

## МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

Александр Иванович ФИЛИППОВ<sup>1</sup>

Оксана Валентиновна АХМЕТОВА<sup>2</sup>

Алексей Алексеевич КОВАЛЬСКИЙ<sup>3</sup>

Марина Анатольевна ЗЕЛЕНОВА<sup>4</sup>

УДК 532.685

### ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ ПРИ ЗАДАННОМ ДЕБИТЕ СКВАЖИНЫ

<sup>1</sup> доктор технических наук, профессор  
кафедры общей и теоретической физики,  
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета  
filippovai@rambler.ru

<sup>2</sup> доктор физико-математических наук, профессор  
кафедры общей и теоретической физики,  
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета  
ahoksana@yandex.ru

<sup>3</sup> кандидат физико-математических наук, директор,  
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета  
aakov68@mail.ru

<sup>4</sup> кандидат физико-математических наук, доцент  
кафедры общей и теоретической физики,  
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета  
marina\_ag@inbox.ru

---

**Цитирование:** Филиппов А. И. Поле давления в пласте при заданном дебите скважины / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский, М. А. Зеленова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Том 6. № 3 (23). С. 58-78.

DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-58-78

### **Аннотация**

Исследование полей давления в природных коллекторах является основной задачей теории фильтрации и представляет практический интерес в связи с проблемами добычи углеводородов. Вследствие разнообразия природных условий, которые необходимо учитывать при постановке, количество задач неуклонно возрастает. К настоящему времени построены аналитические решения задач для однородных пластов с простейшими граничными условиями. Учет влияния скважинных условий на поля давления в продуктивных пластах представляется актуальным, поскольку в этом случае оно выражается граничным условием в виде интегро-дифференциального уравнения, а соответствующий класс задач недостаточно исследован в фундаментальных разделах математической физики.

В отличие от известных работ, в настоящей статье построено аналитическое решение задачи о поле давления в пласте, представленном классическим уравнением пьезопроводности, для случая, когда граничное условие в виде интегро-дифференциального уравнения описывает процесс извлечения флюида из скважины с помощью насоса заданной производительности.

Точное решение задачи представлено в пространстве интегрального преобразования Лапласа — Карсона. Осуществлен аналитический переход в пространство оригиналов. Создана программа численного обращения на основе алгоритма Ден Изегера. Разработана конечно-разностная схема для исследуемой задачи. Выполнены расчеты пространственно-временных распределений полей давления. Приведено сопоставление графических зависимостей давления, построенных по аналитической формуле и на основе программы численного обращения, с результатами конечно-разностных расчетов. Такое сопоставление увеличивает достоверность полученных результатов, что представляется важным с научной точки зрения, поскольку для класса рассматриваемой задачи не доказаны теоремы существования и единственности.

Анализ результатов расчетов позволил определить вклад параметров скважины и пласта в поле давления. Показано, что в режиме релаксации значительное влияние на формирование поля давления оказывают параметры скважины и насоса. В режиме стабилизации преобладающим является вклад физических параметров пласта.

### **Ключевые слова**

Фильтрация, дебит, скважина, точное решение, интегральное преобразование Лапласа — Карсона, численная реализация, сопоставление расчетов.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-58-78**

### **Введение**

Развитие нефтяной и газовой промышленности в нашей стране связано с появлением новых районов добычи углеводородов и открытием новых типов месторождений, освоение которых требует развития теории упругого режима фильтрации [15]. Во многих ставших уже классическими монографиях и учебниках модели таких фильтрационных течений получены с использованием уравнения

пьезопроводности и закона Дарси [1, 7, 8, 14]. Учет гидродинамической связи скважины и окружающего пласта важен для оптимизации различных этапов разработки месторождения [4, 9, 11], поэтому задачи о фильтрации углеводородов должны содержать и информацию о влиянии скважины на вскрытую ею залежь.

В классических работах, составляющих основы теории фильтрации, эта связь представляется условием либо постоянной депрессии, либо постоянного отбора. При этом авторами используется ограниченная геометрия, а точные решения построены преимущественно для стационарных случаев.

Авторы работы [3] учли влияние скважины путем свертки потока жидкости через ее поверхность в расчете на единицу высоты. Используя свойства функции Грина и применяя аналитико-численный подход, они существенно уточнили классические модели фильтрации. Тем не менее, в силу многообразия условий залегания углеводородов и методов их извлечения, круг задач, описывающих поля давления, представляется весьма широким, а найденные решения задач и предлагаемые попытки исследования полей давления в таких условиях — явно недостаточными.

В предлагаемой статье рассматривается задача о фильтрации жидких углеводородов, особенностью которой является учет влияния скважины, производительности насоса, а также взаимосвязи гидродинамических процессов в скважине с процессами в пласте путем использования граничного условия в виде интегро-дифференциального уравнения, которое выводит рассматриваемую задачу из разряда классических.

