

**Александр Иванович ФИЛИППОВ<sup>1</sup>**  
**Оксана Валентиновна АХМЕТОВА<sup>2</sup>**  
**Алексей Алексеевич КОВАЛЬСКИЙ<sup>3</sup>**  
**Марат Радикович ГУБАЙДУЛЛИН<sup>4</sup>**

УДК 532.546

**ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ЗАДАННОМ ОТБОРЕ  
В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОМ  
АНИЗОТРОПНОМ НЕФТЯНОМ ПЛАСТЕ\***

<sup>1</sup> доктор технических наук, профессор-консультант  
кафедры общей и теоретической физики,  
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета  
filippovai@gambler.ru

<sup>2</sup> доктор физико-математических наук, заведующий  
кафедрой общей и теоретической физики,  
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета  
ahoksana@yandex.ru

<sup>3</sup> кандидат физико-математических наук, директор,  
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета  
aakov68@mail.ru

<sup>4</sup> младший научный сотрудник НОЦ  
«Физика термогазодинамического воздействия на продуктивный пласт»,  
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета  
fir\_bmf@mail.ru

---

\* Работа выполнена при грантовой поддержке РФФИ (№ 16-08-00728,  
№ 16-08-00548, № 17-48-020517).

---

**Цитирование:** Филиппов А. И. Поле давления при заданном отборе в слоисто-неоднородном анизотропном нефтяном пласте / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский, М. Р. Губайдуллин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Том 5. № 1. С. 187-200.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-1-187-200

### **Аннотация**

Исследованы фильтрационные поля давления в пластах, когда интервал перфорации не совпадает с границами пласта. Для этого пористая среда представлена в виде трех слоев, для которых сформулирована задача сопряжения. В соответствии с реальными условиями принято, что зависимость проницаемостей от вертикальной координаты в интервале отбора нефти является произвольной. Это привело к необходимости решения задачи сопряжения для уравнения пьезопроводности с переменными коэффициентами.

Показано, что для такого случая локальное граничное условие, которое обычно используется для однородных пластов для случая заданного отбора, следует заменить на интегральное нелокальное, что определяет новизну задачи.

С использованием развитой модификации асимптотического метода найдено решение задачи о поле давления в слоисто-неоднородном анизотропном пористом пласте, эксплуатируемом в режиме заданного отбора.

### **Ключевые слова**

Поле давления, слоисто-неоднородный пласт, асимптотический метод.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-1-187-200**

### **Введение**

В реальных условиях границы интервалов перфорации не совпадают с границами пласта. Это, с одной стороны, связано с технологическими трудностями, поскольку удлинение кабеля, на котором опускается перфоратор, за счет собственного веса часто превышает толщину пласта. С другой стороны, часто геологические условия, например, при наличии водонефтяного контакта, позволяют перфорировать только часть пласта. Это обстоятельство приводит к необходимости решения задач о полях давления в трехслойной системе пластов, в которой только центральный подвержен эксплуатации. Такие задачи важны для учета вертикальных потоков в пластах, которые определяют нефтеотдачу из неперфорированных частей пласта.

Классические аналитические решения задач о поле давления при фильтрации в пористой среде получены преимущественно для однородных изотропных пластов. Однако все природные коллекторы неоднородны по толщине и простиранию [2-4, 6, 7, 11]. По этой причине исследование фильтрационных процессов приводит к необходимости учета неоднородности пластов и зависимости коэффициента проницаемости от пространственных координат. Это существенно усложняет решение данных задач, в сравнении с рассмотренными в [1, 7-10], поскольку входящие в эти задачи дифференциальные уравнения в частных производных содержат переменные коэффициенты.

Основными методами при исследовании процессов фильтрации в таких условиях являются конечно-разностные [3]. Аналитические методы построения решений

таких задач слабо развиты, хотя их результаты важны для анализа процессов. Решение задачи удалось осуществить на основе асимптотического метода.

