

Павел Тихонович ЗУБКОВ<sup>1</sup>  
Эдуард Игоревич НАРЫГИН<sup>2</sup>

УДК 532.5.032, 536.2

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ

<sup>1</sup> доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры фундаментальной математики и механики,  
Тюменский государственный университет  
pzubkov@utmn.ru

<sup>2</sup> аспирант кафедры фундаментальной математики и механики,  
Тюменский государственный университет  
e.i.narygin@yandex.ru

### Аннотация

Исследуется естественная конвекция вязкой несжимаемой жидкости, полностью заполняющей горизонтальный кольцевой канал, на внешней границе которого поддерживается постоянный перепад температур. Внутренний цилиндр может вращаться вокруг своей оси. Движение жидкости в кольцевой полости за счет вязкого трения вызовет вращение внутреннего цилиндра, которое можно использовать для совершения механической работы. Данную систему можно рассматривать как стационарную тепловую машину, функционирующую при наличии гравитационного поля, где работа совершается посредством необратимого процесса — вязкого трения. Рассматривались два предельных случая: внутренний цилиндр является теплоизолированным, внутренний цилиндр изготовлен из материала, имеющего очень большую теплопроводность. В работе было проанализировано количество кинетической энергии вращающегося цилиндра в зависимости от внутреннего радиуса и величины области, где поддерживается постоянная температура. Было установлено, что кинетическая энергия цилиндра существенно зависит как от теплопроводности, так и от радиуса. Для обоих типов внутреннего

---

**Цитирование:** Зубков П. Т. Численное исследование естественной конвекции в горизонтальном кольцевом канале / П. Т. Зубков, Э. И. Нарыгин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Том 5. № 1. С. 97-110.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-1-97-110

---

цилиндра были установлены значения внутреннего радиуса, при которых достигается максимальная кинетическая энергия цилиндра, также было установлено, что этот радиус не зависит от величины области, на которой поддерживается постоянная температура. В качестве математической модели было выбрано приближение Буссинеска. Для решения поставленной задачи использовался метод контрольного объема и алгоритм SIMPLER. Расчеты проводились при  $Pr = 1$ ,  $10^4 \leq Gr \leq 2 \cdot 10^4$ ,  $0 < 2\alpha \leq \pi$ ,  $0 < R_{inside} < 1$ .

#### Ключевые слова

Естественная конвекция, численные методы, кольцевой канал, число Грасгофа, приближение Буссинеска, получение энергии, уравнения Навье — Стокса.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-1-97-110

#### Введение

Естественная конвекция в замкнутых областях имеет большую область приложений, она необходима при решении многих технических задач. В качестве примера естественная конвекция в горизонтальном кольцевом канале исследовалась численно и экспериментально в течение многих десятилетий [11, 12], данная задача и по сей день является актуальной. В работе [10] представлено численное решение для стационарной естественной конвекции в полости между двумя горизонтальными концентрическими цилиндрами, на которых поддерживались различная постоянная температура. В работе [13] численно решалась задача о теплопереносе при переходном режиме естественной конвекции между горизонтальными изотермическими цилиндрами в переменных вихрь — функция тока. Работа [8] посвящена численному и экспериментальному исследованию нестационарного естественно-конвективного течения в области, образованной горизонтальными концентрическими цилиндрами, внутренний из которых мгновенно нагревался. В статье [7] исследуется естественная конвекция в кольцевом канале с поперечно-колеблющимся внутренним цилиндром и изменение при этом среднего числа Нуссельта. В работе [6] авторы исследуют усиление теплоотдачи в горизонтальных кольцевых каналах при использовании наножидкостей. В работе [4] был проведен численный анализ режимов естественно конвективного теплопереноса в горизонтальном цилиндре с тепловыделяющим ядром постоянной температуры и теплопроводной оболочкой конечной толщины в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. В работе [5] численно исследовалась смешанная конвекция в кольцевом пространстве между вращающимися цилиндрами, где естественная конвекция была обусловлена разностью температур цилиндров. В статье [9] исследовалась естественная конвекция наножидкостей в горизонтальном кольцевом канале. В данной работе представлены результаты численного исследования естественной конвекции, возникающей в кольцевой полости, когда на внешней границе поддерживается перепад температуры, а внутренний цилиндр может вращаться вокруг своей оси.