#### *Объект исследования*

Рассматривается взаимосвязанная система «скважина — пласт». Нефтенасыщенный пласт перфорирован на всю толщину и продуцирует углеводороды. Вскрытый интервал является анизотропным, причем компоненты тензора проницаемости и пористость зависят от вертикальной координаты; таким образом в модели учтена слоистая неоднородность проницаемого пласта. Покрывающие и подстилающие вскрытый пласт породы считаются непроницаемыми. Насосное оборудование обеспечивает заданную производительность жидкости из скважины, доля которой извлекается из пласта. Другая часть извлекаемой из пласта жидкости расходуется на изменение уровня в стволе скважины. Условиями баланса массы скважина и пласт объединяются в систему со взаимозависимыми полями давлений. Полагается, что рассматриваемая система обладает осевой симметрией, а движение флюида в пласте — плоско-радиальное.

#### **Основная часть**

##### *Постановка задачи*

Задача сформулирована в цилиндрической системе координат, ось  $z_d$  которой совпадает с осью скважины радиуса  $r_0$ , а координатная линия  $r_d$  ориентирована вдоль пористого слоя (см. рис. 1). Перфорированный слой имеет толщину  $H$  ( $-H_1 < z_d < H_2$ ).

Уравнение для функции давления в скважине  $P_{1d}$  получено с использованием закона Дарси, согласно которому скорость одномерной фильтрации жидкости в продуктивном пласте определяется соотношением

$$v = -\frac{k_r(z_d)}{\mu} \frac{\partial P_d}{\partial r_d},$$

где  $k_r(z_d)$  — радиальная проницаемость пористой среды,  $\mu$  — динамическая вязкость фильтрующейся жидкости.

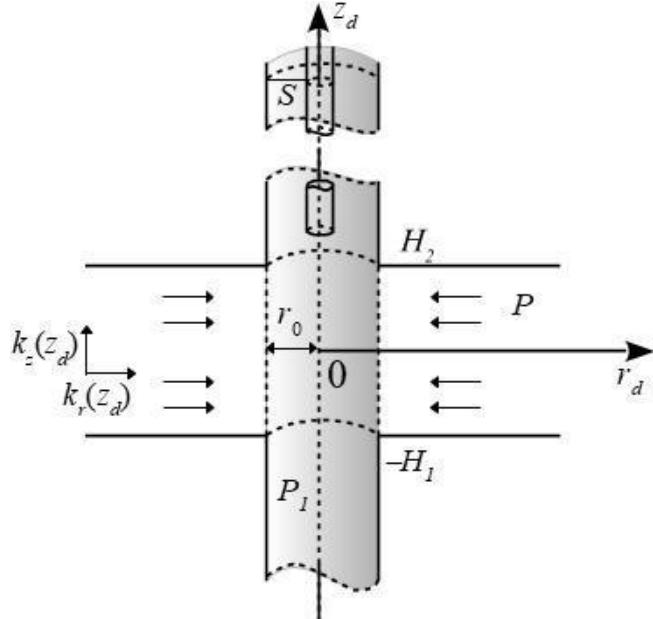
Выражение для дебита пласта в рассматриваемом случае представится в виде интеграла:

$$D = -2\pi \int_{-H_1}^{H_2} \frac{k_r(z_d)}{\mu} \left( r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right) |_{r_d=r_0} dz_d. \quad (1)$$

Из закона Паскаля и закона сохранения масс запишем соотношение для изменения давления в скважине:

$$dP_{1d} = -\frac{\rho g}{S} (D + Q) dt, \quad (2)$$

где  $Q$  — объем жидкости, отбираемой насосом из скважины в единицу времени,  $S$  — площадь заполняемого сечения в скважине,  $\rho$  — плотность флюида.



Rис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. The geometry of the task

Далее подставим в полученное балансовое соотношение выражение для дебита и поделим обе части на  $dt$ . Отсюда получим уравнение, связывающее поля давлений в скважине  $P_{1d}$  и пласте  $P_d$ :

$$\frac{\partial P_{1d}}{\partial t} - \frac{2\pi\rho g}{S\mu} \int_{-H_1}^{H_2} k_r(z_d) \left( r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right) |_{r_d=r_0} dz_d = -\frac{\rho g}{S} Q, \quad (3)$$

$r_d < r_0, t > 0.$

Поле давления описывается уравнением пьезопроводности с переменными коэффициентами, отражающими слоистое строение осадочных пород:

$$\mu\beta m(z_d) \frac{\partial P_d}{\partial t} = k_r(z_d) \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left( r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right) + \frac{\partial}{\partial z_d} \left( k_z(z_d) \frac{\partial P_d}{\partial z_d} \right), \quad (4)$$