В статье иллюстрируются возможности модификации «в среднем точного» асимптотического метода, примененного для исследования полей давления в неоднородных анизотропных пластах [8]. Показано, что развитый метод позволяет находить решения, когда проницаемость пласта зависит от вертикальной координаты произвольным образом  $k_{rd} = k_{rd}(z_d)$ ,  $k_{zd} = k_{zd}(z_d)$ . Построение решений такого рода задач важно для теории фильтрации, а развитый метод представляется существенным достижением в задачах для уравнений с переменными коэффициентами.

### Задача о поле давления при заданном отборе в слоисто-неоднородной среде

Модель представляет собой анизотропный пласт, условно разделенный на три области (рис. 1). Координаты границы сопряжения пластов  $z_d = \pm h$ . Значения компонент проницаемости центральной области ( $-h < z_d < h$ ) произвольным образом распределены по толщине средней области.

Перфорация осуществляется в наиболее проницаемой части пласта. Окружающие породы обычно обладают ухудшенной проницаемостью. Оценки показывают, что в таких условиях наблюдается быстрый спад возмущений давления при удалении от центрального пласта в окружающих перфорированный пласт породах. Применительно к рассматриваемым задачам это позволяет без уменьшения общности считать окружающие породы полубесконечными.

Далее дополнительно следует учесть, что горизонтальные градиенты давления вблизи скважины в окружающих породах значительно меньше, чем вертикальные, т. к. подстилающий и настиляющий пласты изолированы от сква-

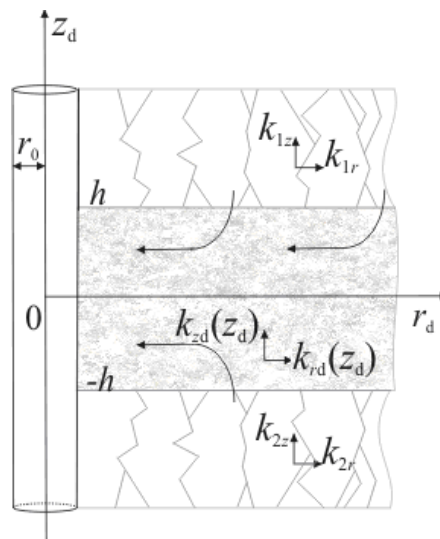


Рис. 1. Геометрия задач

Fig. 1. Task geometry

жины [10]. Соответственно, радиальные производные в уравнениях для окружающих пород можно опустить.

Математическая постановка гидродинамической задачи для осесимметричного случая в таких предположениях запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{1d}}{\partial \tau} - \chi_{1d} \frac{\partial^2 P_{1d}}{\partial z_d^2} &= 0, \quad z_d > h, \tau > 0, \\ \frac{\partial P_{2d}}{\partial \tau} - \chi_{2d} \frac{\partial^2 P_{2d}}{\partial z_d^2} &= 0, \quad z_d < -h, \tau > 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial P_d}{\partial \tau} - \chi_r(z_d) \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left( r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right) - \frac{\partial}{\partial z_d} \left( \chi_z(z_d) \frac{\partial P_d}{\partial z_d} \right) &= 0, \\ -h < z_d < h, \tau > 0, r_d > 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

На границах сред заданы равенства давлений и потоков:

$$P_{1d}|_{z_d=h} = P_d|_{z_d=h}, \quad P_{2d}|_{z_d=-h} = P_d|_{z_d=-h}, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} k_{1z} \frac{\partial P_{1d}}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h} &= k_{zd}(z_d) \frac{\partial P_d}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h}, \\ k_{2z} \frac{\partial P_{2d}}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h} &= k_{zd}(z_d) \frac{\partial P_d}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В начальный момент времени фильтрационное возмущение давления отсутствует:

$$P_d|_{\tau=0} = P_{1d}|_{\tau=0} = P_{2d}|_{\tau=0} = 0. \quad (1.5)$$

На границах окружающих пород следует задать условие непроницаемости, однако при малых значениях проницаемости в реальных пластах наблюдается быстрый спад давления с увеличением расстояния от центра пласта. По этой причине без уменьшения общности формально можно устремить координаты границы окружающих зон к бесконечности, а давление на бесконечности считается неизменным:

$$P_{1d} \Big|_{\substack{r_d \rightarrow \infty \\ z_d \rightarrow \infty}} = P_{2d} \Big|_{\substack{r_d \rightarrow \infty \\ z_d \rightarrow -\infty}} = P_d \Big|_{r_d \rightarrow \infty} = 0. \quad (1.6)$$