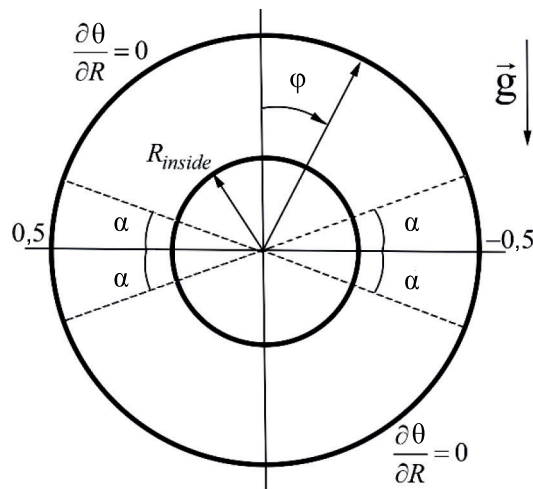


Рис. 1. Постановка задачи

Fig. 1. Formulation of the problem

### Физическая постановка

Решается задача стационарной естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости, полностью заполняющей область между двумя концентрическими цилиндрами, внутренний цилиндр может вращаться вокруг своей оси. На внешней границе области поддерживается постоянный перепад температуры. Геометрия рассматриваемой области представлена на рис. 1. Движение жидкости в кольцевой полости за счет вязкого трения вызовет вращение внутреннего цилиндра, которое можно использовать для совершения механической работы. Данную систему можно рассматривать как стационарную тепловую машину, функционирующую при наличии гравитационного поля, где работа совершается посредством необратимого процесса — вязкого трения [3].

### Математическая постановка

В работе будем рассматривать два предельных случая: (1) — цилиндр является теплоизолированным, (2) — цилиндр изготовлен из материала, имеющего очень большую теплопроводность. В качестве математической модели использовалось приближение Буссинеска. В безразмерных переменных в полярной системе координат систему дифференциальных уравнений можно записать следующим образом:

$$V_R \frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{R} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial V_R}{\partial R} \right) +$$

$$+ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V_R}{\partial \varphi^2} - \frac{V_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \text{Gr} \cdot \cos(\varphi) \cdot \theta,$$

$$V_R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} + \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi \cdot V_R}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} \right) +$$

$$+ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{V_\varphi}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} - Gr \cdot \sin(\varphi) \cdot \theta,$$

$$\frac{\partial(R \cdot V_R)}{\partial R} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0,$$

$$V_R \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} \right).$$

Граничные условия:

$$V_R = V_\varphi = 0,$$

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0,$$

$$R = 1: \left| \varphi - \frac{\pi}{2} \right| < \alpha, \quad \theta = 0,5,$$

$$|\varphi - \pi| < \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0,$$

$$\left| \varphi - \frac{3\pi}{2} \right| < \alpha, \quad \theta = -0,5;$$

для случая (1):

$$V_R = 0,$$

$$R = R_{inside}: \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = 0;$$

для случая (2):

$$V_R = 0,$$

$$R = R_{inside}: \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\theta = 0;$$

где

$$V_R = \frac{v_r}{v^*}, \quad V_\varphi = \frac{v_\varphi}{v^*}, \quad \tau = \frac{t}{t^*}, \quad P = \frac{p + \rho_0 g r \cos(\varphi)}{p^*}, \quad R = \frac{r}{r_{outside}},$$

$$R_{inside} = \frac{r_{inside}}{r_{outside}}, \quad \theta = \frac{T - \frac{T_h + T_c}{2}}{T_h - T_c}, \quad v^* = \frac{\mu}{\rho_0 r_{outside}},$$

$$t^* = \frac{\rho_0 r_{outside}^2}{\mu}, \quad p^* = \frac{\mu^2}{\rho_0 r_{outside}^2}.$$

В системе присутствуют следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \text{— число Грасгофа } Gr &= \frac{\beta \rho_0^2 g (T_h - T_c) r_{outside}^3}{\mu^2}, \\ \text{— число Прандтля } Pr &= \frac{c\mu}{k}. \end{aligned}$$

### Численная реализация

Для решения поставленной задачи использовался метод контрольного объема и алгоритм SIMPLER [1]. Перед началом исследования был проведен предварительный выбор расчетной сетки, которая менялась в диапазоне от 22 до 162 расчетных точек как по полярному углу, так и по полярному радиусу. Было установлено, что если взять расчетную сетку  $82 \times 82$ , то дальнейшее увеличение расчетных точек не приводит к существенным изменениям результатов.