$r_d > r_0, -H_1 < z_d < H_2, t > 0.$

Границные и начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} P_d|_{r_d=r_0} &= P_{1d}, & P_d|_{r_d=R} &= 0, \\ \frac{\partial P_d}{\partial z_d}|_{z_d=-H_1} &= 0, & \frac{\partial P_d}{\partial z_d}|_{z_d=H_2} &= 0, \\ P_d|_{t=0} &= 0, & P_{1d}|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что полученное уравнение (3) не учитывает перепада давления, вызванного влиянием вязкости и инерции столба жидкости в стволе скважины. Оценки показывают, что вклад этих эффектов в малодебитных скважинах, эксплуатируемых погружными насосами, значительно меньше учитываемого гидростатического перепада давления.

Задачи, в которых граничное условие задано в виде дифференциального уравнения, образуют выделенный класс неклассических задач. Они широко используются в теплофизике для описания температурных полей в пласте и скважине [10]. Примером такого рода является круг задач, при постановке и решении которых использована «схема сосредоточенной емкости».

В отличие от теплофизических задач, уравнение (3) содержит слагаемое в виде интеграла от следа производной из внешней области. По этой причине полученное уравнение является интегро-дифференциальным, а соответствующие задачи теории фильтрации представляют значительный интерес и требуют дополнительных теоретических исследований, развития методов построения аналитических решений и создания новых численных алгоритмов.

### *Методы решения*

В рассматриваемой задаче уравнение пьезопроводности осложнено наличием переменных коэффициентов, которые затрудняют построение решений. Кроме того, задача содержит нелокальное интегральное условие (3), которое выраже-

но в виде интегрально-дифференциального уравнения, связывающего поля давлений в пласте и скважине. В силу указанных выше сложностей задачи, для исследования процессов в пласте и скважине использован комплекс методов, включающих аналитические решения и численные алгоритмы.

Для построения решения сформулированной задачи использован метод асимптотического осреднения, описанный в [12]. Решения усредненной задачи получены методом интегральных преобразований по аналогии со сходными теплофизическими задачами [13]. Для обращения изображений использован также численный метод Ден Изегера [16]. Составлена конечно-разностная программа для численных расчетов исследуемых полей давления.

#### *Асимптотическое осреднение*

Поскольку коэффициенты в исходной задаче зависят от вертикальной координаты, то процедура интегрального осреднения не приводит к желаемым результатам. Для задач такого рода авторами развита процедура асимптотического осреднения [12]. В результате асимптотического осреднения по вертикальной координате  $z_d$  сформулированной выше задачи получим постановку для эквивалентной однородной среды:

$$\mu m \beta \frac{\partial P_d}{\partial t} - \langle k \rangle \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left( r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right) = 0, \quad r_0 < r_d < R, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial P_{1d}}{\partial t} - \langle k \rangle \frac{2\pi \rho g H}{S} \left( r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right) \Big|_{r_d=r_0} = -Q \frac{\rho g}{S}, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$P_d|_{r_d=r_0} = P_{1d}, \quad P_d|_{r_d=R} = 0, \quad (8)$$

$$P_d|_{t=0} = 0, \quad P_{1d}|_{t=0} = 0, \quad (9)$$

где  $\langle k \rangle$  — осредненная в интервале  $-H_1 < z_d < H_2$  проницаемость пористой среды.

#### *Точное аналитическое решение*

При  $R \rightarrow \infty$  задача (6)-(9) допускает аналитическое решение. Постановка задачи в этом случае запишется в виде:

$$\frac{\partial P_d}{\partial t} - \frac{\langle k \rangle}{\mu m \beta} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left( r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right) = 0, \quad r_0 < r_d < \infty, \quad t > 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial P_{1d}}{\partial t} - \langle k \rangle \frac{2\pi \rho g H}{S} \left( r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right) \Big|_{r_d=r_0} = -Q \frac{\rho g}{S}, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$P_d|_{r_d=r_0} = P_{1d}, \quad P_d|_{r_d \rightarrow \infty} = 0, \quad (12)$$

$$P_d|_{t=0} = 0, \quad P_{1d}|_{t=0} = 0. \quad (13)$$

Критерии, использованные для записи задачи в безразмерных переменных, имеют вид:

$$\tau = \frac{\langle k \rangle t}{\mu m \beta r_0^2}, \quad r = \frac{r_d}{r_0}, \quad P = \frac{P_d}{P_0}, \quad P_1 = \frac{P_{1d}}{P_0}, \quad \alpha = m \beta \rho g H \frac{2\pi r_0^2}{S},$$

$$q = m \rho g \beta r_0^2 \frac{\mu Q}{P_0 \langle k \rangle S},$$

а безразмерная постановка задачи представляется как

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0, \quad 1 < r < \infty, \quad \tau > 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \tau} - \alpha \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = -q, \quad \tau > 0, \quad (15)$$

$$P \Big|_{r=1} = P_1, \quad P \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (16)$$

$$P \Big|_{\tau=0} = 0, \quad P_1 \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (17)$$

В пространстве преобразований Лапласа — Карсона [2] задача приобретает вид

$$p P^u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P^u}{\partial r} \right), \quad r > 1, \quad (18)$$

$$p P_1^u - \alpha \left( r \frac{\partial P^u}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = -q, \quad (19)$$

$$P^u \Big|_{r=1} = P_1^u, \quad (20)$$

$$P_1^u \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (21)$$

где  $p$  — параметр преобразования.