Заметим, что условие заданного отбора для неоднородного пласта, перфорированного в интервале  $-h < z_d < h$ , представить в локальной форме невозможно. Нелокальное интегральное условие представлено нами в виде:

$$\int_{-h}^h k_{rd}(z') \lim_{r_d \rightarrow 0} \left( r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right) \Big|_{r_d=r_0} dz' = -\frac{\mu Q}{2\pi}. \quad (1.7)$$

В задаче перед производной по времени в уравнении пьезопроводности в центральном пласте введен множитель  $\alpha$ . При  $\alpha = 1$  задача является обычной нестационарной, а при  $\alpha = 0$  — квазистационарной.

С использованием безразмерных переменных, а именно:

$$\begin{aligned} t &= \chi\tau/h^2, \quad z = z_d/h, \quad r = r_d/h, \quad P = P_d/P_0, \quad P_1 = P_{1d}/P_0, \quad P_2 = P_{2d}/P_0 \\ k_r(z) &= k_{rd}(z_d)/k, \quad k_z(z) = k_{zd}(z_d)/k, \quad \chi = k/\mu m\beta, \quad q = \mu Q/2\pi P_0 h k, \\ \chi_1 &= \chi_{1d}/\chi, \quad \chi_2 = \chi_{2d}/\chi, \quad k_1 = k_{1z}/k, \quad k_2 = k_{2z}/k, \quad k_r = k_{rd}/k, \\ k_z &= k_{zd}/k, \end{aligned} \quad (1.8)$$

задача (1.1)-(1.7) запишется в виде:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \chi_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0, \quad t > 0, \quad z > 1, \quad \frac{\partial P_2}{\partial t} - \chi_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} = 0, \quad t > 0, \quad z < -1, \quad (1.9)$$

$$\alpha \frac{\partial P}{\partial t} - k_r(z) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z(z) \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0, \quad r > 0, \quad -1 < z < 1, \quad (1.10)$$

$$k_1 \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = k_z(z) \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad k_2 \frac{\partial P_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} = k_z(z) \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=-1}, \quad (1.11)$$

$$P_1|_{z=1} = P|_{z=1}, \quad P_2|_{z=-1} = P|_{z=-1}, \quad (1.12)$$

$$\int_{-1}^1 k_r(z) \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) dz = -q, \quad (1.13)$$

$$P_1|_{t=0} = P_2|_{t=0} = P|_{t=0} = 0, \quad (1.14)$$

$$P_1|_{r \rightarrow \infty} = P_2|_{r \rightarrow \infty} = P|_{r \rightarrow \infty} = 0.$$

В задачу перед первой и второй производными от  $P$  по  $z$  формально введен параметр асимптотического разложения  $\varepsilon$  [7]. Ранее показано [7], что именно такая параметризация обеспечивает построение такого решения в нулевом приближении.

#### Асимптотическое разложение задачи. Нулевое приближение

Решение задачи (1.9)-(1.14) представляется формулами [1, 7-10]:

$$P_1 = P_1^{(0)} + \varepsilon P_1^{(1)} + \varepsilon^2 P_1^{(2)} + \dots, \quad P = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \dots \quad (2.1)$$

Используя ряды (2.1) и задачу (1.9)-(1.14), получаем задачу, разбитую по степеням формального асимптотического параметра [9]. Задача для наименьшей степени  $\varepsilon$  запишется как

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k_z(z) \frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} \right) = 0, \quad \frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad \frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что  $P^{(0)} = P^{(0)}(r, t)$  и не зависит от вертикальной координаты.