Для анализа полученных результатов использовались следующие величины: угловая скорость вращения цилиндра  $\omega$ , кинетическая энергия вращательного движения, которая пропорциональна  $E \sim \frac{\pi \omega^2 R_{inside}^4}{4}$ .

### Результаты расчетов

Задача решалась при фиксированном числе Прандтля  $Pr = 1$ ; число Грасгофа варьировалось в диапазоне  $10^4 \leq Gr \leq 2 \cdot 10^4$ ; угол, опирающийся на дугу окружности, на которой поддерживается постоянная температура, варьировался в диапазоне  $0 < 2\alpha \leq \pi$ ; радиус цилиндра, находящегося в центре области, изменялся в диапазоне  $0 < R_{inside} < 1$ .

Рассмотрим рис. 2-3, из которых видно, что течение в области является симметричным относительно начала координат, а температура в области является антисимметричной. Данный результат справедлив для всех рассмотренных случаев. Так же из рис. 2 видно, что в области могут образовываться два симметричных вихря. Рассмотрим поведение этих вихрей при изменении  $R_{inside}$ , для чего зафиксируем  $Gr = 10^4$  и  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ . Для случая (1) в расчетной области вихри появляются при  $R_{inside} = 0,4125$  и увеличиваются при уменьшении  $R_{inside}$ . Аналогичное наблюдается и для случая (2), однако вихри появляются при  $R_{inside} = 0,2375$ . Данные вихри образуются вблизи вращающегося цилиндра. Они образуются ввиду того, что скорость по углу не является постоянной, а также в случае, когда жидкость, протекая возле областей, на которых поддерживается постоянная температура, ускоряется за счет подъемной силы. Когда перепад скорости становится достаточно больших, в области начинают образовываться вихри [2]. Следовательно, при увеличении числа  $Gr$  вихри увеличиваются, при этом их образование начинается при более высоких значениях  $R_{inside}$ . Появление вихрей в области, расположенных вблизи вращающегося элемента, приводит к уменьшению его угловой скорости.

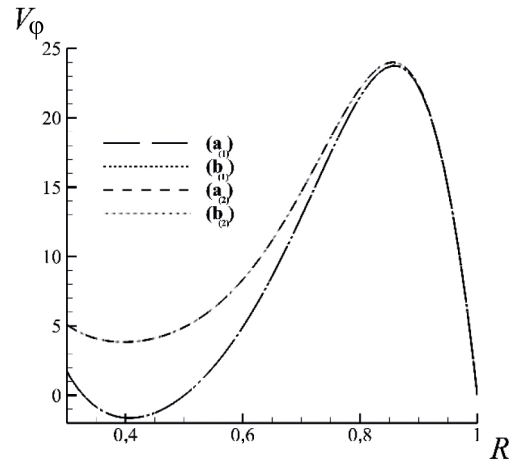


Рис. 2. Зависимость безразмерной скорости  $V_\varphi$  от безразмерного радиуса  $R$  при  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ,  $R_{inside} = 0,3$   
 ( $\alpha_{(1)}$ ) для случая (1),  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;  
 ( $\alpha_{(2)}$ ) для случая (1),  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ;  
 ( $b_{(1)}$ ) для случая (2),  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;  
 ( $b_{(2)}$ ) для случая (2),  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

Fig. 2. The dependence of the dimensionless velocity  $V_\varphi$  on the dimensionless radius  $R$  at  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ,  $R_{inside} = 0,3$   
 ( $\alpha_{(1)}$ ) for the case (1),  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;  
 ( $\alpha_{(2)}$ ) for the case (1),  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ;  
 ( $b_{(1)}$ ) for the case (2),  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;  
 ( $b_{(2)}$ ) for the case (2),  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

