

Роман Евстафьевич ВОЛКОВ¹
Александр Геннадьевич ОБУХОВ²

УДК 519.63+533.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ОТ СКОРОСТИ ПРОДУВА ПАРАМЕТРОВ ВОСХОДЯЩЕГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА¹

¹ аспирант кафедры алгебры и математической логики,
Тюменский государственный университет
email@romanvolkov.ru

² доктор физико-математических наук, профессор,
Тюменский индустриальный университет
aobukhov@tsogu.ru

Аннотация

Необходимость учета диссипативных свойств вязкости и теплопроводности движущейся сплошной среды при численном построении решений полной системы уравнений Навье-Стокса (описывающей трехмерные течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса) существенно усложняет проведение численных экспериментов по детальному изучению возникающих сложных течений газа. Прежде всего это сказывается на резком увеличении времени счета. Распараллеливание вычислительной процедуры позволяет сократить временные затраты и существенным образом оптимизировать вычислительный алгоритм для более эффективного использования ресурсов вычислительной системы.

Целью данной работы является описание процедуры распараллеливания вычислительного алгоритма для численного решения полной системы уравнений Навье-Стокса и описание результатов проведенных численных экспериментов по

¹ Исследования поддержаны Минобрнауки РФ (проект № 3023).

Цитирование: Волков Р. Е. Исследование зависимости от скорости продува параметров восходящего закрученного потока / Р. Е. Волков, А. Г. Обухов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Том 2. № 3. С. 24-34.
DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-3-24-34

детальному исследованию зависимости всех газодинамических характеристик от скорости вертикального продува воздуха в вертикальной трубе при проведении масштабного эксперимента.

Ключевые слова

Система уравнений газовой динамики, полная система уравнений Навье-Стокса, краевые условия.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-3-24-34

Введение

Способ инициирования восходящего закрученного потока воздуха с помощью вертикального продува в трубе был предложен в работах [1-3; 14-15] и успешно реализован в лабораторных условиях [10]. В указанных работах было математически и численно смоделировано возникновение и развитие восходящего закрученного потока именно с использованием вертикального продува воздуха. В последней работе был экспериментально получен восходящий закрученный поток воздуха при продуве через трубу малого диаметра. Поскольку диаметр трубы и скорость вертикального продува в ней были малы, то и окружная скорость течения воздуха под трубой оказалась малой. Для получения больших значений скоростей окружного движения необходимо использовать трубу большего диаметра и большую скорость продува. Речь идет о проведении более масштабного натурного эксперимента.

Численное построение решений полной системы уравнений Навье-Стокса [4-5; 8-9; 11; 13], описывающей трехмерные течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса, накладывает существенные ограничения на проведение численных экспериментов по детальному изучению возникающих сложных течений газа. Необходимость учета диссипативных свойств вязкости и теплопроводности движущейся сплошной среды даже при постоянных коэффициентах вязкости и теплопроводности связана со значительным усложнением системы уравнений, ограничениями на величины расчетных шагов по пространству и времени, а также возрастанием общего времени счета.

Одним из возможных способов сокращения времени расчета может быть изменение алгоритма численного решения полной системы уравнений Навье-Стокса — в частности, распараллеливание вычислительной процедуры для более эффективного использования ресурсов вычислительной системы.

Целью данной работы является распараллеливание вычислительного алгоритма для численного решения полной системы уравнений Навье-Стокса и проведение численных расчетов по детальному исследованию зависимости всех газодинамических характеристик от скорости вертикального продува воздуха в вертикальной трубе при проведении масштабного эксперимента.

Полная система уравнений Навье–Стокса. Начальные и граничные условия

Для описания сложных течений упругой сплошной среды, обладающей диссипативными свойствами вязкости и теплопроводности, в работе используется полная система уравнений Навье–Стокса, которая, будучи записанной в безразмерных переменных с учетом действия сил тяжести и Кориолиса в векторной форме, имеет следующий вид [5; 8-9]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0, \\ \vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \vec{V}) + \frac{3}{4} \Delta \vec{V} \right], \\ T_t + \vec{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ [(u_x - v_y)^2 + \right. \\ \left. + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2] + \frac{3}{2} [(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2] \right\}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где значения безразмерных коэффициентов вязкости и теплопроводности следующие: $\mu_0 = 0,001$, $\kappa_0 \approx 1,46\mu_0$.