Решение уравнения (18) представляется в виде линейной комбинации бесселевых функций мнимого аргумента [6]. В силу требования регулярности поля давления на бесконечности (21) и с учетом условия равенства давлений в скважине и пласте (20) при  $r=1$ , выражение для функции давления представим в виде

$$P^u = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} P_1^u. \quad (22)$$

Производная давления по радиальной координате имеет вид

$$\frac{\partial P^u}{\partial r} = -\sqrt{p} \frac{K_1(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} P_1^u. \quad (23)$$

Значение выражения  $\left(r \frac{\partial P^u}{\partial r}\right) \Big|_{r=1}$ , следующее из (23),

$$\left(r \frac{\partial P^u}{\partial r}\right) \Big|_{r=1} = -\sqrt{p} \frac{K_1(\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} P_1^u, \quad (24)$$

подставим в (19) и получим алгебраическое уравнение для определения функции  $P_1^u$

$$pP_1^u + \alpha\sqrt{p} \frac{K_1(\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} P_1^u = -q. \quad (25)$$

Решение уравнения (25) с помощью несложных алгебраических преобразований запишем как

$$P_1^u = -\frac{qK_0(\sqrt{p})}{\sqrt{p}[\sqrt{p}K_0(\sqrt{p}) + \alpha K_1(\sqrt{p})]}. \quad (26)$$

Это решение представляет выражение для давления в скважине в пространстве изображений Лапласа — Карсона. Для поля давления в пласте, согласно (20), имеем

$$P^u = -\frac{qK_0(r\sqrt{p})}{\sqrt{p}[\sqrt{p}K_0(\sqrt{p}) + \alpha K_1(\sqrt{p})]}. \quad (27)$$

Построение оригинала полученного решения может быть осуществлено на основе интеграла Меллина, что оборачивается весьма громоздкими преобразованиями. Для упрощения построение оригиналов полученных решений осуществим с помощью результатов, описанных в монографии [5] применительно к теплофизической задаче, решение которой представлено в указанной работе в пространстве преобразований Лапласа. Для записи решения (27) в пространстве изображения Лапласа достаточно поделить его на параметр преобразования  $p$ :

$$P^{uL} = -\frac{1}{p} \frac{qK_0(r\sqrt{p})}{\sqrt{p}[\sqrt{p}K_0(\sqrt{p}) + \alpha K_1(\sqrt{p})]}. \quad (28)$$

Далее воспользуемся выражением (7.6) из [5, с. 337], сохраняя принятые обозначения:

$$\bar{v} = \frac{\alpha Q' K_0(q'r)}{\kappa S p q' [q' K_0(aq') + \alpha K_1(aq')]}, \quad q' = \sqrt{\frac{p}{\kappa}},$$

оригинал которого, согласно (7.7) из [5], имеет следующий вид:

$$\nu = \frac{2Q'a^2}{\pi\kappa S} \int_0^\infty (1 - e^{-u^2 t}) J_0\left(u \frac{r}{a}\right) [uY_0(u) - \alpha Y_1(u)] - \\ - Y_0\left(u \frac{r}{a}\right) [uJ_0(u) - \alpha J_1(u)] \frac{du}{u^2 \Delta(u)},$$

$$\Delta(u) = [uJ_0(u) - \alpha J_1(u)]^2 + [uY_0(u) - \alpha Y_1(u)]^2.$$

Переход к (28) с обозначениями, принятыми в статье, осуществим, полагая  $a = 1, \kappa = 1, q = Q'$ . Тогда искомое решение для поля давления в пласте представится как

$$P = -\frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{du}{u^2} (1 - e^{-u^2 t}) \times \\ \times \frac{J_0(ru)[uY_0(u) - \alpha Y_1(u)] - Y_0(ru)[uJ_0(u) - \alpha J_1(u)]}{[uJ_0(u) - \alpha J_1(u)]^2 + [uY_0(u) - \alpha Y_1(u)]^2}. \quad (29)$$

