баишев Р. В. Выбор варианта геологической модели при стохастическом моделировании газоконденсатного месторождения Шахпахты / Р. В. Баишев, Д. А. Купарев, Т. Г. Кривина // Нефтегазовое дело. 2009. № 12. С. 28-31.
3. Волков А. М. Геологическое картирование нефтегазоносных территорий с помощью ЭВМ / А. М. Волков. М.: Недра, 1988. 221 с.
4. Волков А. М. Построение карты — вариационная задача / А. М. Волков // Геология и геофизика. 1979. № 1. С. 60-65.
5. Демьянов В. В. Гео статистика: теория и практика / В. В. Демьянов, Е. А. Савельева. М.: Наука, 2010. 327 с.
6. Плавник А. Г. Обобщенная сплайн-аппроксимационная постановка задачи картирования свойств геологических объектов / А. Г. Плавник // Геология и геофизика. 2010. № 7 (51). С. 1027-1037.
7. Потехин Д. В. Опыт трехмерного моделирования терригенного девона на примере нижнетиманских отложений Кирилловского месторождения нефти / Д. В. Потехин, А. Б. Дерюшев // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. 2012. № 4. С. 25-30.
8. Сидоров А. Н. Свидетельство о регистрации программы GST / А. Н. Сидоров, А. Г. Плавник, А. А. Сидоров, М. С. Шутов и др. // Реестр программ для ЭВМ Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. 2005. № 2005612939.
9. Фёдоров А. Э. Анализ геологической неопределенности при стохастическом моделировании геологических тел / А. Э. Фёдоров, А. А. Аминева, И. Р. Дильмухаметов, В. А. Краснов и др. // Нефтяное хозяйство. 2019. № 9. С. 24-28.

10. Almeida J. A. Stochastic simulation methods for characterization of lithoclasses in carbonate reservoirs / J. A. Almeida // *Earth-Science Reviews*. 2010. No. 3-4 (101). Pp. 250-270.
11. Bangerth W. On optimization algorithms for the reservoir oil well placement problem / W. Bangerth, H. Klie, M. F. Wheeler, P. L. Stoffa et al. // *Computational Geosciences*. 2006. No. 3 (10). Pp. 303-319.
12. Boucher A. Super-resolution land cover mapping with indicator geostatistics / A. Boucher, P. C. Kyriakidis // *Remote Sensing of Environment*. 2006. No. 3 (104). Pp. 264-282.
13. Chilès J. P. Geostatistics Modeling Spatial Uncertainty / J. P. Chilès, P. Delfiner. New York: Wiley, 1999. 695 p.
14. Delbari M. Using sequential Gaussian simulation to assess the field-scale spatial uncertainty of soil water content / M. Delbari, P. Afrasiab, W. Loiskandl // *Catena*. 2009. No. 2 (79). Pp. 163-169.
15. Delhomme J. P. Spatial variability and uncertainty in groundwater flow parameters: a geostatistical approach / J. P. Delhomme // *Water Resources Research*. 1979. No. 2 (15). Pp. 269-280.
16. Doligez B. A review of three geostatistical techniques for realistic geological reservoir modeling integrating multi-scale data / B. Doligez, M. Ravalec, S. Bouquet, M. Adelinet // *Bulletin of Canadian Petroleum Geology*. 2015. No. 4 (63). Pp. 277-286.
17. GST. GeoSpline Technology. URL: <http://www.geo-spline.ru/>
18. Karacan C. Ö. Geostatistical modeling of the gas emission zone and its in-place gas content for Pittsburgh-seam mines using sequential Gaussian simulation / C. Ö. Karacan, R. A. Olea, G. Goodman // *International Journal of Coal Geology*. 2012. No. 90-91. Pp. 50-71.
19. Mariethoz G. Truncated Plurigaussian simulations to characterize aquifer heterogeneity / G. Mariethoz, P. Renard, F. Cornaton, O. Jaquet // *Ground Water*. 2009. No. 1 (47). Pp. 13-24.
20. Pyrcz M. J. Geostatistical reservoir modeling / M. J. Pyrcz, C. V. Deutsch. New York: Oxford University Press, 2014. 449 p.
21. Stochastic Modeling and Geostatistics. Principles, Methods, and Case Studies (AAPG Computer Applications in Geology, No. 3) / edited by J. M. Yarus, R. L. Chambers. Tulsa, Oklahoma: AAPG, 1994. 379 p.