В системе (1): t — время; x, y, z — декартовы координаты; ρ — плотность газа; $\vec{V} = (u, v, w)$ — вектор скорости газа с проекциями на соответствующие декартовы оси; T — температура газа; $\vec{g} = (0, 0, -g)$ — вектор ускорения силы тяжести, а $g = \text{const} > 0$; $-2\vec{\Omega} \times \vec{V} = (av - bw, -au, bu)$ — вектор ускорения силы Кориолиса, где $a = 2\Omega \sin \psi$, $b = 2\Omega \cos \psi$, $\Omega = |\vec{\Omega}|$; $\vec{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли; ψ — широта точки O (начала декартовой системы координат, вращающейся вместе с Землей).

В качестве начальных условий при описании соответствующих течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в случае постоянных значений коэффициентов вязкости и теплопроводности взяты функции, задающие точное решение [7] системы (1):

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad T_0(z) = 1 - kz, \quad \rho_0(z) = (1 - kz)^{\nu-1}, \quad (2)$$

где

$$k = \frac{l x_{00}}{T_{00}}, \quad l = 0.0065 \text{ К/м}, \quad x_{00} = 50 \text{ м}, \quad T_{00} = 288^\circ \text{ К}, \quad \nu = \frac{\gamma g}{k} = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Расчетная область представляет собой прямоугольный параллелепипед с длинами сторон $x^0 = 1$, $y^0 = 1$ и $z^0 = 0,04$ вдоль осей Ox , Oy и Oz соответственно. Для плотности на всех шести гранях параллелепипеда — $x = 0, x = x^0, y = 0, y = y^0, z = 0, z = z^0$ — ставится «условие непрерывности» потока [6]. Краевые условия для компонент вектора скорости газа соответствуют «условиям непротекания» для нормальной составляющей вектора скорости и «условиям симметрии» для двух других компонент вектора скорости. Для температуры на всех шести гранях задаются условия теплоизоляции [6]. Продув газа через вертикальную трубу моделируется заданием вертикальной скорости течения газа в зависимости от времени t в следующем виде:

$$w(t) = M \cdot [1 - \exp(-10t)] \quad (4)$$

через квадратное отверстие размером $0,1 \times 0,1$ в центре верхней грани расчетной области, где M — максимальная скорость продува. Расчеты проводились при следующих входных параметрах: масштабные размерные значения плотности, скорости, расстояния и времени равны соответственно $\rho_{00} = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $u_{00} = 333 \text{ м/с}$, $x_{00} = 50 \text{ м}$, $t_{00} = x_{00} / u_{00} = 0,15 \text{ с}$.

Разностные шаги по трем пространственным переменным $\Delta x = \Delta y = 0,005$ (размерное значение $0,25 \text{ м}$), $\Delta z = 0,004$ (размерное значение $0,2 \text{ м}$), а шаг по времени $\Delta t = 0,001$ (размерное значение $0,00015 \text{ с}$).

Для реализации программы численного решения полной системы уравнений Навье-Стокса на каждом шаге по времени в параллельном режиме была использована библиотека Task Parallel Library (TPL) на платформе .NET Framework 4.0 с использованием языка программирования C#. Использование указанной библиотеки считается предпочтительным способом работы с потоками, поскольку она динамически масштабирует степень параллелизма для наиболее эффективного использования всех доступных процессоров [12; 16]. Для расчета значений газодинамических функций во внутренних точках расчетной области используется механизм распараллеливания вычислений. Механизм применяется к измерению z . Максимальное количество возможных создаваемых потоков равняется N — количеству расчетных шагов по вертикальной пространственной переменной.