Выражения для нулевого коэффициента разложения имеют вид:

$$\frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial t} - \chi_1 \frac{\partial^2 P_1^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial t} - \chi_2 \frac{\partial^2 P_2^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad (2.3)$$

$$\alpha \frac{\partial P^{(0)}}{\partial t} - k_r(z) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z(z) \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \right) = 0, \quad (2.4)$$

$$P_1^{(0)}|_{z=1} = P^{(0)}|_{z=1}, \quad P_2^{(0)}|_{z=-1} = P^{(0)}|_{z=-1}, \quad (2.5)$$

$$k_1 \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = k_z(z) \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad k_2 \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} = k_z(z) \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1},$$

$$P_1^{(0)}|_{t=0} = P^{(0)}|_{t=0} = P_2^{(0)}|_{t=0} = 0, \quad (2.6)$$

$$\int_{-1}^1 k_r(z) dz \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} \right) = -q. \quad (2.7)$$

К уравнению (2.4) необходимо применить процедуру «расщепления», описанную в [9], ввиду содержания нулевого и первого коэффициентов асимптотического разложения. Осуществленная процедура позволяет представить выражение (2.4) в виде уравнения для нулевого коэффициента:

$$\alpha \frac{\partial P^{(0)}}{\partial t} - \langle k_r(z) \rangle \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} \right) - \frac{1}{2} \left( k_1 \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_2 \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Постановка задачи для нулевого коэффициента включает также уравнения для окружающей среды

$$\frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial t} - \chi_1 \frac{\partial^2 P_1^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial t} - \chi_2 \frac{\partial^2 P_2^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad (2.9)$$

условия сопряжения

$$P_1^{(0)}|_{z=1} = P^{(0)}|_{z=1}, \quad P_2^{(0)}|_{z=-1} = P^{(0)}|_{z=-1}, \quad (2.10)$$

начальные условия

$$P_1^{(0)}|_{t=0} = P^{(0)}|_{t=0} = P_2^{(0)}|_{t=0} = 0, \quad (2.11)$$

нелокальное граничное условие

$$\int_{-1}^1 k_r(z) dz \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} \right) = -q. \quad (2.12)$$

Отметим, что применение процедуры «расщепления» [9] к задаче с переменными коэффициентами позволяет не только расцепить уравнение, но и преобразовать его таким образом, что безразмерный параметр, характеризующий отношение проницаемостей, входит в задачу в виде интеграла  $\langle k_r(z) \rangle$ , который не зависит от вертикальной координаты  $z$ . Этот факт позволяет применять в задаче для нулевого асимптотического приближения широко используемые методы решения, например интегральные преобразования.

Решение задачи (2.8)-(2.12) имеет вид:

$$P^{(0)u} = \frac{q}{\langle k_r(z) \rangle} K_0 \left( \sqrt{\frac{1}{2\langle k_r(z) \rangle}} \left( 2\alpha p + k_1 \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} + k_2 \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} \right) r \right), \quad (2.13)$$

$$P_1^{(0)u} = \frac{q}{\langle k_r(z) \rangle} K_0 \left( \sqrt{\frac{1}{2\langle k_r(z) \rangle}} \left( 2\alpha p + k_1 \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} + k_2 \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} \right) r \right) \times \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}(z-1)\right), \quad (2.14)$$

$$P_2^{(0)u} = \frac{q}{\langle k_r(z) \rangle} K_0 \left( \sqrt{\frac{1}{2\langle k_r(z) \rangle}} \left( 2\alpha p + k_1 \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} + k_2 \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} \right) r \right) \times \exp\left(\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}(z+1)\right). \quad (2.15)$$

Для случая непроницаемых окружающих пород ( $k_{1z} = 0, k_{2z} = 0$ ) решение в пространстве оригиналов [5] при условии  $k = \langle k_r(z_d) \rangle$  в размерных переменных преобразуется к выражению

$$P_d^{(0)} = \frac{\mu Q}{4\pi h \langle k_r(z_d) \rangle} \int_{ar^2/4\langle \chi_r(z_d) \rangle \tau}^{\infty} \exp(-u) \frac{du}{u}, \quad (2.16)$$

совпадающему с известным выражением для заданного отбора из однородного пласта при радиальном одномерном движении [2].

Независимость давления от  $z$ , справедливая в нулевом приближении, постулировалось ранее и широко использована для определения поля давления в пластах, состоящих из слоев с различающейся проницаемостью [2].

