

Александр Иванович ФИЛИППОВ¹
Оксана Валентиновна АХМЕТОВА²
Алексей Алексеевич КОВАЛЬСКИЙ³
Марат Радикович ГУБАЙДУЛЛИН⁴

УДК 532.546

ЗАДАЧА О ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К СКВАЖИНЕ, НЕСОВЕРШЕННОЙ ПО ВСКРЫТИЮ ПЛАСТА*

¹ доктор технических наук,
профессор кафедры общенаучных дисциплин,
Салаватский филиал Уфимского государственного
нефтяного технического университета;
профессор кафедры общей и теоретической физики,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
filiprovai@rambler.ru

² доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой общей и теоретической физики,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
ahoksana@yandex.ru

³ кандидат физико-математических наук, директор,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
aakov68@mail.ru

⁴ младший научный сотрудник,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
fir_bmf@mail.ru

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
(грант № 17-48-020517).

Цитирование: Филиппов А. И. Задача о притоке жидкости к скважине, несовершенной по вскрытию пласта / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский, М. Р. Губайдуллин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Том 5. № 3. С. 97-117.
DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-97-117

Аннотация

Статья посвящена исследованию фильтрационных потоков, возникающих при отборе углеводородов из пластов-коллекторов, вскрытых неидеально. Рассмотрена задача о поле давления в однородном изолированном изотропном коллекторе, перфорированном в диапазоне, полностью содержащемся в интервале пласта, имеющего значительную общую толщину.

Для построения аналитического асимптотического решения однослойная исходная задача заменена эквивалентной трехслойной симметричной, включающей уравнения пьезопроводности для перфорированного, а также покрывающего и подстилающего неперфорированных слоев, начальные и граничные условия; на условной границе перфорированного и неперфорированных слоев заданы условия равенства давлений и потоков (условия сопряжения). Решение задачи полагается регулярным, т. е. значение искомой функции, а при необходимости и ее производной, на бесконечности равны нулю. Задача сформулирована в безразмерных величинах для функций отклонения давления от его невозмущенного распределения, нормированных на амплитудное значение депрессии. Для решения задачи использован развитый авторами асимптотический метод формального параметра. Решение задач для нулевого и первого коэффициентов асимптотического разложения найдено в пространстве изображений Лапласа — Карсона по переменной t .

На основе полученных формул и закона Дарси построены графические зависимости для вертикальной и горизонтальной компонент скорости флюида, фильтрующегося из периферии к скважине.

Вычислительный эксперимент свидетельствует, что на выходе в скважину в перфорированной части пласта отсутствуют вертикальные потоки, а при удалении от скважины они отличны от нуля, что доказывает наличие межслойных перетоков даже в однородных несовершенно вскрытых пластах. В центре перфорированного слоя такие перетоки отсутствуют, поскольку поперечная компонента скорости обращается в нуль. В то же время приток в несовершенно вскрытом однородном пласте является неравномерным, а максимум модуля горизонтальной компоненты скорости на всех кривых достигается на границе интервала перфорации.

Ключевые слова

Фильтрация, несовершенство вскрытия, двухмерное течение, асимптотическое разложение, поле давления, асимптотический метод формального параметра, вычислительный эксперимент.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-97-117

Одной из важнейших теоретических проблем нефтедобычи является учет несовершенства вскрытия пластов. Совершенное вскрытие означает отсутствие неперфорированных зон в интервале перфорации, совпадение верхней и нижней отметок интервала перфорации с границами проницаемого пласта и т. п. Несо-

вершенство вскрытия может приводить к наличию застойных зон и тем самым к снижению продуктивности пласта и коэффициента нефтеизвлечения.

В данной статье обсуждается проблема неидеального вскрытия, вызванного несовпадением интервала перфорации с границами проницаемого насыщенного пласта. Причиной такого несовпадения чаще всего являются погрешности технологического процесса перфорации и проблемы привязки результатов геофизических исследований к разрезу, объясняющиеся неконтролируемым растяжением кабеля в процессе записи геофизических кривых.

В рассматриваемом случае движение жидкости в непосредственной близости к скважине не является плоскорадиальным, поэтому заложенные в основу разработки простейшие поля течения [4, 10, 12] в таких условиях неприменимы. Ввиду сложности и практической значимости задача о притоке жидкости к скважине, эксплуатирующей несовершенно вскрытый пласт, традиционно представляет научный и практический интерес, поэтому значительное количество классических и современных работ посвящено ее решению. Существующие математические модели ориентированы на исследование полей скоростей и давления в таких условиях [2, 3, 5, 11, 13].

Особый интерес представляет решение задачи о распределении давления в частично вскрытом пласте, поскольку оно позволяет оценить выработку не-вскрытых зон.

На рис. 1 представлена геометрия задачи. Рассматривается однородный изотропный пласт, локализованный в интервале от $-H_1$ до H_2 . Пласт перфорирован в диапазоне $-h < z_d < h$. Для простоты радиальное течение заменим плоским, которое сохраняет все основные закономерности радиального течения в пласте. Кроме того, рассмотрение плоского течения создает дополнительные удобства, поскольку позволяет упростить исследование режима течения при заданной депрессии на пласт.