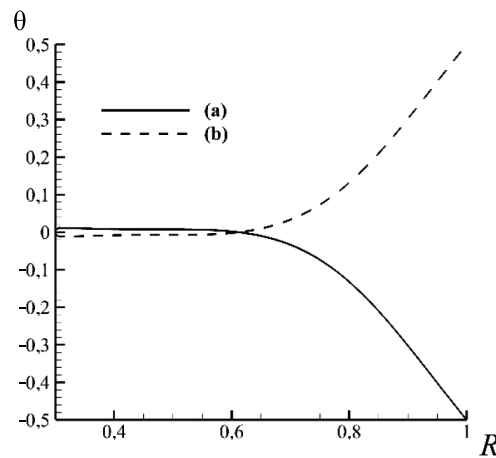


Рис. 3. Зависимость безразмерной температуры  $\theta$  от безразмерного радиуса  $R$  для случая (1) при  
 (a)  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ,  $R_{inside} = 0,3$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;  
 (b)  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ,  $R_{inside} = 0,3$ ,  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

Fig. 3. The dependence of the dimensionless temperature  $\theta$  on the dimensionless radius  $R$  for the case (1) at  
 (a)  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ,  $R_{inside} = 0,3$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;  
 (b)  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ,  $R_{inside} = 0,3$ ,  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

Теперь более подробно рассмотрим случай, когда  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ . На рис. 4 представлена зависимость угловой скорости цилиндра от его радиуса. Как видно из рис. 4, скорость вращения цилиндра существенно зависит от материала, из которого изготовлен цилиндр. Угловая скорость в случае (2) больше угловой скорости для случая (1) для  $R_{inside} \leq 0,725$ . Для данных фиксированных параметров для случая (2) максимальная угловая скорость достигается при  $R_{inside} = 0,6$  и равняется  $\omega_{max} = 35,18$ . Для случая (1) максимальная угловая скорость достигается при  $R_{inside} = 0,74$  и равняется  $\omega_{max} = 24,31$ . Следовательно, если мы хотим добиться максимальной угловой скорости вращения цилиндра при этих фиксированных параметрах, нам следует выбирать материал цилиндра с большой теплопроводностью и радиусом  $R_{inside} = 0,6$ .

Теперь рассмотрим, как изменится угловая скорость цилиндра при изменении числа Грасгофа. Для этого сравним зависимость угловой скорости от внутреннего радиуса для случая (1) при  $Gr = 10^4$  и  $Gr = 2 \cdot 10^4$ . Для случая (2) получаются аналогичные результаты. Нами ожидалось, что при увеличении числа Грасгофа за счет увеличения подъемной силы должна увеличиться и скорость вращения цилиндра, однако существует зона  $0,05 \leq R_{inside} \leq 0,5$ , где угловая скорость при  $Gr = 10^4$  больше аналогичной при  $Gr = 2 \cdot 10^4$ . Для данных фиксированных параметров при случае (2) эта зона при  $0,0625 \leq R_{inside} \leq 0,45$ . Это объясняется тем, что при увеличении числа Грасгофа будет увеличиваться скорость течения в области, а вслед за этим увеличатся вихри в области, что приведет к увеличению потерь энергии, а следовательно, и к уменьшению скорости вращения.

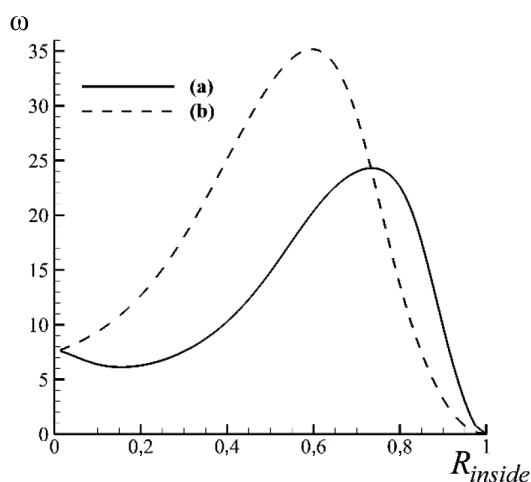


Рис. 4. Зависимость безразмерной угловой скорости вращения цилиндра  $\omega$  от безразмерного радиуса цилиндра  $R_{inside}$  при  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ,  $R_{inside} = 0,3$  (a) для случая (1), (b) для случая (2)