Выражение для давления в скважине, согласно (16), следует из полученного решения при  $r = 1$ :

$$P_1 = P|_{r=1} = \frac{2q\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{du}{u^2} (1 - e^{-u^2 t}) \times \\ \times \frac{J_0(u)Y_1(u) - J_1(u)Y_0(u)}{[uJ_0(u) - \alpha J_1(u)]^2 + [uY_0(u) - \alpha Y_1(u)]^2}, \quad (30)$$

которое с использованием известного соотношения для функций Бесселя действительного аргумента

$$J_0(u)Y_1(u) - J_1(u)Y_0(u) = -\frac{2}{\pi u}$$

приводится к виду

$$P_1 = -\frac{4q\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{du}{u^3} \frac{1 - e^{-u^2 t}}{[uJ_0(u) - \alpha J_1(u)]^2 + [uY_0(u) - \alpha Y_1(u)]^2}. \quad (31)$$

Выражение (31) описывает релаксационные процессы давления после начала отбора из скважины, который в последующем поддерживается постоянным. Такие условия реализуются, например, после пуска погружного насоса.

Из полученного выражения следует, что релаксационные процессы в пласте, в рамках указанных выше предположений, определяются двумя параметрами:

$$\alpha = m \beta \rho g H \frac{2\pi r_0^2}{S} \text{ и } \delta = \alpha q = \left( m \beta \rho g H \frac{2\pi r_0^2}{S} \right)^2 \frac{\mu Q r_0^2}{2\pi P_0 \langle k_r \rangle S H} = \alpha^2 \frac{\mu Q r_0^2}{2\pi P_0 \langle k_r \rangle S H}.$$

Величины  $\alpha$  и  $q$ , представляющие комбинацию физических констант, характеризующих свойства пласта и скважинных характеристик, являются независимыми параметрами задачи. Отметим, что произведение  $\delta = \alpha q$  представляет дополнительный зависимый параметр, который является сомножителем перед интегралом, т. е. нормирующим параметром.

Предложенные на основе аналитического решения задачи параметры имеют важное практическое значение, поскольку могут быть определены на основе измерения давления в скважине после пуска насоса, а контроль за их изменением в процессе разработки месторождения позволит обеспечить выбор сроков и методов воздействия для увеличения нефтеотдачи. Заметим, что соответствующие методы измерения могут быть реализованы как в вертикальных, так и в наклонных и горизонтальных скважинах, поскольку описываемые использованными уравнениями физические процессы являются аналогичными. Однако получаемые в горизонтальных и наклонных скважинах результаты будут соответствовать некоторой эквивалентной вертикальной скважине, т. е. являются кажущимися. Уточнение же методов интерпретации кривых давления потребует развития предлагаемой теории.

#### Конечно-разностная схема

Для удобства построения сетки в задаче с граничным условием в виде дифференциального уравнения осуществлена замена переменной  $x = \ln r$ . Преимуществом такого представления задачи является возможность использования равномерной сетки, которая в реальной задаче будет соответствовать сгущающейся при уменьшении значений  $r$ . Недостатком такого перехода от радиальной к линейной геометрии является возникновение переменного коэффициента в уравнении пьезопроводности:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \tau} - \beta \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) |_{x=0} = -q, \quad \tau > 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = e^{-2x} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad \tau > 0, \quad (33)$$

$$P|_{x=0} = P_1, \quad P|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad (34)$$

$$P|_{\tau=0} = 0, \quad P_1|_{\tau=0} = 0. \quad (35)$$

Уравнения (32), (33) и условия (34), (35) записаны в конечно-разностной форме на равномерной сетке, которая в исходной задаче обеспечивает сгущение узлов при приближении к скважине. Шаг по пространственной координате  $x$  принят равным  $l$ , а по времени обозначен  $\tau$ . Текущие номера узлов обозначены по оси  $x$  через  $i \in [0, I]$ , по времени  $t - n \in [0, N]$ . Здесь  $I + 1, N + 1$  — количество узлов сетки по оси  $x$  и времени  $t$ , которые изменяются в пределах интервалов пространственной координаты и времени  $x \in [0, L = lI], t \in [0, T = \tau N]$  соответственно.

Значения искомого поля давления в узлах равномерной сетки обозначим  $P_i^n$ , где верхний индекс соответствует временному слою, а нижний — текущей пространственной координате.

Отличительной особенностью рассматриваемой задачи является наличие условия на левой границе (32), представленного в виде уравнения в частных производных первого порядка на границе «скважина-пласт», которое содержит функцию  $P_1 = P_0^n$ , связанную условием (34) с пластовым давлением  $P = P_0^n$ . Это позволяет представить конечно-разностный аналог уравнения (32) в виде равенства

$$P_0^n = -q\tau + \left(1 - \frac{\beta\tau}{l}\right)P_0^{n-1} + \frac{\beta\tau}{l}P_1^{n-1}, \quad (36)$$

обеспечивающего вычисление значения давления в скважине в текущем временном слое через значения в предшествующем. Полученное рекуррентное соотношение обеспечивает реализацию явной схемы для рассматриваемой задачи.