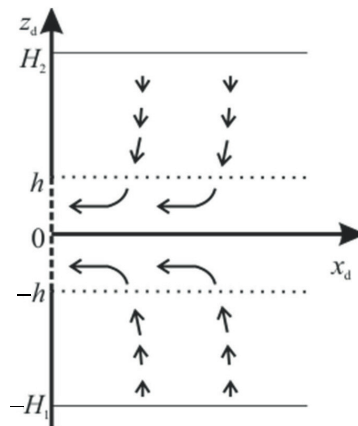


Рис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. Geometry of the problem

Для математической формулировки задачи условно разделим рассматриваемое пространство на три зоны плоскостями $z_d = \pm h$. Физические свойства полагаем одинаковыми во всех зонах. Условия сопряжения на границе раздела представим равенством давлений и нормальных компонент скоростей фильтрации. Нетрудно заметить, что такая задача полностью эквивалентна однозонной исходной задаче. В неперфорированных зонах горизонтальные потоки ослаблены, поскольку на линии z_d при $x_d = 0$ задано условие изолированности. По этой причине в неперфорированных областях преобладают вертикальные потоки, что позволяет опустить вторую производную по x_d в уравнениях для указанных зон, в связи с чем существенно упрощается теоретический анализ процессов. Физически это означает, что изотропная по проницаемости среда в неперфорированных слоях заменяется неизотропной, горизонтальная компонента проницаемости которой равна нулю. Вертикальная компонента проницаемости в этой зоне совпадает с проницаемостью однородной среды.

Рассмотрен предельный случай, когда толщина перфорированной зоны много меньше неперфорированных толщин. Это позволяет устремить внешние изолированные границы пласта к бесконечности и считать геометрию задачи симметричной относительно оси x_d или $z_d = 0$. Рассмотрен квазистационарный случай, когда производная по времени в уравнении пьезопроводности для перфорированной зоны отсутствует.

1. Формулировка задачи

Включает уравнение пьезопроводности для не вскрытых перфорацией интервалов, в которых преобладает вертикальный градиент давления. Поскольку задача является симметричной, то рассмотрена только область $z_d > h$, а по оси x_d пласт считается полубесконечным:

$$\frac{\partial P_{d1}}{\partial \tau} - \chi \frac{\partial^2 P_{d1}}{\partial z_d^2} = 0, \quad z_d > h, \quad \tau > 0. \quad (1.1)$$

Поле давления в центральной перфорированной зоне описывается уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2 P_d}{\partial x_d^2} + \frac{\partial^2 P_d}{\partial z_d^2} = 0, \quad 0 < z_d < h, \quad x_d > 0. \quad (1.2)$$

Поля P_d и P_{d1} в уравнениях (1.1) и (1.2) представляют отклонения давления от невозмущенного.

Условие симметрии заключается в равенстве нулю производной от давления по вертикальной координате, что соответствует отсутствию вертикальных фильтрационных потоков на оси x_d :

$$\left. \frac{\partial P_d}{\partial z_d} \right|_{z_d=0} = 0. \quad (1.3)$$

На условной границе раздела слоев заданы условия сопряжения:

$$P_{d1}|_{z_d=h} = P_d|_{z_d=h}, \quad \frac{\partial P_{d1}}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h} = \frac{\partial P_d}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h}. \quad (1.4)$$

Рассматривается режим заданной депрессии:

$$P_d|_{x_d=0} = -P_0. \quad (1.5)$$

Условие изолированности в скважине в интервале неперфорированных слоев $\frac{\partial P_{d1}}{\partial x_d} \Big|_{x_d=0} = 0$, $z_d > h$ выполняется автоматически.

В удаленных от забоя скважины участках и в начальный момент времени возмущения давления отсутствуют:

$$P_{d1}|_{x_d \rightarrow \infty} = 0, \quad P_d|_{x_d \rightarrow \infty} = 0, \quad (1.6)$$

$$P_{d1}|_{\tau \rightarrow 0} = 0. \quad (1.7)$$

Отметим, что к задаче (1.1)-(1.7) применим асимптотический метод, развитый в [6, 8, 9].

Безразмерные критерии задачи

$$t = \frac{\tau \chi}{h^2}, \quad x = \frac{x_d}{h}, \quad z = \frac{z_d}{h}, \quad P_j = \frac{P_{dj}}{P_0}$$

позволяют представить (1.1)-(1.7) как

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad t > 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (1.10)$$

$$P_1|_{z=1} = P|_{z=1}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad (1.11)$$

$$P|_{x=0} = -1, \quad (1.12)$$

$$P|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad (1.13)$$

$$P_1|_{\tau \rightarrow 0} = 0. \quad (1.14)$$

Здесь функции P_1 и P описывают отклонение давления от его невозмущенного распределения, нормированное на амплитудное значение депрессии. Для решения задач такого рода целесообразно воспользоваться асимптотическим методом, реализация которого требует введения параметра разложения.

2. Асимптотическое разложение по формальному параметру

Параметризация задачи (1.8)-(1.14) осуществлена добавлением множителя $1/\varepsilon$ перед производными функции P по координате z . Параметризованная таким образом задача включает исходную, поскольку ее постановки и решение следуют из параметризованной, если положить $\varepsilon = 1$.