Fig. 4. The dependence of the dimensionless angular velocity of the cylinder  $\omega$  on the dimensionless radius of the cylinder  $R_{inside}$  at  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ,  $R_{inside} = 0.3$  (a) for the case (1), (b) for the case (2)

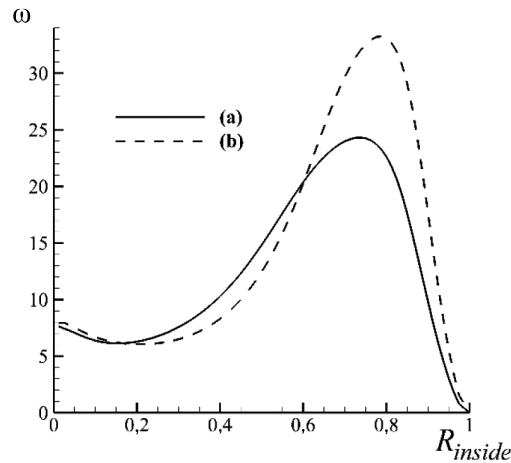


Рис. 5. Зависимость безразмерной угловой скорости вращения цилиндра  $\omega$  от безразмерного радиуса цилиндра  $R_{inside}$  для случая (1) при (a)  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ; (b)  $Gr = 2 \cdot 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$

Fig. 5. The dependence of the dimensionless angular velocity of the cylinder  $\omega$  on the dimensionless radius of the cylinder  $R_{inside}$  for the case (1) at (a)  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ; (b)  $Gr = 2 \cdot 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$

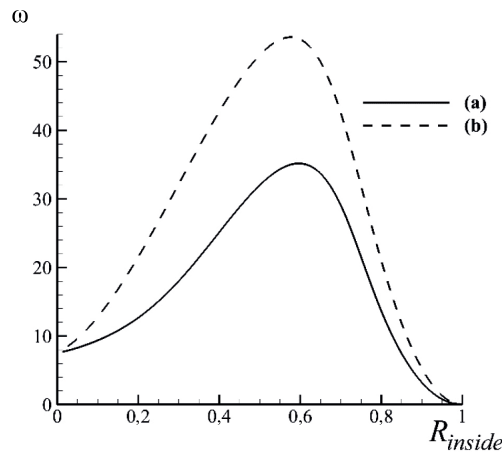


Рис. 6. Зависимость безразмерной угловой скорости вращения цилиндра  $\omega$  от безразмерного радиуса цилиндра  $R_{inside}$  для случая (2) при (a)  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ; (b)  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Fig. 6. The dependence of the dimensionless angular velocity of the cylinder  $\omega$  on the dimensionless radius of the cylinder  $R_{inside}$  for the case (2) at (a)  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ; (b)  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Теперь рассмотрим, как зависит угловая скорость цилиндра от угла  $\alpha$ . Для этого сравним зависимость угловой скорости вращения от радиуса цилиндра при разных значениях угла  $\alpha$ . Будем рассматривать случай (2), когда  $Gr = 10^4$ ,



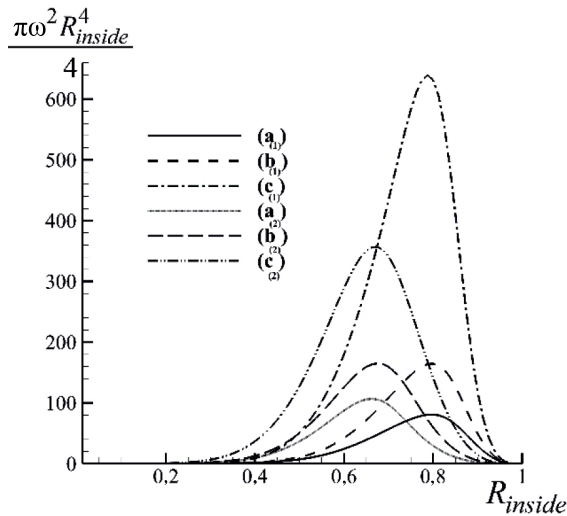


Рис. 7. Зависимость механической энергии цилиндра  $E$  от безразмерного радиуса цилиндра  $R_{inside}$