В качестве рекуррентной формулы для  $0 < i < I$  использовано известное явное соотношение, содержащее дополнительно переменный коэффициент, значение которого вычисляется в центральной точке, соответствующей второй производной:

$$P_i^n = \left(1 - \frac{2\tau e^{-2il}}{l^2}\right)P_i^{n-1} + \frac{\tau e^{-2il}}{l^2}(P_{i-1}^{n-1} + P_{i+1}^{n-1}), \quad (37)$$

где  $P_i^n$  — значения искомого поля давления в узлах равномерной сетки,  $i \in [1, I-1]$ ,  $n \in [1, N]$ , где  $I + 1, N + 1$  — количество узлов сетки по оси  $x$  и времени  $t$  соответственно.

Ввиду того, что величина экспоненциального коэффициента перед второй пространственной производной ограничена, для обеспечения устойчивости достаточно соотношения между пространственными и временными шагами, когда величина отрицательной экспоненты не превышает единицу, поэтому при производстве расчетов принято  $\tau < 0.1l^2$ , что с гарантией обеспечивает выполнение условия устойчивости.

До проведения вычислительных расчетов программа подробно тестировалась и проводился контроль полученных вычислений в процессе их реализации. Осуществлялось сопоставление численных расчетов с созданными ранее аналитическими моделями.

### Численный алгоритм обращения

Преобразование решения (28) в пространство оригиналов осуществлено не только аналитически, но и с использованием численного алгоритма Ден Изегера [16]. Метод численного обращения преобразования Лаплласа — Карсона имеет преимущество некоторой универсальности, но требует постоянного контроля хотя бы в отдельных точках.

Отметим, что каждый из использованных методов обладает определенными преимуществами и недостатками. Аналитическое решение, например, содержит в подынтегральном выражении комбинацию бесселевых функций, поэтому требует использования специальных программ для вычисления интегралов от осциллирующих функций, пространственно-временная область успешной реализации которых существенно ограничена. Численный конечно-разностный метод требует специальных дополнений при исследовании поля давления в неограниченном пласте.

Комплексное же использование этих методов обладает преимуществом, поскольку в результате сопоставления достигается высокая достоверность полученных результатов, что является основным требованием научности.

### Результаты исследования

Пример сопоставления приведен на рис. 2, который иллюстрирует согласование кривых, построенных на основе аналитического решения (31) (сплошные линии), с использованием численного обращения Ден Изегера на основе выражения (28) (пунктирные линии) и по конечно-разностной схеме (штриховые линии). Значения безразмерных параметров, использованных в расчетах  $\alpha = 3.5 \cdot 10^{-5}$  и  $\delta = 1.4 \cdot 10^{-3}$ , соответствуют следующим физическим параметрам пласта, скважины и отбираемого флюида:  $m = 0.2$ ,  $\beta = 10^{-8} \text{ Па}^{-1}$ ,  $\rho = 900 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $H = 1 \text{ м}$ ,  $r_0 = 0.05 \text{ м}$ ,  $k = 10^{-13} \text{ м}^2$ ,  $\mu = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $Q = 1.1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$ .

Из рисунка следует, что вычисления по аналитической формуле совпадают с результатами численного обращения. Это сопоставление позволяет устранить и избежать возникновения выбросов и областей молчания алгоритма расчетов по аналитической формуле (31) и увеличить достоверность результатов численного обращения Ден Изегера с использованием формулы (28). Кривые давления, построенные на основе конечно-разностного алгоритма задачи, при малых временах совпадают с аналитическими расчетами.

При больших временах наблюдается расхождение между кривыми, которое вызвано влиянием пространственной ограниченности области расчетов при реализации конечно-разностной схемы. Сопоставление кривых показывает, что при удалении от скважины время, при котором начинается влияние правой границы, уменьшается. Таким образом, сравнение результатов расчетов различными методами позволяет не только увеличить достоверность и точность значений, но и выявлять физические закономерности формирования поля давления в пласте и скважине. По этой причине на приведенных ниже рисунках указания на использованные методы расчета отсутствуют, однако результаты получены на основе комплексного использования методов.