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \quad (2.2)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (2.3)$$

$$P_1|_{t=0} = 0, \quad P|_{x=0} = -1, \quad (2.4)$$

$$P_1|_{z=1} = P_{z=1}, \quad \left. \frac{\partial P_1}{\partial z} \right|_{z=1} = \frac{1}{\varepsilon} \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=1}. \quad (2.5)$$

Решение задачи (2.1)-(2.5) полагается регулярным на бесконечности $P|_{x \rightarrow \infty} = 0$. В каждой из областей это решение отыскивается в виде асимптотической формулы, представленной степенным разложением по формальному параметру ε [7]:

$$P = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \dots + \varepsilon^n P^{(n)} + \theta^{(n)}, \quad P_1 = P_1^{(0)} + \varepsilon P_1^{(1)} + \dots + \varepsilon^n P_1^{(n)} + \theta_1^{(n)}. \quad (2.6)$$

Здесь функция θ представляет остаточный член. Верхний индекс (в скобках) у коэффициентов разложения и остаточного члена обозначает порядковый номер, а нижний — номер слоя.

Подставив функции P_1 и P в виде асимптотического разложения (2.6) в задачу (2.1)-(2.5) и осуществив группировку слагаемых с одинаковыми степенями формального параметра ε , представим задачу как

$$\frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad t > 0, \quad z > 1, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{(2)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1, \quad (2.8)$$

$$\left. \frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=0} + \varepsilon \left. \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=0} + \dots = 0, \quad (2.9)$$

$$P_1^{(0)}|_{t=0} + \varepsilon P_1^{(1)}|_{t=0} + \dots = 0, \quad P^{(0)}|_{x=0} + \varepsilon P^{(1)}|_{x=0} + \dots = -1, \quad (2.10)$$

$$P^{(0)}|_{z=1} + \varepsilon P^{(1)}|_{z=1} + \dots = P_1^{(0)}|_{z=1} + \varepsilon P_1^{(1)}|_{z=1} + \dots,$$

$$\left. \frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} + \varepsilon \left(\left. \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \left. \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} \right) + \dots = 0. \quad (2.11)$$

Сомножители при ε и ε^2 в (2.8) выражаются через коэффициенты асимптотического разложения, отличающиеся значением верхнего индекса на единицу, т. е. соседние коэффициенты. Это означает, что постановки коэффициентных задач являются «зацепленными». Для расцепления решения задачи реализована специально разработанная процедура.

3. Постановка гидродинамической задачи в нулевом приближении

При $\varepsilon = 0$ из (2.8) получим уравнение $\partial^2 P^{(0)}/\partial z^2 = 0$, в результате интегрирования которого заключаем, что первая производная не зависит от координаты z и представляется как $\partial P^{(0)}/\partial z = A(x, t)$. С учетом граничных условий (2.11) получим $A(x, t) = 0$. На этом основании заключаем, что нулевое приближение искомого поля давления является функцией от пространственной координаты x и времени t как параметра из внешней области: $P^{(0)} = P^{(0)}(x, t)$.

Найденное таким образом свойство широко используется для построения искомого решения, поскольку означает, что значения давления в перфорированном интервале $P^{(0)}(x, t)$ не зависят от вертикальной координаты или одинаковы во всех точках параллельного оси z сечения перфорированного слоя пласта. Это является следствием физического содержания формального добавления пара-

метра ε , согласно которому при устремлении ε к нулю вертикальный градиент давления в перфорированной зоне пласта также стремится к нулю.

Поскольку поле давления в нулевом приближении в центральной зоне не зависит от вертикальной координаты, то выражение для второго коэффициента в разложении (2.8) представимо в виде:

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} = E(x, t), \quad (3.1)$$

где подлежащий определению коэффициент $E(x, t)$, как и поле давления в нулевом приближении $P^{(0)}(x, t)$, не зависит от вертикальной координаты z .

Использование функциональных коэффициентов путем последовательного интегрирования (3.1) позволяет представить выражение для вертикальной компоненты градиента поля давления в первом приближении $P^{(1)}$ и соотношение для $P^{(1)}$ в виде полиномов по вертикальной координате z :

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} = z E(x, t) + F(x, t), \quad (3.2)$$

$$P^{(1)} = \frac{z^2}{2} E(x, t) + z F(x, t) + Q(x, t). \quad (3.3)$$

Из условия симметрии следует, что функциональный коэффициент $F(x, t)$ обращается в нуль:

$$\left. \frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=0} = F(x, t) = 0. \quad (3.4)$$

Равенство нормальных производных на условной границе раздела слоев (2.11) с помощью (3.2) представим через функциональные коэффициенты как

$$\left. \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} = E(x, t) + F(x, t).$$

Отсюда с учетом (3.4) заключаем, что коэффициент $E(x, t)$ позволяет учесть массообмен между перфорированным и неперфорированным слоями, поскольку представляет след вертикальной компоненты градиента поля давления в нулевом приближении из внешней области:

$$E(x, t) = \left. \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1}. \quad (3.5)$$

Уравнение для поля давления центрального перфорированного слоя содержит коэффициенты асимптотического разложения только нулевого порядка, т. е. является расцепленным:

$$\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1. \quad (3.6)$$

Оно получено исключением из выражений (3.1) и (3.5) величины $E(x, t)$.

Это уравнение дополняется одномерным уравнением пьезопроводности для окружающей среды:

$$\frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad t > 0, \quad z > 1. \quad (3.7)$$

Равенство давлений в нулевом приближении на границе слоев представляет условие сопряжения:

$$P^{(0)} = P_1^{(0)} \Big|_{z=1}. \quad (3.8)$$

Знак минус перед единицей в граничном условии означает, что величина депрессии при отборе из пласта представляется положительным значением

$$P^{(0)} \Big|_{x=0} = -1, \quad P_1^{(0)} \Big|_{t=0} = 0, \quad (3.9)$$

а значения нулевого коэффициента в начальный момент времени приняты за начало отсчета поля возмущений.