(a<sub>(1)</sub>) для случая (1),  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ ;  
 (b<sub>(1)</sub>) для случая (1),  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ;  
 (c<sub>(1)</sub>) для случая (1),  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ;  
 (a<sub>(2)</sub>) для случая (2),  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ ;  
 (b<sub>(2)</sub>) для случая (2),  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ;  
 (c<sub>(2)</sub>) для случая (2),  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Fig. 7. The dependence of the mechanical energy of the cylinder  $E$  on the dimensionless radius of the cylinder  $R_{inside}$

(a<sub>(1)</sub>) for the case (1),  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ ;  
 (b<sub>(1)</sub>) for the case (1),  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ;  
 (c<sub>(1)</sub>) for the case (1),  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ;  
 (a<sub>(2)</sub>) for the case (2),  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ ;  
 (b<sub>(2)</sub>) for the case (2),  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ;  
 (c<sub>(2)</sub>) for the case (2),  $Gr = 10^4$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

а углы возьмем равные  $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$ . Все выводы являются справедливыми и для случая (1). Как видно из рис. 6, увеличение угла  $\alpha$  приводит к увеличению угловой скорости для любого внутреннего радиуса  $R_{inside}$ , но при этом профиль угловой скорости остается неизменным. Это справедливо, т. к. при увеличении  $\alpha$  через область будет переноситься большее количество тепла, что повлечет за собой увеличение скорости течения; увеличение вихрей не последует из-за более равномерного прогрева и охлаждения жидкости.

Перейдем к рассмотрению механической энергии, которая содержится в цилиндре. Для этого рассмотрим рис. 7, на котором представлена зависимость механической энергии цилиндра от его радиуса. Было установлено, что при малых значениях внутреннего радиуса в цилиндре будет заключено ничтожно малое количество механической энергии по сравнению со случаем, когда  $R_{inside} \geq 0,4$ . Для разных значений  $\alpha$  максимально достижимая механическая энергия зависит от теплопроводности цилиндра. Для случая, когда  $Gr = 10^4$ , угол, при котором содержащаяся в цилиндре максимальная кинетическая энергия для

случая (1) равна аналогичной энергии для случая (2), есть угол  $\alpha_{kp} = \frac{\pi}{5}$ . Однако эти энергии достигаются при разных значениях  $R_{inside}$ . Как видно из рис. 7, при  $\alpha > \alpha_{kp}$  максимальная кинетическая энергия для случая (1) больше аналогичной энергии для случая (2), в то время как при  $\alpha < \alpha_{kp}$  наблюдается, что максимальная кинетическая энергия для случая (2) больше аналогичной энергии для случая (1).

### Заключение

В ходе проведенных численных экспериментов для случая, когда  $Pr = 1$ , были получены следующие результаты:

- для численного исследования задач естественной конвекции в круглой полости при  $10^4 \leq Gr \leq 2 \cdot 10^4$  достаточно использовать сетку  $82 \times 82$  узла;
- угловая скорость цилиндра существенно зависит от его теплопроводности и радиуса  $R_{inside}$ ;
- увеличение угла  $\alpha$  приводит к увеличению угловой скорости вращения цилиндра;
- увеличение числа  $Gr$ , в зависимости от  $R_{inside}$ , может привести как к уменьшению угловой скорости, так и к ее увеличению;
- максимум механической энергии для случая (2) достигается при меньших значениях внутреннего радиуса  $R_{inside}$ , чем для случая (1);
- максимальное значение механической энергии при  $Gr = 10^4$  при любом  $\alpha$  для случая (1) достигается при  $R_{inside} = 0,8$ , для случая (2) достигается при  $R_{inside} = 0,675$ ;
- при  $\alpha > \alpha_{kp} = \frac{\pi}{5}$  максимальная энергия достигается, когда цилиндр теплоизолированный, иначе — когда цилиндр изготовлен из материала, имеющего большой коэффициент теплопроводности.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
2. Прандтль Л. Гидроаэромеханика / Л. Прандтль. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 576 с.
3. Черкасов С. Г. Теоретический анализ баланса энергии при стационарной тепловой гравитационной конвекции / С. Г. Черкасов // Труды Четвертой Российской национальной конференции по теплообмену. 2006. Том 3. С. 168-171.
4. Шеремет М. А. Нестационарная сопряженная задача термогравитационной конвекции в горизонтальном цилиндре / М. А. Шеремет // Вестник Томского государственного университета. 2010. № 2 (10). С. 102-111.
5. Abedini A. Numerical study of mixed convection in an annulus between concentric rotating cylinders with time-dependent angular velocity / A. Abedini, A. B. Rahimi // Iranian Journal of Science and Technology: Transactions of Mechanical Engineering, 2012. Vol. 36. No M2. Pp. 165-180.