Для каждой конфигурации компьютера определяется количество процессоров и создается соответствующее количество потоков. Расчет распределяется между доступными потоками. После того, как потоки закончили расчет одной части расчетной области, они переходят к следующей, и так пока не будут обработаны все внутренние точки на текущем шаге по времени. В процессе расчета значений функций во внутренних точках n -го шага по времени используются данные в соответствующих внутренних точках с предыдущего $n-1$ шага, а расчет граничных условий на конкретном шаге по времени требует данных с текущего шага. Массивы для хранения данных создаются таким образом, что для z каждый элемент является отдельным объектом, и каждый поток расчета работает в рамках одного объекта, поэтому не возникает случаев взаимоблокировки одного объекта в процессе расчета. После завершения расчета всех граничных условий происходит смена массивов с «текущих» на «предыдущие». Далее через указанные интервалы времени происходит сохранение массивов на жесткий диск. Процесс выполняется отдельно от расчета отдельным потоком, чтобы потоки расчета не ожидали завершения записи файлов на диск.

Результаты расчетов

Распараллеленный алгоритм расчета был использован для проведения расчетов всех газодинамических характеристик трехмерных нестационарных течений вязкого теплопроводного газа в восходящих закрученных потоках для пяти значений скорости продува. На рис. 1 представлены результаты расчета мини-

мальных безразмерных значений плотности, температуры и давления газа, возникающих в центральной части расчетного параллелепипеда к моменту выхода потока на стационарный режим для пяти различных безразмерных значений вертикальной скорости продува w .

Из расчетов следует, что все три термодинамические характеристики с ростом скорости продува нелинейно уменьшаются по степенной зависимости. Минимальная плотность газа меняется от значения 0,9994 при скорости 0,003 до значения 0,9682 при скорости 0,027. Аналитический вид зависимости плотности газа от скорости продува имеет вид $\rho(w) = a + bw^c$, где $a = 0,9993$, $b = -878,66$, $c = 2,8399$. Значения минимальной температуры изменяются от 0,9968 до 0,8791 по закону $T(w) = a + bw^c$, где $a = 0,9975$, $b = -1015,75$, $c = 2,5093$. Минимальное значение давления изменяется от 0,9962 до 0,8512 при тех же значениях скорости продува по закону $p(w) = a + bw^c$, где коэффициенты степенной функции имеют значения $a = 0,9968$, $b = -3338,93$, $c = 2,5271$. Для всех значений скорости продува давление газа практически совпадает с произведением плотности на температуру. На рис. 2 приведены результаты расчета безразмерных максимальных значений вертикальной и двух других компонент скорости течения газа в центральной части расчетного параллелепипеда после

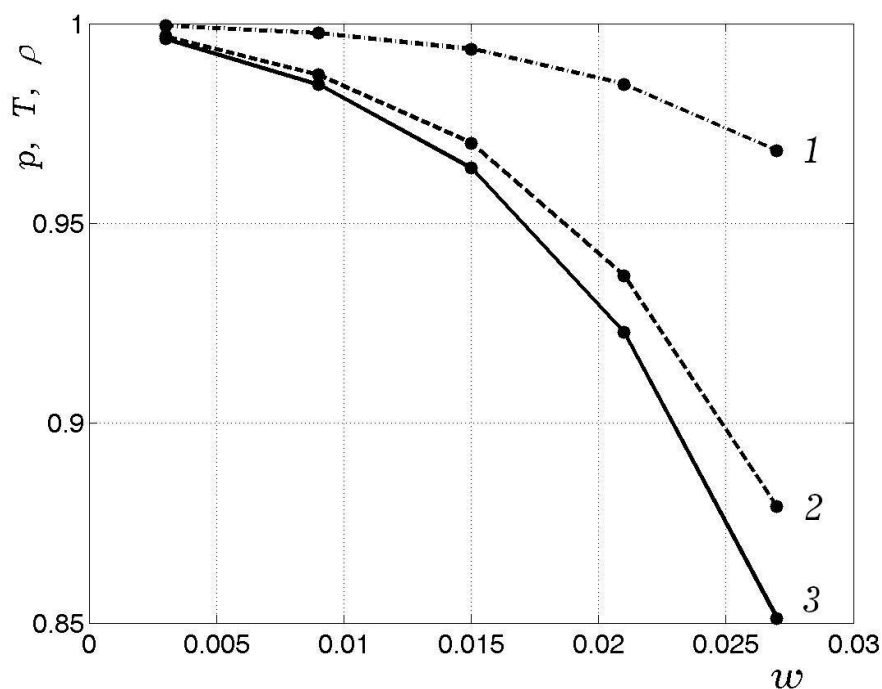


Рис. 1. Зависимость минимальных безразмерных значений от скорости продува: 1 — плотность, 2 — температура, 3 — давление

Fig. 1. The dependence of minimal dimensionless values on the vent speed: 1 — density, 2 — temperature, 3 — pressure

выхода на стационарный режим течения для тех же пяти значений скорости продува.