Выражения (3.6)-(3.9) представляют полную постановку задачи, которая описывает искомое поле давления $P^{(0)}$, $P_1^{(0)}$ в несовершенном вскрытом пласте в нулевом приближении.

Путем интегрального усреднения исходной задачи в перфорированном слое $0 < z < 1$ показано, что выражения (3.6)-(3.9) с точностью до обозначений совпадают с осредненной задачей для поля давления. Это позволяет интерпретировать нулевое приближение $P^{(0)}$ как некоторое осредненное по толщине перфорированного слоя поле давления.

Решение задачи найдено в пространстве изображений Лапласа — Карсона по переменной t . Переход в пространство оригиналов осуществлен с использованием таблиц [1].

$$P^{(0)} = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) d\tau, \quad (3.10)$$

$$P_1^{(0)} = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{z-1}^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau-z+1}}\right) d\tau. \quad (3.11)$$

Полученное решение показывает, что вертикальными различиями давления при фиксированных x и t в перфорированном интервале в нулевом приближении можно пренебречь. Основные вертикальные перепады сосредоточены в неперфорированных слоях. Это означает, что в перфорированном пласте преобладают горизонтальные потоки, в то время как в неперфорированных интервалах, как и предполагалось, — вертикальные.

Построение зависимости давления в перфорированном интервале от вертикальной координаты приводит к краевой задаче для отыскания первого асимптотического коэффициента разложения поля давления по параметру ε в несовершенном вскрытом пласте.

4. Поле давления в первом асимптотическом приближении

Для построения поля давления в первом приближении необходимо решение задачи для первого коэффициента асимптотического разложения поля давления по формальному параметру. Математическая формулировка этой задачи следует из выражений (2.7)-(2.11):

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad t > 0, \quad z > 1, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{(2)}}{\partial z^2} = 0, \quad x > 0, \quad |z| < 1, \quad (4.2)$$

$$P_1^{(1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad P^{(1)} \Big|_{x=0} = 0, \quad (4.3)$$

$$P^{(1)} \Big|_{z=1} = P_1^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1}. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.2) и условие (4.4) содержат коэффициенты первого и второго порядков разложения поля давления, т. е. задача для первого коэффициента содержит зацепленные уравнения. Процедура расщепления задачи для первого коэффициента поля давления, в сравнении с нулевым, содержит более существенные трудности, поскольку требует учета зависимости этого коэффициента от координаты z .

На структуру решения наложены дополнительные ограничения на вид искомого решения, которое, согласно выражениям (3.3)-(3.6), должно иметь полиномиальное по координате z выражение

$$P^{(1)} = -\chi \frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} \frac{z^2}{2} + Q(x, t) \quad (4.5)$$

с неизвестным функциональным коэффициентом $Q(x, t)$, подлежащим определению.

Для расщепления уравнения (4.2) осуществим подставку в него выражения (4.5). В результате последующего интегрирования полученного выражения представим его как

$$\frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} = \chi \frac{\partial^4 P^{(0)}}{\partial x^4} \frac{z^3}{6} - \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} z + R(x,t).$$

Из равенства нулю производной при $z = 0$, согласно (2.9), следует, что коэффициент $R(x, t)$ обращается в нуль: $R(x, t) = 0$.

Далее, воспользовавшись (4.4), получим соотношение, связывающее только первый и нулевой и коэффициенты разложения, последний из которых уже определен:

$$\left. \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} \right|_{z=1} = \frac{\chi}{6} \frac{\partial^4 P^{(0)}}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} = \left. \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1}. \quad (4.6)$$

Квазистационарное уравнение для первого коэффициента разложения поля давления $P^{(1)}$ в несовершенном вскрытом пласте

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{\chi} \left. \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1} = -\frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^4 P^{(0)}}{\partial x^4}, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1 \quad (4.7)$$

содержит функцию источников, определяющуюся с помощью уже найденного нулевого коэффициента. Оно получено путем подстановки в (4.6) значения для $Q(x, t)$, выраженного из (4.5). Наличие следа производной из внешней области, представленное вторым слагаемым в левой части (4.7), свидетельствует о том, что рассматриваемая задача относится к неклассическим задачам сопряжения.

Задача для первого коэффициента разложения поля давления $P^{(1)}$ включает также уравнение для неперфорированного слоя

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad t > 0, \quad z > 1, \quad (4.8)$$

начальное условие

$$P_1^{(1)} \Big|_{t=0} = 0 \quad (4.9)$$

и выражение для равенства значений поля давления на условной границе

$$P^{(1)} \Big|_{z=1} = P_1^{(1)} \Big|_{z=1}. \quad (4.10)$$

Задача для первого коэффициента поля давления (4.7)-(4.10) с учетом его представления в виде (4.5) имеет множество решений, т. е. не удовлетворяет

условию единственности. Однако если к ней добавить условие равенства поля давления нулю на левой границе из (4.3), то единственное решение становится тривиальным, которое тоже не удовлетворяет поставленным целям. Дальнейшая процедура постановки задачи для $P^{(1)}$ сводится к ослаблению тривиального условия и поиску заменяющего его нелокального среднеинтегрального условия. Применимость использованных ниже преобразований допустима из-за наличия погранслоя на линии $x = 0$, $0 < z < 1$, что характерно для асимптотических разложений. Последующее построение погранслойных функций позволяет обеспечить выполнение условия на левой границе.