Andrey G. PLAVNIK<sup>1</sup>  
Andrey N. SIDOROV<sup>2</sup>

UDC 004.94+519.65:550.8

## STOCHASTIC SIMULATION IN THE FRAMEWORK OF VARIATIONAL-GRID METHOD OF GEOLOGICAL MAPPING

<sup>1</sup> Dr. Sci. (Tech.), Chief Researcher, West Siberian Branch  
of Institute of Petroleum Geology and Geophysics,  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk);  
Professor, Department of Oil and Gas Geology,  
Industrial University of Tyumen  
plavnikag@ipgg.sbras.ru; ORCID: 0000-0001-8099-4874

<sup>2</sup> Cand. Sci. (Geol.-Mineral.),  
Department Chief, Research and Analytical Center  
for the Rational Use of the Subsoil (Tyumen)  
andrey.sidorov21@gmail.com

### Abstract

The need for stochastic modeling of the geological objects properties is due to their significant heterogeneity and the limited amount of data. The existing simulation methods, in their formulation, are largely based on the stochastic representation of the model settings laid down and implemented in kriging. Within the framework of other mapping methods that use other model conditions, developing of novel approaches to the problem formulation and to implementation of stochastic simulations methods is necessary.

In this paper, we consider an approach based on the application of the variational-grid method of geological mapping. The method is based on minimizing the quadratic functional with ability taking into account a variety of heterogeneous data, including those of a stochastic nature. The direct stochastic simulation method is proposed and tested. It consists in application of the functionality, which includes three constituent elements responsible for: 1) the data approximation, 2) taking into account general spatial patterns, and 3) for the contribution of

---

**Citation:** Plavnik A. G., Sidorov A. N. 2020. "Stochastic simulation in the framework of variational-grid method of geological mapping". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 6, no. 3 (23), pp. 110-130.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-110-130

---

the random component to the model constructions. The main features of the method are as follows: 1) a small number of control parameters, 2) a predictable effect of their changing on the simulation results, 3) it provides an easy way to accurately mapping the mathematical expectation of the stochastic simulations options variety, and 4) it is applicable for modeling both continuous and categorical parameters.

The mathematical implementation of the approach allows reducing the problem to solving a system of linear algebraic equations with a symmetric and positive definite matrix. This determines the multioptional calculations' computational efficiency due to a single execution of matrix factorization. The calculations are presented for two groups of data with significantly different both quantitative and model parameters, demonstrating the possibilities and features of the proposed approach implementation under different conditions. The calculations testify that the variograms' parameters of the stochastic solutions and of the actual data could be coordinated.

### **Keywords**

Geological objects, property heterogeneity, variational-grid method, direct stochastic simulation, computational efficiency, sequential Gaussian simulation, indicator simulation, kriging.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-110-130**