Из расчетов следует, что максимальное значение вертикальной скорости течения газа в восходящем закрученном потоке практически линейно возрастает от значения 0,0015 до значения 0,0139 при увеличении скорости продува. Максимальные же безразмерные значения скоростей u , v совпадают друг с другом и с ростом скорости продува их изменение заметно отличается от линейного. Это изменение может быть описано также степенной функцией $u(w) = a + bw^c$, где коэффициенты $a = 0,0067$, $b = 33,3521$, $c = 1,4819$. Эти две компоненты скорости течения газа фактически являются окружной скоростью вращения потока газа. Численные значения окружной скорости изменяются от 0,0122 до 0,1652.

На рис. 3 представлены графики зависимости от скорости продува w рассчитанных безразмерных значений для двух видов энергии восходящего закрученного потока после выхода на стационарный режим.

Сплошная линия соответствует полной W кинетической энергии, а пунктирная линия — вращательной W_{φ} кинетической энергии движения потока газа. Для двух видов кинетической энергии характерен нелинейный характер зависимости от скорости продува газа, который можно описать степенной функцией $W(w) = a + bw^c$ со значениями коэффициентов $a = 5,85 \cdot 10^{-6}$, $b = 395,6199$, $c = 3,7436$. Кроме того, вклад кинетической энергии вращательного

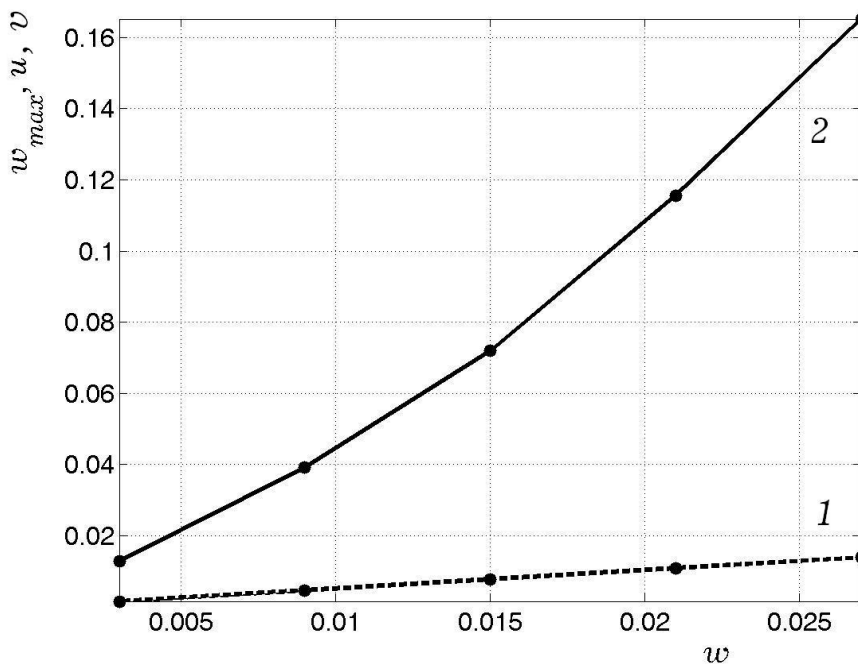


Рис. 2. Зависимость максимальных безразмерных скоростей течения газа от скорости продува: 1 — w_{max} , 2 — u , v

Fig. 2. The dependence of maximum dimensionless values on the vent speed: 1 — w_{max} , 2 — u , v