5. Задача для остаточного члена

Подставив асимптотические формулы (2.6), представленные для первого порядка $n = 1$, в (2.1)-(2.5) и воспользовавшись соотношениями (3.1), (3.5) для $P^{(0)}$ и $P^{(1)}$, получим:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = -\varepsilon \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2}, \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \quad (5.2)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (5.3)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad \theta|_{x=0} = -\varepsilon P^{(1)}|_{x=0}, \quad (5.4)$$

$$\theta_1|_{z=1} = \theta|_{z=1}, \quad \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right|_{z=1} + \varepsilon \left. \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1} = \frac{1}{\varepsilon} \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=1}. \quad (5.5)$$

Анализ задачи (5.1)-(5.5) позволяет найти соотношения, при которых осредненные по толщине перфорированного слоя значения остаточного члена принимают нулевые значения. Для этого усредним задачу (5.1)-(5.5), используя интегральную процедуру:

$$\langle \theta \rangle = \int_0^1 \theta dz.$$

Для второй производной поля давления с учетом (5.3) и (5.5) получим:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz = \frac{1}{\varepsilon} \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_0^1 = \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right|_{z=1} + \varepsilon \left. \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1}.$$

С учетом этого результата осредненная по толщине перфорированного слоя задача для остаточного члена разложения поля давления выглядит как

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad \text{Fo} > 0, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial^2 \langle \theta \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = -\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \langle P^{(1)} \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} \right), \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \quad (5.7)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad \theta|_{x=0} = -\varepsilon \langle P^{(1)} \rangle \Big|_{x=0}, \quad (5.8)$$

$$\theta_1|_{z=1} = \theta|_{z=1}. \quad (5.9)$$

Из анализа задачи (5.6)-(5.9) следует, что условия тривиального решения представляются выражениями:

$$\frac{\partial^2 \langle P^{(1)} \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad 0 < z < 1, \quad (5.10)$$

$$\langle P^{(1)} \rangle \Big|_{x=0} = 0. \quad (5.11)$$

Условие (5.10) выполнено всегда, что легко показать, усреднив выражение (4.7). Выражение же (5.11) является искомым нелокальным средним интегральным условием. Ниже показано, что при добавлении этого условия постановка задачи для первого коэффициента разложения поля давления в несовершенном вскрытом пласте является корректной.

6. Первое приближение для поля давления в несовершенном вскрытом пласте

С учетом полученного среднего интегрального условия (5.11) (вместо тривиального условия для поля давления на левой границе) математическая формулировка задачи для первого коэффициента разложения поля давления в несовершенном вскрытом пласте записывается выражениями:

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{\chi} \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} = -\frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^4 P^{(0)}}{\partial x^4}, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad t > 0, \quad z > 1, \quad (6.2)$$

$$P_1^{(1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad \langle P^{(1)} \rangle \Big|_{x=0} = 0, \quad (6.3)$$

$$P^{(1)} \Big|_{z=1} = P_1^{(1)} \Big|_{z=1}. \quad (6.4)$$

Из приведенного ниже решения следует, что постановка задачи является корректной, т. е. она имеет единственное нетривиальное решение в виде полинома второго порядка по z (4.4), который включает искомым коэффициент $Q(x, t)$.

Переход в пространство изображений Лапласа — Карсона позволяет записать задачу (6.1)-(6.4) в виде:

$$\frac{\partial^2 P^{(1)u}}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1^{(1)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} = -\frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^4 P^{(0)u}}{\partial x^4}, \quad x > 0, \quad 0 < z < 1, \quad (6.5)$$

$$pP_1^{(1)u} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)u}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (6.6)$$

$$P^{(1)u} \Big|_{z=1} = P_1^{(1)u} \Big|_{z=1}, \quad (6.7)$$

$$\left\langle P^{(1)u} \right\rangle \Big|_{x=0} = 0, \quad (6.8)$$

причем решение этой задачи отыскивается в форме полинома:

$$P^{(1)u} = -\frac{\partial^2 P^{(0)u}}{\partial x^2} \frac{z^2}{2} + Q^u(x, p). \quad (6.9)$$

Решение уравнения (6.6) с учетом условия (6.7) представляется как

$$P_1^{(1)u} = P^{(1)u} \Big|_{z=1} \exp(-\sqrt{p}(z-1)). \quad (6.10)$$

Подстановка выражений (6.9) и (6.10) в уравнение (6.5) после несложных преобразований приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения неизвестного коэффициента Q^u :

$$\frac{\partial^2 Q^u}{\partial x^2} - \sqrt{p}Q^u = \frac{1}{6} \frac{\partial^4 P^{(0)u}}{\partial x^4} - \frac{\sqrt{p}}{2} \frac{\partial^2 P^{(0)u}}{\partial x^2} = -\frac{p}{3} P^{(0)u} = -\frac{p}{3} \exp(-4\sqrt{p}x), \quad (6.11)$$