Из рассматриваемой задачи следует, что даже в случае однородных пластов давление не зависит от вертикальной координаты, если только границы интервалов перфорации совпадают с границами пласта. В скважинных условиях такое совпадение по технологическим причинам практически невозможно, поэтому предположение о независимости поля давления от вертикальной координаты (одномерная фильтрация) в общем случае не оправдывается.

Для частного квазистационарного случая ( $\alpha = 0$ ) при идентичных свойствах настилающего и подстилающего пластов ( $k_1 = k_2, \chi_1 = \chi_2$ ) и симметричном рас-

пределении проницаемости по толщине центральной области ( $k_r(z) = k_r(-z)$ ) решение в пространстве оригиналов запишется в виде:

$$P^{(0)} = \frac{q}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \int_{r^2/4\tau\langle k_r(z) \rangle}^\infty \exp(-u) \frac{du}{u} d\tau, \quad (2.17)$$

$$P_1^{(0)} = \frac{q}{2\sqrt{\pi t}} \int_{z-1}^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \int_{r^2/4(\tau-z+1)\langle k_r(z) \rangle}^\infty \exp(-u) \frac{du}{u} d\tau.$$

Для случая однородного по проницаемости центрального пласта это решение имеет вид:

$$P^{(0)} = \frac{q}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \int_{r^2/4\tau k_r}^\infty \exp(-u) \frac{du}{u} d\tau, \quad (2.18)$$

$$P_1^{(0)} = \frac{q}{2\sqrt{\pi t}} \int_{z-1}^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \int_{r^2/4(\tau-z+1)k_r}^\infty \exp(-u) \frac{du}{u} d\tau.$$

Выражения (2.18) согласуются с полученными в [9] для квазистационарного поля давления и однородного пласта.

Различием между решениями (2.17) и (2.18) является соотношение для  $\langle k_r(z) \rangle$ . Это позволяет ввести понятие эквивалентного однородного пласта, для которого значения  $k_r$  равны соответствующим соотношениям  $\langle k_r(z) \rangle$  для неоднородного пласта. Поля давления в нулевом приближении в таких пластах идентичны.

Решение в нулевом приближении позволяет определить усредненное по толщине центрального пропластка поле давления. Однако для оценки влияния неоднородности центрального пропластка необходимо построить детальное поле давления, что требует нахождения первого коэффициента асимптотического разложения.

### Первое асимптотическое приближение

Аналогично (2.3)-(2.7) постановка задачи при  $\varepsilon^1$  запишется как

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad (3.1)$$

$$\alpha \frac{\partial P^{(1)}}{\partial t} - k_r(z) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z(z) \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1} = k_z(z) \left. \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} \right|_{z=1}, \quad P_1^{(1)} \Big|_{z=1} = P^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad (3.3)$$

$$P_1^{(1)} \Big|_{r=0} = 0, \quad \int_0^1 k_r(z) \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right) dz = 0. \quad (3.4)$$



«Зацепленное» уравнение (3.2) требует применения более сложной, нежели в пункте 2, процедуры «расщепления» [9]. В расщепленной форме (3.2) имеет вид:

$$\alpha \frac{\partial P^{(1)}}{\partial t} - \int_0^1 k_r(z) dz \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\Lambda(z)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} \right), \quad (3.5)$$

где  $\Lambda(z) = \langle k_r(z) \rangle^{-1} \left( K(z) \int_0^1 k_r(z) dz - \int_0^1 K(z') k_r(z') dz' \right)$ .

Из задачи для остаточного члена [9] следует, что (3.4) является естественным условием, при котором остаточный член в первом приближении равен нулю. В отличие от задач фильтрации, рассмотренных ранее [1, 7-10], данная задача не требует отыскания ослабленного условия, поскольку условие заданного отбора уже является интегральным.