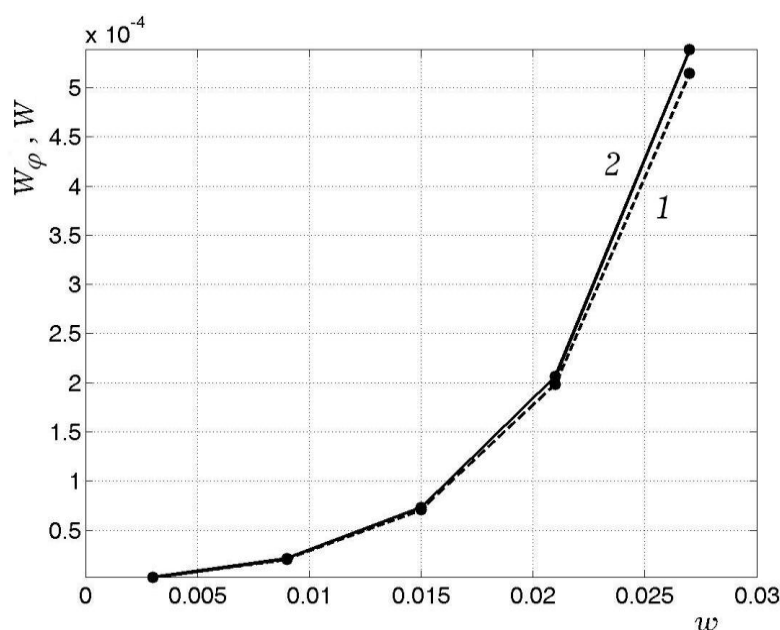


Рис. 3. Зависимость от скорости продува максимальных безразмерных значений полной W кинетической энергии (2) и вращательной W_φ кинетической энергии (1) движения потока газа

Fig. 3. The dependence of the maximum dimensionless values of full W (2) and rotational W_φ (1) kinetic energies of the gas flow on the vent speed

движения в полную кинетическую энергию всего восходящего закрученного потока составляет 96%.

Выводы

Благодаря предложенной методике распараллеливания алгоритма при численном решении полной системы уравнений Навье-Стокса в данной работе проведен обширный численный эксперимент по изучению зависимости газодинамических характеристик восходящего закрученного потока от скорости вертикального продува. Подобные зависимости имеют принципиальное значение для формулирования конкретных предложений для проведения масштабного натурного эксперимента по созданию восходящего закрученного потока, инициированного вертикальным продувом газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдубакова Л. В. Численный расчет скоростных характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа / Л. В. Абдубакова, А. Г. Обухов // Известия вузов. Нефть и газ. 2014. № 3. С. 88-94.

2. Абдубакова Л. В. Численный расчет термодинамических параметров закрученного потока газа, инициированного холодным вертикальным продувом / Л. В. Абдубакова, А. Г. Обухов // Известия вузов. Нефть и газ. 2014. № 5. С. 57-62.
3. Абдубакова Л. В. Расчет плотности, температуры и давления трехмерного восходящего закрученного потока газа при вертикальном продуве / Л. В. Абдубакова, А. Г. Обухов // Нефтегазовое дело. 2014. Том 12. № 3. С. 116-122.
4. Баутин С. П. Экспериментальное подтверждение возможности создания потока воздуха, закрученного силой Кориолиса / С. П. Баутин, К. В. Баутин, В. Н. Макаров // Вестник УрГУПС. 2013. № 2(18). С. 27-33.
5. Баутин С. П. Представление решений системы уравнений Навье-Стокса в окрестности контактной характеристики / С. П. Баутин // Прикладная математика и механика. 1987. Том 51. № 4. С. 574-584.
6. Баутин С. П. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей / С. П. Баутин, А. Г. Обухов. Новосибирск: Наука. 2012. 152 с.
7. Баутин С. П. Математическое моделирование и численный расчет течений в придонной части тропического циклона / С. П. Баутин, А. Г. Обухов // Вестник Тюменского государственного университета. 2012. № 4. С. 175-183.
8. Баутин С. П. Математическое моделирование придонной части восходящего закрученного потока / С. П. Баутин, А. Г. Обухов // Теплофизика высоких температур. 2013. Том 51. № 4. С. 567-570. DOI: 10.7868/S0040364413020038
9. Баутин С. П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов, К. В. Баутин. Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013. 215 с.
10. Баутин С. П. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики / С. П. Баутин, А. Г. Обухов // Известия вузов. Нефть и газ. 2013. № 4. С. 81-86.
11. Баутин С. П. Об одном виде краевых условий при расчете трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа / С. П. Баутин, А. Г. Обухов // Известия вузов. Нефть и газ. 2013. № 5. С. 55-63.
12. Библиотека параллельных задач (TPL). URL: <https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/dd460717>
13. Обухов А. Г. Численный расчет термодинамических характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа / А. Г. Обухов, Л. В. Абдубакова // Вестник Тюменского государственного университета. 2014. № 7. С. 157-165.
14. Обухов А. Г. Численный расчет скоростных характеристик закрученного потока газа, инициированного холодным вертикальным продувом / А. Г. Обухов, Л. В. Абдубакова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 2(2). С. 124-130.
15. Обухов А. Г. Математическое моделирование и численные расчеты течений в придонной части торнадо / А. Г. Обухов // Вестник Тюменского государственного университета. 2012. № 4. С. 183-189.
16. Параллельное программирование с помощью языка C#. URL: <http://www.microsoftvirtualacademy.com/training-courses/parallel-programming-c-sharp-rus>