### **REFERENCES**

1. Akhmetsafina A. R., Minniakhmetov I. R., Pergament A. Kh. 2010. "Stochastic methods in geological modeling program". Vestnik TsKR Rosnedra, no. 1, pp. 34-45. [In Russian]
2. Baishev R. V., Kuparev D. A., Krivina T. G. 2009. "Selection of geological model variant in stochastic modeling of Shakhpakhty gas condensate field". Neftegazovoe delo, no. 12, pp. 28-31. [In Russian]
3. Volkov A. M. 1988. Geological Mapping of Oil and Gas Territories Using a Computer. Moscow: Nedra. 221 pp. [In Russian]
4. Volkov A. M. 1979. "Map building — a variational task". Geologiya i geofizika, no. 1, pp. 60-65. [In Russian]
5. Demyanov V. V., Savelyeva E. A. 2010. Geostatistics: Theory and Practice. Moscow: Nauka. 327 pp. [In Russian]
6. Plavnik A. G. 2010. "Generalized spline-approximation setting of the task of mapping the properties of geological objects". Geologiya i geofizika, no. 7 (51), pp. 1027-1037. [In Russian]
7. Potekhin D. V., Deryushev A. B. 2012. "Experience of three-dimensional modeling of terrigenous Devon on the example of Nizhnetiman deposits of the Kirillovskoye oil field". Geologiya, geofizika i razrabotka neftyanykh i gazovykh mestorozhdeniy, no. 4, pp. 25-30. [In Russian]
8. Sidorov A. N., Plavnik A. G., Sidorov A. A., Shutov M. S. et al. 2005. "GST Program Registration Certificate". Reestr programm dlya EVM Federalnoy sluzhby po intellektualnoy sobstvennosti, patentam i tovarnym znakam. No. 2005612939. [In Russian]

9. Fedorov A. E., Amineva A. A., Dilmukhametov I. R., Krasnov V. A. et al. 2019. "Analysis of geological uncertainty in stochastic modeling of geological bodies". *Neftyanoe khozyaystvo*, no. 9, pp. 24-28. [In Russian]
10. Almeida J. A. 2010. "Stochastic simulation methods for characterization of lithoclasses in carbonate reservoirs". *Earth-Science Reviews*, nos. 3-4 (101), pp. 250-270.
11. Bangerth W., Klie H., Wheeler M. F., Stoffa P. L. et al. 2006. "On optimization algorithms for the reservoir oil well placement problem". *Computational Geosciences*, no. 3 (10), pp. 303-319.
12. Boucher A., Kyriakidis P. C. 2006. "Super-resolution land cover mapping with indicator geostatistics". *Remote Sensing of Environment*, no. 3 (104), pp. 264-282.
13. Chilès J. P., Delfiner P. 1999. *Geostatistics Modeling Spatial Uncertainty*. New York: Wiley. 695 pp.
14. Delbari M., Afrasiab P., Loiskandl W. 2009. "Using sequential Gaussian simulation to assess the field-scale spatial uncertainty of soil water content". *Catena*, no. 2 (79), pp. 163-169.
15. Delhomme J. P. 1979. "Spatial variability and uncertainty in groundwater flow parameters: a geostatistical approach". *Water Resources Research*, no. 2 (15), pp. 269-280.
16. Doligez B., Ravalec M., Bouquet S., Adelinet M. 2015. "A review of three geostatistical techniques for realistic geological reservoir modeling integrating multi-scale data". *Bulletin of Canadian Petroleum Geology*, no. 4 (63), pp. 277-286.
17. GST. GeoSpline Technology. <http://www.geo-spline.ru/>
18. Karacan C. Ö., Olea R. A., Goodman G. 2012. "Geostatistical modeling of the gas emission zone and its in-place gas content for Pittsburgh-seam mines using sequential Gaussian simulation". *International Journal of Coal Geology*, nos. 90-91, pp. 50-71.
19. Mariethoz G., Renard P., Cornaton F., Jaquet O. 2009. "Truncated plurigaussian simulations to characterize aquifer heterogeneity". *Ground Water*, no. 1 (47), pp. 13-24.
20. Pyrcz M. J., Deutsch C. V. 2014. *Geostatistical Reservoir Modelling*. New York: Oxford University Press. 449 pp.
21. Yarus J. M., Chambers R. L. (eds.). 1994. *Stochastic Modeling and Geostatistics. Principles, Methods, and Case Studies (AAPG Computer Applications in Geology, No. 3)*. Tulsa, Oklahoma: AAPG. 379 pp.