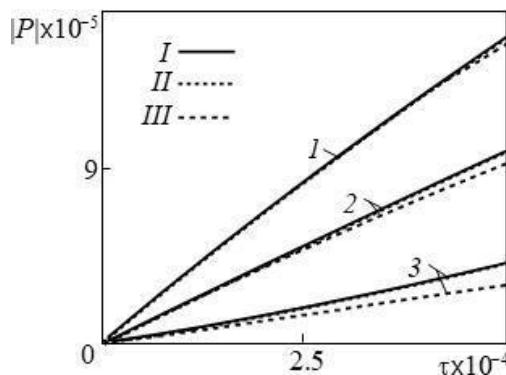


Рис. 2. Изменение возмущения давления в пласте с течением времени на различных расстояниях от скважины: 1 —  $r = 1$ , 2 — 7.4, 3 — 54.6; построенные по аналитической формуле — I, с использованием численного обращения — II, по конечно-разностной схеме — III

Fig. 2. The changes in formation pressure perturbation over time at different distances from the well: 1 —  $r = 1$ , 2 — 7.4, 3 — 54.6; built using the analytical formula — I, using the numerical circulation — II, on the finite difference scheme — III

Выражения (30), (31) позволяют построить пространственно-временные зависимости поля давления в пласте и скважине после включения насосного оборудования в режиме постоянного отбора из скважины. Заметим, что отбор из пласта при этом не является постоянным: он нарастает вместе с увеличением депрессии, вызванной снижением уровня жидкости в стволе скважины.

На рис. 3 изображена динамика давления на разных расстояниях от оси скважины. Из анализа рис. 3а следует, что при малых временах наблюдается повышенная скорость изменения давления, с течением времени она уменьшается. Это происходит потому, что сразу после включения насоса приток из пласта отсутствует. Уменьшение уровня жидкости в стволе скважины приводит к увеличению депрессии, в результате чего поток жидкости из пласта начинает возрастать. Увеличение притока из пласта приводит к уменьшению скорости изменения давления. Нарастание притока происходит до тех пор, пока дебит пласта и производительность насоса не сравняются. Если насос поддерживает производительность постоянной, то режим работы скважины приближается к постоянному отбору из пласта, который равен производительности насоса. В соответствии с изложенным, после пуска насоса реализуются различные режимы.

Первый режим — релаксационный — реализуется при малых временах. Этот переходной режим наблюдается в промежутке времени от пуска насоса до выравнивания отбора углеводородов из пласта и скважины. В этом режиме происходят основные изменения давления, на основе измерения которого могут быть определены релаксационные параметры системы «скважина — пласт».

После указанного выравнивания отбора релаксационный режим переходит в режим стабилизации, когда скорость изменения давления существенно уменьшается, а влияние параметров скважины становится незначительным. Скорость нарастания давления во втором режиме определяется развитием зоны возмущений давления в пласте. Это означает, что поле давления в режиме стабилизации определяется преимущественно параметрами пласта.

На рис. 3б более детально иллюстрируется динамика давления в релаксационном режиме. Из кривых, изображенных на рисунке, следует, что сразу после пуска насоса давление изменяется по линейному закону, а нарастающие отклонения от него вызваны генерацией притока из пласта.

Рис. 4 иллюстрирует пространственные распределения давления в пласте и скважине при отборе углеводородов в различные моменты времени в период релаксации (а) и стабилизации (б). На равномерной шкале отсчета по радиальной координате начальное значение принято равным  $r = 1$ , поскольку оно соответствует значению давления в скважине. Рисунок иллюстрирует эволюцию зоны возмущения давления в пласте, вызванного работой насоса.

На рис. 5 дано пространственное представление поля давления в период релаксации для случая, когда в начальный момент времени осуществлен пуск насоса, который с постоянной производительностью отбирает жидкость из ствола скважины. Давление в интервале пласта при этом снижается, так как уменьшается высота столба жидкости в стволе скважины. Нарастающая депрессия приводит к увеличению отбора жидкости из пласта до тех пор, пока приток из пласта и отбор из скважины не станут одинаковыми. Равенство отборов жидкости из пласта и скважины соответствует переходу в квазистационарный режим. Время достижения квазистационарного режима и величины депрессии в квазистационарном режиме соответствует времени релаксации. Это время определяется значениями параметров  $\alpha$ ,  $q$  и  $\delta$ . Параметр  $\delta = \alpha q$  играет особую роль, поскольку является нормирующим и определяет величину депрессии в квазистационарном режиме.

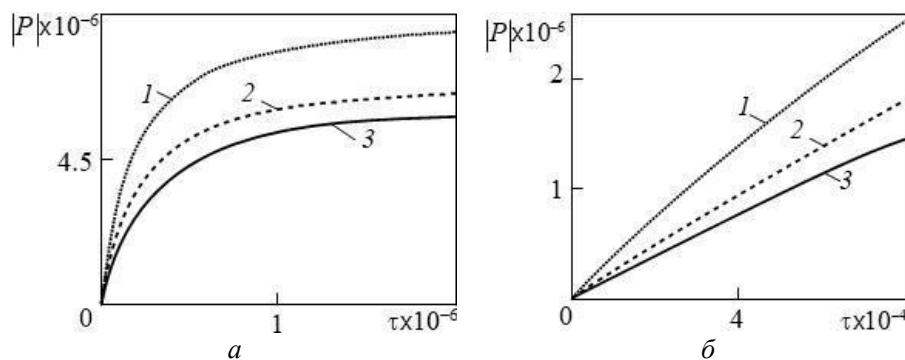


Рис. 3. Зависимость давления от безразмерного времени на различных расстояниях от скважины: 1 —  $r = 1$ , 2 — 5, 3 — 10