общее решение которого представляется как

$$Q^u = \frac{p^{3/4}}{6} x \exp(-4\sqrt{p}x) + C \exp(-4\sqrt{p}x) + C_1 \exp(4\sqrt{p}x). \quad (6.12)$$

Условие регулярности на бесконечности означает, что $C_1 = 0$. Далее, подставив (6.12) в (6.9), представим выражение для первого коэффициента поля давления в виде:

$$\begin{aligned} P^{(1)u} &= -\frac{\partial^2 P^{(0)u}}{\partial x^2} \frac{z^2}{2} + \frac{p^{3/4}}{6} x \exp(-\sqrt[4]{px}) + C \exp(-\sqrt[4]{px}) = \\ &= \left(-\sqrt{p} \frac{z^2}{2} + \frac{p^{3/4}}{6} x + C \right) \exp(-\sqrt[4]{px}), \end{aligned} \quad (6.13)$$

где вторая константа C определяется из условия (6.8), после подстановки в которое выражения (6.13), последующего интегрирования и решения алгебраического уравнения получим $C = \sqrt{p}/6$.

Искомое решение для первого коэффициента поля давления в пространстве изображений Лапласа — Карсона представляется произведением степенной и экспоненциальной формул:

$$\begin{aligned} P^{(1)u} &= \left(-\sqrt{p} \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{p^{3/4}}{6} x \right) \exp(-\sqrt[4]{px}), \\ P_1^{(1)u} &= \frac{1}{3} \left(\frac{p^{3/4}}{2} - \sqrt{p} \right) \exp(-\sqrt[4]{px} - \sqrt{p}(z-1)). \end{aligned}$$

В пространстве оригиналов, построенных с использованием известных соотношений [1], точное решение задачи для первых коэффициентов разложения поля давления в несовершенном вскрытом пласте $P^{(1)}$ содержит выражения в виде интегралов:

$$P^{(1)} = -\frac{x}{4\pi\sqrt{t}} \left[\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{6\tau} - z^2 \right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t} - \frac{x^2}{4\tau} \right) \frac{d\tau}{\tau\sqrt{\tau}} \right], \quad (6.14)$$

$$P_1^{(1)} = -\frac{x}{24\pi\sqrt{t}} \left[\int_{z-1}^\infty \left(\frac{x^2}{\tau-z+1} - 6 \right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t} - \frac{x^2}{4(\tau-z+1)} \right) \frac{d\tau}{(\tau-z+1)^{3/2}} \right], \quad (6.15)$$

не препятствующих анализу полей и производству расчетов.

Согласно закону Дарси, выражения для составляющих скорости в размерном виде записывается как

$$v_{x_d} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P_d}{\partial x_d}, \quad v_{z_d} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P_d}{\partial z_d}. \quad (6.16)$$

В безразмерном виде выражения для компонент скорости фильтрации имеют вид:

$$v_x = \frac{\mu h}{kP_0} v_{xd} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad v_z = \frac{\mu h}{kP_0} v_{zd} = -\frac{\partial P}{\partial z}. \quad (6.17)$$

На основе полученных формул и закона Дарси построены графические зависимости для вертикальной и горизонтальной компонент скорости. На рис. 2 иллюстрируются значения вертикальной компоненты скорости фильтрации на различных расстояниях от скважины. Заметим, что область отрицательных значений кривых, представленных на рис. 2, соответствует притоку жидкости из покрывающей среды в перфорированный слой в случае отбора из пласта.

Из рис. 2 следует, что на выходе в скважину ($x = 0$) в перфорированной части пласта отсутствуют вертикальные потоки (кривая 1 при $0 < z < 1$), а при удалении от скважины они отличны от нуля (кривые 2 и 3 в том же интервале). В центре симметричного пласта $z = 0$ поперечная компонента скорости обращается в нуль. В то же время максимум модуля вертикальной компоненты скорости на всех кривых достигается на границе интервала перфорации $z = 1$ и соответствует при $x = 0$ величине $v_z = -0,6$. В размерных переменных для случая, когда $k = 10^{-13} \text{ м}^2$, $\mu = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $h = 1 \text{ м}$ и $P_0 = 10^6 \text{ Па}$, величина вертикальной компоненты скорости имеет порядок $v_{zd} = 10^{-4} \text{ м/с}$.

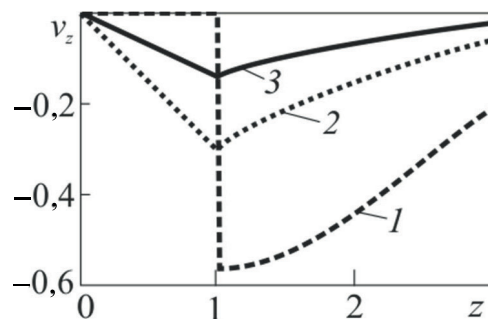


Рис. 2. Профили вертикальной составляющей скорости в момент времени $t = 1$ при различных значениях горизонтальной координаты: 1) $x = 0$; 2) $x = 1$; 3) $x = 2$

Fig. 2. Profiles of the vertical component of the speed at the moment of time $t = 1$ for various values of the horizontal coordinate: 1) $x = 0$; 2) $x = 1$; 3) $x = 2$

Отметим, что отличные от нуля значения вертикальной компоненты скорости фильтрации свидетельствуют о наличии перетоков между слоями даже в случае однородной пористой среды. Причем главная причина таких перетоков заключается в несовпадении границ пласта и интервала перфорации. При совпадении указанных границ межслойные перетоки в однородной среде исчезают, в чем легко убедиться на основе анализа полученных решений.