Задача (3.1), (3.3)-(3.5), как и нулевое приближение, не содержит переменных коэффициентов, а решение отыскивается в пространстве изображений Лапласа — Карсона [5]. В пространстве оригиналов для квазистационарного случая оно имеет вид:

$$P^{(1)} = \frac{q}{2 \langle k_r(z) \rangle^2 \sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left( \frac{Y(z)}{\tau} - \frac{\Omega(z)r^2}{4\tau^2} \right) \exp \left( -\frac{\tau^2}{4t} - \frac{r^2}{4 \langle k_r(z) \rangle \tau} \right) d\tau, \quad (3.6)$$

$$P_1^{(1)} = \frac{q}{2 \langle k_r(z) \rangle^2 \sqrt{\pi t}} \times \quad (3.7)$$

$$\times \int_{z-1}^\infty \left( \frac{Y(1)}{(\tau-z+1)} - \frac{\Omega(1)r^2}{4(\tau-z+1)^2} \right) \exp \left( -\frac{\tau^2}{4t} - \frac{r^2}{4 \langle k_r(z) \rangle (\tau-z+1)} \right) d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \int_0^1 \frac{1}{k_z(z)} \int_0^z k_r(z'') dz'' dz' - \int_0^z \frac{1}{k_z(z)} \int_0^z k_r(z'') dz'' dz' - \\ &- \langle k_r(r) \rangle \int_0^z \frac{1}{k_z(z)} \int_0^z k_r(z'') dz'' dz' + \int_0^1 k_r(z') \int_0^z \frac{1}{k_z(z'')} \int_0^{z''} k_r(z''') dz''' dz'' dz', \\ Y(z) &= \frac{1}{\langle k_r(z) \rangle} \int_0^1 k_r(z) \int_0^z \frac{1}{k_z(z)} \int_0^z k_r(z'') dz'' dz' dz - \int_0^z \frac{1}{k_z(z)} \int_0^z k_r(z'') dz'' dz'. \end{aligned}$$

Разработанная модель расширяет возможности моделирования фильтрации флюида через слоисто-неоднородные пористые пласты и позволяет изучить множество различных неоднородностей центрального пропластка. На рис. 2

представлено сопоставление зависимостей возмущения давления от вертикальной координаты: кривые 2, 4 для  $k_z(z) = 3z^4 + 0,1$ ,  $k_r(z) = 3z^4 + 0,1$ ; кривые 1, 3 для модели с постоянными коэффициентами  $k_z = \langle k_z(z) \rangle = 0,7$ ,  $k_r = \langle k_r(z) \rangle = 0,7$ . Как и ожидалось, нулевые коэффициенты, кривые 1, 2 для обеих моделей совпадают. Это означает, что если достаточно точности нулевого приближения, то можно воспользоваться моделью с постоянными коэффициентами, если принять, что  $k_r = \langle k_r(z) \rangle$ .

Первый коэффициент уточняет нулевое приближение и позволяет построить детальное поле давления в центральном пропластке, поскольку основное различие кривых 3, 4 наблюдается в центральном слое.

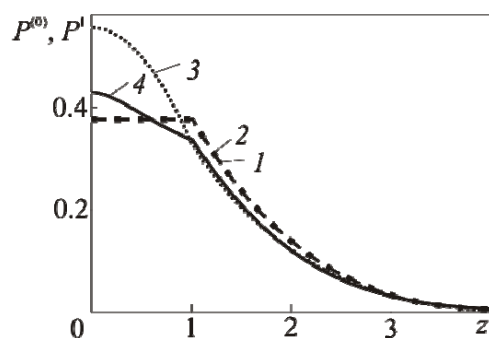


Рис. 2. Сопоставление распределения давления по толщине пласта в нулевом (кривые 1, 2) и первом (кривые 3, 4) приближениях для пласта с переменными (кривые 2, 4) и постоянными (кривые 1, 3) коэффициентами проницаемости

Fig. 2. Comparing the pressure distribution over the plate's thickness in the zero (curves 1, 2) and first (curves 3, 4) approximations for the plate with variable (curves 2, 4) and constant (curves 1, 3) permeability coefficients

Для случая изолированного центрального пропластка ( $k_{1z} = k_{2z} = 0$ ) первый коэффициент асимптотического разложения (3.6), (3.7) равен нулю. Учитывая этот факт и то, что для изолированного центрального пласта нулевое приближение совпадает с известным точным решением [2], находим, что вертикальный градиент давления в центральном пропластке обусловлен фильтрационными потоками из окружающих сред. Это означает, что развитая модель позволяет оценить вклад в поле давления перетоков между пропластками.