6. Abu-Nada E. Natural convection heat transfer enhancement in horizontal concentric annuli using nanofluids / E. Abu-Nada, Z. Masoud, A. Hijazi // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2008. Vol. 35. No 5. Pp. 657-665. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2007.11.004
7. Alawadhi E. M. Natural convection flow in a horizontal annulus with an oscillating inner cylinder using Lagrangian-Eulerian kinematics / E. M. Alawadhi // *Computers & Fluids*. 2008. Vol. 37. No 10. Pp. 1253-1261. DOI: 10.1016/j.compfluid.2007.10.011
8. Castrejon A. An experimental and theoretical study of transient free-convection flow between horizontal concentric cylinders / A. Castrejon, D. B. Spalding // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1988. Vol. 31. No 2. Pp. 273-284. DOI: 10.1016/0017-9310(88)90010-5
9. Fallah K. Simulation of natural convection heat transfer using nanofluid in a concentric annulus / K. Fallah, A. Ghaderi, N. Sedaghatizadeh, M. H. Borghei // *Thermal Science*. 2017. Vol. 21. No 3. Pp. 1275-1286. DOI: 10.2298/TSCI150118078F
10. Farouk B. Laminar and turbulent natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders / B. Farouk, S. I. Güçeri // *Journal of Heat Transfer*. 1982. Vol. 104. No 4. Pp. 631-636. DOI: 10.1115/1.3245178
11. Kuehn T. H. An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders / T. H. Kuehn, R. J. Goldstein // *Journal of Fluid Mechanics*. 1976. Vol. 74. No 4. Pp. 695-719. DOI: 10.1017/S0022112076002012
12. Kuehn T. H. An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli / T. H. Kuehn, R. J. Goldstein // *Journal of Heat Transfer*. 1978. Vol. 100. No 4. Pp. 635-640. DOI: 10.1115/1.3450869
13. Tsui Y. T. On transient natural convection heat transfer in the annulus between concentric, horizontal cylinders with isothermal surfaces / Y. T. Tsui, B. Tremblay // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1984. Vol. 27. No 1. Pp. 103-111. DOI: 10.1016/0017-9310(84)90242-4

**Pavel T. ZUBKOV<sup>1</sup>**  
**Eduard I. NARYGIN<sup>2</sup>**

UDC 532.5.032, 536.2

## **NUMERICAL STUDY OF NATURAL CONVECTION IN A HORIZONTAL ANNULAR CHANNEL**

<sup>1</sup> Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,  
Department of Fundamental Mathematics and Mechanics,  
University of Tyumen  
pzubkov@utmn.ru

<sup>2</sup> Postgraduate Student, Department of Fundamental Mathematics and Mechanics,  
University of Tyumen  
e.i.narygin@yandex.ru

### **Abstract**

The authors of this article study the natural convection of a viscous incompressible fluid that completely fills a horizontal annular channel, on the outer boundary of which a constant temperature differential is maintained. The inner cylinder can rotate around its axis. The movement of fluid in the annular cavity due to viscous friction will cause the rotation of the inner cylinder, which can be used to perform mechanical work. This system can be considered as a stationary heat engine, operating in the presence of a gravitational field, where the work is done through an irreversible process — viscous friction.