На рис. 3 представлены значения горизонтальной компоненты скорости фильтрации вблизи скважины при различных значениях времени. Отрицательные значения кривых здесь соответствуют движению жидкости к скважине при отборе из пласта. Заметим, что в неперфорированном интервале пласта $z > 1$ горизонтальные движения жидкости отсутствуют. Максимальные значения модуля горизонтальной компоненты скорости фильтрации достигаются на границе интервала перфорации $z = 1$.

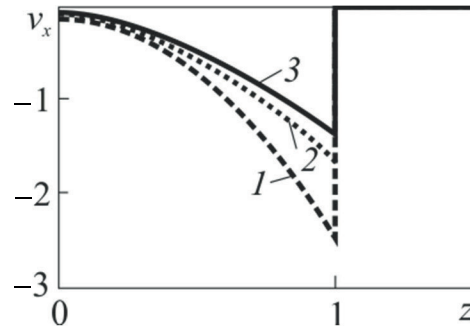


Рис. 3. Вертикальное распределение горизонтальной составляющей скорости на забое скважины ($x = 0$) при различных значениях времени: 1) $t = 60$; 2) $t = 120$; 3) $t = 180$

Fig. 3. Vertical distribution of the horizontal component of the speed at the boundary of a well ($x = 0$) at various times: 1) $t = 60$; 2) $t = 120$; 3) $t = 180$

Заключение

Итак, развитая модель предсказывает, что в режиме постоянной депрессии в однородном пласте, границы которого не совпадают с интервалом перфорации, наблюдается неравномерный профиль притока. Причем минимальные значения притока наблюдаются в центре пласта, а максимальные — на границе интервала перфорации. Причиной такого распределения являются вертикальные межслойные перетоки, неизбежно возникающие в случае несовершенного вскрытия пласта.

Список обозначений

h — полутолщина пласта, м; k — проницаемость, m^2 ; m — пористость; p — параметр преобразования Лапласа — Карсона; P — безразмерное давление; P_0 — амплитудный перепад давления, Па; P_d — размерное поле давления, Па; t — безразмерное время; v_x, v_z — безразмерные компоненты скорости фильтрации; x_d, y_d, z_d — координаты прямоугольной декартовой системы, м; x, y, z — безразмерные декартовы координаты; ε — параметр асимптотического разложения; μ — вязкость, Па · с; τ — время, с; χ — пьезопроводность, m^2/c .

Нижний индекс «d» (dimensional) в обозначениях величин означает «размерный».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. М.: Высшая школа, 1965. 466 с.
2. Ентов В. М. Поле давления вокруг скважины в слоисто-неоднородном пласте / В. М. Ентов, Е. М. Чехонин // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2007. № 1. С. 83-90.
3. Забоева М. И. Установившийся приток газа к несовершенной скважине в однородно-анизотропном пласте / М. И. Забоева, К. О. Каширина // Известия высших учебных заведений. нефть и газ. 2010. № 1. С. 30-34.
4. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскет. М.; Ижевск: ИКИ, 2004. 640 с.
5. Морозов П. Е. Полуаналитическое решение задачи нестационарного притока жидкости к несовершенной скважине / П. Е. Морозов // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2017. № 3. С. 340-353.
6. Филиппов А. И. Асимптотически осредненное решение задачи о поле давления в слоисто-неоднородной пористой среде / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, М. Р. Губайдуллин // Нефтегазовое дело: электрон. науч. журн. 2015. № 3. С. 693-712. DOI: 10.17122/ogbus-2015-3-693-712
7. Филиппов А. И. Задача о радиальной фильтрации в полубесконечных массивах, разделенных пластом с отличающимися свойствами / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский // Прикладная физика и математика. 2017. № 3. С. 37-47.
8. Филиппов А. И. Первое асимптотическое приближение задачи о поле давления в неоднородной ортотропной пористой среде / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский, М. Р. Губайдуллин // Известия Уфимского научного центра РАН. 2016. № 1. С. 5-12.
9. Филиппов А. И. Поля скоростей фильтрации в слоисто-неоднородных пластах / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский, М. Р. Губайдуллин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Том 4. № 4. С. 118-130. DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-4-118-130
10. Щелкачев В. Н. Подземная гидравлика / В. Н. Щелкачев, Б. Б. Лапук. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 736 с.
11. Feng Q. Integrated aquitard-aquifer flow with a mixed-type well-face boundary and skin effect / Q. Feng, H. Zhan // Advances in Water Resources. 2016. Vol. 89. Pp. 42-52. DOI: 10.1016/j.advwatres.2016.01.003
12. Perina T. General well function for soil vapor extraction / T. Perina // Advances in Water Resources. 2014. Vol. 66. Pp. 1-7. DOI: 10.1016/j.advwatres.2014.01.005
13. Wang Q. The effect of intra-wellbore head losses in a vertical well / Q. Wang, H. Zhan // Journal of Hydrology. 2017. Vol. 548. Pp. 333-341. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2017.02.042

Aleksandr I. FILIPPOV¹
Oksana V. AKHMETOVA²
Aleksei A. KOVALSKY³
Marat R. GUBAYDULLIN⁴