### Заключение

На основе асимптотического метода разработана математическая модель поля давления при фильтрации флюида в трехслойном анизотропном пористом пласте, учитывающая наличие пропластков с отличающимися коллекторскими свойствами, в которых проницаемость зависит от вертикальной координаты, что позволяет расширить область применения расчетных формул и исследовать влияние трещин, возникающих при гидроразрыве пласта.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ахметова О. В. Квазистационарные поля давления при линейной фильтрации в неоднородном анизотропном пласте в асимптотическом приближении / О. В. Ахметова, А. И. Филиппов, И. М. Филиппов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2012. № 3. С. 89-100. DOI: 10.1134/S0015462812030106
2. Басниев К. С. Подземная гидромеханика / К. С. Басниев, И. Н. Кочина, В. М. Максимов. М.: Недра, 1993. 416 с.
3. Голубев Г. В. Численное решение задачи определения поля давлений в неоднородном трещиновато-пористом пласте / Г. В. Голубев // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. 2003. № 4. С. 26-30.
4. Губайдуллин Д. А. Идентификация тензоров коэффициентов проницаемости неоднородного анизотропного трещиновато-пористого пласта / Д. А. Губайдуллин, А. И. Никифоров, Р. В. Садовников // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Том 4. № 4. С. 11-19. DOI: 10.7242/1999-6691/2011.4.4.35
5. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. М.: Высшая школа, 1965. 466 с.
6. Дмитриев Н. М. Эффект асимметрии при фильтрации в анизотропных пористых средах / Н. М. Дмитриев, В. В. Кадет, Н. Н. Михайлов и др. // Технологии нефти и газа. 2007. № 1 (48). С. 52-55.
7. Филиппов А. И. Асимптотически осредненное решение задачи о поле давления в слоисто-неоднородной пористой среде / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, М. Р. Губайдуллин // Нефтегазовое дело: электронный научный журнал. 2015. № 3. С. 693-712. DOI: 10.17122/ogbus-2015-3-693-712
8. Филиппов А. И. Первое асимптотическое приближение задачи о поле давления в неоднородной ортотропной пористой среде / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский и др. // Известия Уфимского научного центра Российской академии наук. 2016. № 1. С. 5-12.
9. Филиппов А. И. Поле давления при радиальной фильтрации в неоднородном ортотропном пласте в асимптотическом приближении / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, М. Р. Губайдуллин // Инженерно-физический журнал. 2015. Том 88. № 6. С. 1285-1296. DOI: 10.1007/s10891-015-1317-0
10. Филиппов А. И. Фильтрационное поле давления в неоднородном пласте при постоянном отборе / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, И. М. Филиппов // Инженерно-физический журнал. 2012. Том 85. № 1. С. 3-17. DOI: 10.1007/s10891-012-0615-z
11. Хасанов М. М. Определение профиля вертикального распределения проницаемости с учетом данных эксплуатации скважин / М. М. Хасанов, К. В. Торопов, А. А. Лубнин // Нефтяное хозяйство. 2009. № 8. С. 26-31.

**Aleksander I. FILIPPOV<sup>1</sup>**  
**Oksana V. AKHMETOVA<sup>2</sup>**  
**Alexey A. KOVALSKY<sup>3</sup>**  
**Marat R. GUBAIDULLIN<sup>4</sup>**

UDC 532.546

**PRESSURE FIELD FOR A GIVEN SELECTION  
IN A LAYERED HETEROGENEOUS  
ANISOTROPIC OIL RESERVOIR\***

- <sup>1</sup> Dr. Sci. (Tech.), Professor-Consultant,  
Department of General and Theoretical Physics,  
Sterlitamak Branch of Bashkir State University  
filippovai@rambler.ru
- <sup>2</sup> Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of General and Theoretical Physics,  
Sterlitamak Branch of Bashkir State University  
ahoksana@yandex.ru
- <sup>3</sup> Cand. Sci. (Phys.-Math.), Director,  
Sterlitamak Branch of Bashkir State University  
aakov68@mail.ru
- <sup>4</sup> Junior Research Associate, Research and Educational  
Center “Physics of thermogasdynamics impact on productive reservoir”,  
Sterlitamak Branch of Bashkir State University  
fir\_bmf@mail.ru

**Abstract**

This article studies pressure filtration fields in oil reservoirs in the cases when the perforation interval does not coincide with the boundaries of the formation. That requires presenting the

---

\* This research was supported by the Russian Foundation for Basic Research  
(No 16-08-00728, No 16-08-00548, No 17-48-020517).