Two extreme cases were considered: when the inner cylinder is heat-insulated and when the inner cylinder is made of a material having a very high thermal conductivity.

This paper analyzes the amount of kinetic energy of the rotating cylinder depending on the inner radius and the size of the area where a constant temperature is maintained. The results show that the kinetic energy of the cylinder essentially depends on both the thermal conductivity and the radius. For both types of the inner cylinder, the authors have found the values of the inner radius, at which the maximum kinetic energy of the cylinder is reached. They have

---

**Citation:** Zubkov P. T., Narygin E. I. 2019. “Numerical study of natural convection in a horizontal annular channel”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 5, no 1, pp. 97-110.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-1-97-110

---

also established that this radius does not depend on the size of the region on which the constant temperature is maintained. The Boussinesq approximation was chosen as the mathematical model. To solve the problem, the control volume method and the SIMPLER algorithm were used. The calculations were carried out at  $Pr = 1$ ,  $10^4 \leq Gr \leq 2 \cdot 10^4$ ,  $0 < 2\alpha \leq \pi$ ,  $0 < R_{inside} < 1$ .

### Keywords

Natural convection, numerical methods, annular channel, Grashof number, Boussinesq approximation, energy production, Navier — Stokes equations.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-1-97-110**

### REFERENCES

1. Patankar S. 1984. Numerical Methods for Solving Problems of Heat Transfer and Fluid Dynamics. Moscow: Energoatomizdat. [In Russian]
2. Prandtl L. 2000. Hydroaeromechanics. Izhevsk: Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika. [In Russian]
3. Cherkasov S. G. 2006. “Theoretical analysis of the energy balance in case of stationary thermal gravitational convection”. Proceedings of the 4th Russian National Conference on Heat Exchange, vol. 3. pp. 168-171. [In Russian]
4. Sheremet M. A. 2010. “Non-stationary coupled problem of thermogravitational convection in a horizontal cylinder”. Tomsk State University Journal, no 2 (10), pp. 102-111. [In Russian]
5. Abedini A., Rahimi A. B. 2012. “Numerical study of mixed convection in an annulus between concentric rotating cylinders with time-dependent angular velocity”. Iranian Journal of Science and Technology: Transactions of Mechanical Engineering, vol. 36, no M2, pp. 165-180.
6. Abu-Nada E., Masoud Z., Hijazi A. 2008. “Natural convection heat transfer enhancement in horizontal concentric annuli using nanofluids”. International Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 35, no 5, pp. 657-665. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2007.11.004
7. Alawadhi E. M. 2008. “Natural convection flow in a horizontal annulus with an oscillating inner cylinder using Lagrangian-Eulerian kinematics”. Computers & Fluids, vol. 37, no 10, pp. 1253-1261. DOI: 10.1016/j.compfluid.2007.10.011
8. Castrejon A., Spalding D. B. 1988. “An experimental and theoretical study of transient free-convection flow between horizontal concentric cylinders”. International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 31, no 2, pp. 273-284. DOI: 10.1016/0017-9310(88)90010-5
9. Fallah K., Ghaderi A., Sedaghatizadeh N., Borghei M. H. 2017. “Simulation of natural convection heat transfer using nanofluid in a concentric annulus”. Thermal Science, vol. 21, no 3, pp. 1275-1286. DOI: 10.2298/TSCI150118078F

10. Farouk B., Güçeri S. I. 1982. "Laminar and turbulent natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders". *Journal of Heat Transfer*, vol. 104, no 4, pp. 631-636. DOI: 10.1115/1.3245178
11. Kuehn T. H., Goldstein R. J. 1976. "An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders". *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 74, no 4, pp. 695-719. DOI: 10.1017/S0022112076002012
12. Kuehn T. H., Goldstein R. J. 1978. "An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli". *Journal of Heat Transfer*, vol. 100, no 4, pp. 635-640. DOI: 10.1115/1.3450869
13. Tsui Y. T., Tremblay B. 1984. "On transient natural convection heat transfer in the annulus between concentric, horizontal cylinders with isothermal surfaces". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 27, no 1, pp. 103-111. DOI: 10.1016/0017-9310(84)90242-4