UDC 532.546

THE PROBLEM OF THE FLOW OF FLUID TO AN IMPERFECT DRILL HOLE*

- ¹ Dr. Sci. (Tech.), Professor, Department of General Scientific Disciplines,
Ufa State Petroleum Technical University branch in Salavat;
Professor, Department of General and Theoretical Physics, Sterlitamak branch
of the Bashkir State University
filippovai@rambler.ru
- ² Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of General and Theoretical Physics,
Sterlitamak branch of the Bashkir State University
ahoksana@yandex.ru
- ³ Cand. Sci. (Phys.-Math.), Director, Sterlitamak Branch of the Bashkir State University
aakov68@mail.ru
- ⁴ Junior Researcher, Sterlitamak Branch of the Bashkir State University
fir_bmf@mail.ru

Abstract

This article studies seepage flows arising from the selection of hydrocarbons from imperfect drill-holes. The authors observe the problem of pressure field in a homogeneous isolated isotropic homogeneous reservoir perforated in the range, completely contained in the layer of a common width. To construct an analytical asymptotic solution, the single-layer initial problem is replaced by an equivalent three-layer symmetric, including the piezoconductivity equations for

* The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research
(grant No 17-48-020517).

Citation: Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalsky A. A., Gubaydullin M. R. 2019. "The problem of the flow of fluid to an imperfect drill hole". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 5, no 3, pp. 97-117.
DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-97-117

the perforated, covering, and underlying non-perforated layers, the initial and boundary conditions; on the conditional boundary of the perforated and non-perforated layers, the conditions of pressure and flow equality are specified (conjugation conditions). The solution of the problem is assumed to be regular — the value of the desired function, and, if necessary, its derivative at infinity is zero.

The problem is formulated in dimensionless quantities for the functions of the pressure deviation from its unperturbed distribution, normalized to the amplitude value of the depression. To solve the problem, the authors have developed an asymptotic method of a formal parameter. The solution of the problems for the zero and first coefficients of the asymptotic expansion is found in the space of the Laplace — Carson images in the variable t .

Based on the formulas obtained and the Darcy law, the authors construct graphical dependencies for the vertical and horizontal components of the fluid velocity filtered from the periphery to the well.

The computational experiment illustrates that there are no vertical flows at the exit to the well in the perforated part of the reservoir, and when removed from the well, these flows are different from zero, which indicates the presence of interlayer flows even in homogeneous imperfect drill holes. In the center of the perforated layer, such flows are absent, since the transverse velocity component vanishes. At the same time, the inflow in an imperfect drill hole is uneven, and the maximum modulus of the horizontal velocity component on all curves is reached at the boundary of the perforation interval.

Keywords

Filtration, opening imperfection, two-dimensional flow, asymptotic decomposition, pressure field, asymptomatic method of a formal parameter, computational experiment.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-97-117

REFERENCES

1. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. 1965. Reference Book on Operational Calculus. Moscow: Vysshaya shkola. [In Russian]
2. Yentov V. M., Chekhonin Ye. M. 2007. “The pressure field around the well in a layered heterogeneous reservoir”. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, no 1, pp. 83-90. [In Russian]
3. Zaboyeva M. I., Kashirina K. O. 2010. “Steady gas flow to an imperfect well in a uniformly anisotropic reservoir”. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Neft i gaz*, no 1, pp. 30-34. [In Russian]
4. Masket M. 2004. *Flow of Homogeneous Liquids in a Porous Medium*. Moscow; Izhevsk: IKI. [In Russian]
5. Morozov P. Ye. 2017. “Semi-analytical solution of the problem of unsteady fluid flow to an imperfect well”. *Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. seriya: fiziko-matematicheskiye nauki*, no 3, pp. 340-353. [In Russian]

6. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Gubaydullin M. R. 2015. "Asymptotically averaged solution of the problem of the pressure field in a layered inhomogeneous porous medium". *Neftegazovoye delo*, no 3, pp. 693-712. DOI: 10.17122/ogbus-2015-3-693-712 [In Russian]
7. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalskiy A. A., Gubaydullin M. R. 2017. "The problem of radial filtration in semi-infinite arrays separated by a layer with different properties". *Applied Physics and Mathematics*, no 3, pp. 37-47. [In Russian]
8. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalskiy A. A., Gubaydullin M. R. 2016. "The first asymptotic approximation of the problem of the pressure field in an inhomogeneous orthotropic porous medium". *Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN*, no 1, pp. 5-12. [In Russian]
9. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalsky A. A., Gubaidullin M. R. 2018. "Fields of Filtration Rates in Layered Heterogeneous Beds". *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, vol. 4, no 4, pp. 118-130. DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-4-118-130 [In Russian]
10. Shchelkachev V. N., Lapuk B. B. 2001. *Underground Hydraulics. Izhevsk: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika*. [In Russian]
11. Feng Q., Zhan H. 2016. "Integrated aquitard-aquifer flow with a mixed-type well-face boundary and skin effect". *Advances in Water Resources*, vol. 89, pp. 42-52. DOI: 10.1016/j.advwatres.2016.01.003
12. Perina T. 2014. "General well function for soil vapor extraction". *Advances in Water Resources*, vol. 66, pp. 1-7. DOI: 10.1016/j.advwatres.2014.01.005
13. Wang Q., Zhan H. 2017. "The effect of intra-wellbore head losses in a vertical well". *Journal of Hydrology*, vol. 548, pp. 333-341. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2017.02.042