---

**Citation:** Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalsky A. A., Gubaidullin M. R. 2019. “Pressure field for a given selection in a layered heterogeneous anisotropic oil reservoir”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 5, no 1, pp. 187-200.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-1-187-200

porous medium in the form of three layers for which the conjugation problem is formulated. In accordance with real conditions, the authors assume that the dependence of permeability on the vertical coordinate in the oil extraction interval is arbitrary. This led to solving the conjugation problem for the piezoconductivity equation with variable coefficients.

The results show that for such a case, an integral nonlocal condition should replace the local boundary one (which is usually used for homogeneous reservoirs for the case of a given selection). This emphasizes the novelty of the task.

Using the developed modification of the asymptotic method, a solution was found for the pressure field problem in a layered inhomogeneous anisotropic porous formation that is operated in the preset selection mode in the zero and first asymptotic approximations.

### **Keywords**

Pressure field, layered heterogeneous reservoir, asymptotic method.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-1-187-200**

### **REFERENCES**

1. Ahmetova O. V., Filippov A. I., Filippov I. M. 2012. "Quasistationary pressure fields for linear filtration in an inhomogeneous anisotropic formation in the asymptotic approximation". *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, no 3, pp. 89-100. DOI: 10.1134/S0015462812030106
2. Basniev K. S., Kochina I. N., Maksimov V. M. 1993. *Underground Hydromechanics*. Moscow: Nedra. [In Russian]
3. Golubev G. V. 2003. "Numerical solution of the problem of determining the pressure field in an inhomogeneous fractured-porous layer". *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta im. A. N. Tupoleva*, no 4, pp. 26-30. [In Russian]
4. Gubaydullin D. A., Nikiforov A. I., Sadovnikov R. V. 2011. "Identification of tensors of permeability coefficients of an inhomogeneous anisotropic fractured-porous formation". *Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred*, vol. 4, no 4, pp. 11-19. [In Russian] DOI: 10.7242/1999-6691/2011.4.4.35
5. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. 1965. *Handbook of Operational Calculus*. Moscow: Vysshaya shkola. [In Russian]
6. Dmitriev N. M., Kadet V. V., Mikhaylov N. N. et al. 2007. "The effect of asymmetry in filtration in anisotropic porous media". *Tekhnologii nefi i gaza*, no 1 (48), pp. 52-55. [In Russian]
7. Filippov A. I., Ahmetova O. V., Gubaydullin M. R. 2015. "Asymptotically averaged solution of the pressure field problem in a layered heterogeneous porous medium". *Neftegazovoe delo: elektronniy nauchnyy zhurnal*, no 3, pp. 693-712. [In Russian] DOI: 10.17122/ogbus-2015-3-693-712
8. Filippov A. I., Ahmetova O. V., Kovalskiy A. A. et al. 2016. "The first asymptotic approximation of the pressure field problem in an inhomogeneous orthotropic porous

- medium”. *Izvestiya Ufimskogo nauchnogo centra Rossiyskoy akademii nauk*, no 1, pp. 5-12. [In Russian]
9. Filippov A. I., Ahmetova O. V., Gubaydullin M. R. 2015. “Pressure field for radial filtration in an inhomogeneous orthotropic formation in the asymptotic approximation”. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, vol. 88, no 6, pp. 1285-1296. DOI: 10.1007/s10891-015-1317-0
  10. Filippov A. I., Ahmetova O. V., Filippov I. M. 2012. “Filtration field of pressure in an inhomogeneous formation at constant selection”. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, vol. 85, no 1, pp. 3-17. DOI: 10.1007/s10891-012-0615-z
  11. Khasanov M. M., Toropov K. V., Lubnin A. A. 2009. “Determination of the vertical distribution profile of permeability taking into account the operation data of the wells”. *Neftyanoe hozyaystvo*, no 8, pp. 26-31. [In Russian]