Roman E. VOLKOV¹
Alexander G. OBUKHOV²

THE STUDY OF RISING SWIRLING FLOW PARAMETERS' DEPENDENCE ON THE VENT SPEED¹

¹ Post-Graduate Student,
Department of Algebra and Mathematical Logic,
Tyumen State University
email@romanvolkov.ru

² Dr. Sci. (Phys-Math.), Professor,
Industrial University of Tyumen
aobukhov@tsogu.ru

Abstract

The need to consider the dissipative properties of viscosity and thermal conductivity of the moving continuum for numerical construction of complete system solutions of the Navier-Stokes equations describing the three-dimensional flow of a compressible viscous heat-conducting gas under the action of gravity and Coriolis significantly complicates the numerical experiments on a detailed study of a complicated gas flows. First of all, this affects the sharp increase in computation time. Parallelization of computational procedure can reduce the required time and significantly optimize the computational algorithm for more efficient use of the resources of the computer system.

The aim of this paper is to describe the procedure of parallelization of computational algorithm for the numerical solution of the full Navier-Stokes equations and description of the results of numerical experiments on a detailed investigation of the dependence of all gas-dynamic characteristics of the velocity of the vertical air blowing in a vertical pipe during a large-scale experiment.

¹ The study is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no 3023).

Citation: Volkov R. E., Obukhov A. G. 2016. "The Study of Rising Swirling Flow Parameters' Dependence on The Vent Speed". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 2, no 3, pp. 24-34.
DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-3-24-34

Keywords

System of gas dynamics equations, complete system of Navier-Stokes equations, boundary conditions.

DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-3-24-34

REFERENCES

1. Abdubakova L. V., Obukhov A. G. 2014. "Chislenny raschet skorostnykh kharakteristik trekhmernogo voskhodyashchego zakruchennogo potoka gaza" [Numerical Calculation of Three-Dimensional Velocity Characteristics of the Rising Swirling Flow of Gas]. Higher Educational Institutions News. Oil and Gas, no 3, pp. 88-94.
2. Abdubakova L. V., Obukhov A. G. 2014. "Chislenny raschet termodinamicheskikh parametrov zakruchennogo potoka gaza, initsirovannogo kholodnym vertikal'nym produvom" [The Numerical Calculation of the Thermodynamic Parameters of Swirling Gas Flow Initiated by Blowing Cold Vertical]. Higher Educational Institutions News. Oil and Gas, no 5, pp. 57-62.
3. Abdubakova L. V., Obukhov A. G. 2014. "Raschet plotnosti, temperatury i davleniya trekhmernogo voskhodyashchego zakruchennogo potoka gaza pri vertikal'nom produve" [Calculation of Density, Temperature and Three-Dimensional Ascending Swirling Flow of Gas Pressure in the Vertical Blow in the Potash]. Oil and Gas Business, vol. 12, no 3, pp. 116-122.
4. Bautin S. P., Bautin K. V., Makarov V. N. 2013. "Eksperimental'noe podtverzhenie vozmozhnosti sozdaniya potoka vozdukh, zakruchennogo siloy Koriolisa" [Experimental Confirmation of the Possibility of Creating an Air Flow Swirling Coriolis Force]. Herald of the Ural State University of Railway Transport, no 2(18), pp. 27-33.
5. Bautin S. P. 1987. "Predstavlenie resheniy sistemy uravneniy Nav'e-Stoksa v okrestnosti kontaktnoy kharakteristiki" [Presentation of Solutions to the Navier-Stokes Equations in the Neighborhood of the Contact Data]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, vol. 51, no 4, pp. 574-584.
6. Bautin S. P., Obukhov A. G. 2012. "Matematicheskoe modelirovanie razrushitel'nykh atmosferynykh vikhrey" [Mathematical Modeling Destructive Atmospheric Vortices]. Novosibirsk: Nauka.
7. Bautin S. P., Obukhov A. G. 2012. "Matematicheskoe modelirovanie i chislenny raschet techeniy v pridonnoy chasti tropicheskogo tsyklona" [Mathematical Modeling and Numerical Simulation of Flows in the Bottom Part of the Tropical Cyclone]. Tyumen State University Herald. Fiziko-matematicheskie nauki. Informatika, no 4, pp. 175-183.
8. Bautin S. P., Obukhov A. G. 2013. "Matematicheskoe modelirovanie pridonnoy chasti voskhodyashchego zakruchennogo potoka" [Mathematical Modeling of the Bottom Portion of the Ascending Swirling Flow]. High Temperature, vol. 51, no 4, pp. 567-570. DOI: 10.7868/S0040364413020038
9. Bautin S. P., Krutova I. Y., Obukhov A. G., Bautin K. V. 2013. Razrushitel'nye atmosferynye vikhri: teoremy, raschety, eksperimenty [Destructive Atmospheric Vortices: Theorem, Calculations, Experiments]. Novosibirsk: Nauka; Yekaterinburg: Izd USURT.

10. Bautin S. P., Obukhov A. G. 2013. "Oдно tochnoe stacionarnoe reshenie sistemy uravneniy gazovoy dinamiki" [One Exact Stationary Solution of the Equations of Gas Dynamics]. Higher Educational Institutions News. Oil and Gas, no 4, pp. 81-86.
11. Bautin S. P., Obukhov A. G. 2013. "Ob odnom vide kraevykh usloviy pri raschete trekhmernykh nestatsionarnykh techeniy szhimaemogo vyzkogo teploprovodnogo gaza" [A Form of the Boundary Conditions in the Calculation of Three-Dimensional Unsteady Compressible Viscous Heat-Conducting Gas]. Higher Educational Institutions News. Oil and Gas, no 5, pp. 55-63.
12. Biblioteka parallel'nykh zadach (TPL) [The Task Parallel Library (TPL)]. <https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/dd460717>
13. Obukhov A. G., Abdubakova L. V. 2014. "Chislennyy raschet termodinamicheskikh kharakteristik trekhmernogo voskhodyashchego zakruchennogo potoka gaza" [The Numerical Calculation of the Thermodynamic Characteristics of the Three-Dimensional Swirling Flow of Gas Rising]. Tyumen State University Herald. Fiziko-matematicheskie nauki. Informatika, no 7, pp. 157-165.
14. Obukhov A. G., Abdubakova L. V. 2015. "Chislennyy raschet skorostnykh kharakteristik zakruchennogo potoka gaza, initsirovannogo kholodnym vertikal'nym produvom" [Numerical Calculation Speed Characteristics of Swirling Gas Flow, Initiated by Blowing Cold Vertical]. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 1, no 2(2), pp. 124-130.
15. Obukhov A. G. 2012. "Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye raschety techeniy v pridonnoy chasti tornado" [Mathematical Modeling and Numerical Calculations of the Currents in the Bottom Part of the Tornado]. Tyumen State University Herald. Fiziko-matematicheskie nauki. Informatika, no 4, pp. 183-189.
16. Parallel'noe programmirovaniye s pomoshch'yu yazyka C# [Parallel programming using the language C#]. <http://www.microsoftvirtualacademy.com/training-courses/parallel-programming-c-sharp-rus>