Fig. 3. The pressure dependencies on the infinite time at different distances from the well: 1 —  $r = 1$ , 2 — 5, 3 — 10

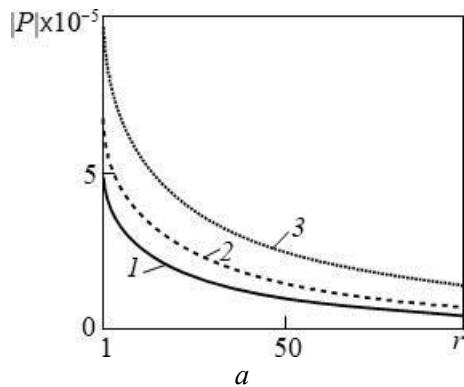


Рис. 4. Зависимость давления от радиальной координаты для различных времен. Шифр кривых: а (режим релаксации): 1 —  $\tau = 1.5 \cdot 10^4$ , 2 —  $2 \cdot 10^4$ , 3 —  $3 \cdot 10^4$ ; б (режим стабилизации): 4 —  $\tau = 10^6$ , 5 —  $1.5 \cdot 10^6$ , 6 —  $2 \cdot 10^6$

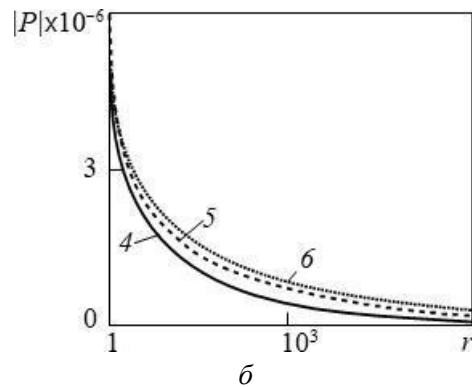


Fig. 4. The pressure dependencies on the radial coordinate for different times. The code for the lines: а (the relaxation regime): 1 —  $\tau = 1.5 \cdot 10^4$ , 2 —  $2 \cdot 10^4$ , 3 —  $3 \cdot 10^4$ ; б (the stabilization regime): 4 —  $\tau = 10^6$ , 5 —  $1.5 \cdot 10^6$ , 6 —  $2 \cdot 10^6$

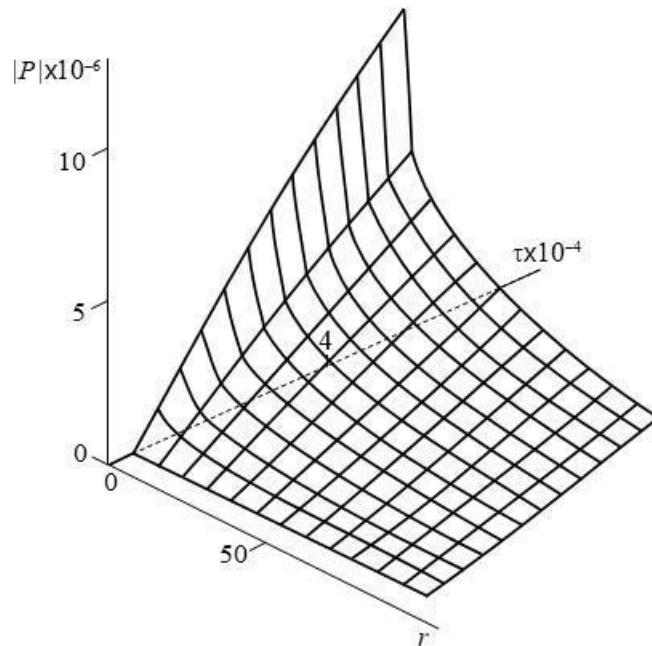


Рис. 5. Пространственно-временное представление давления в пласте и скважине после пуска насоса с постоянной производительностью отбора жидкости из ствола скважины

Fig. 5. The spatial and temporal presentation of the pressure in the layer and the well after the start of the pump with a constant wellbore fluid withdrawal performance

Поверхность, представленная на рис. 5, составлена из двух семейств линий, лежащих во взаимно ортогональных плоскостях. Первое семейство линий лежит в плоскостях, ортогональных оси  $r$ . Точка пересечения каждой плоскости с осью  $r$  соответствует расстоянию до выхода из пласта в скважину. Линии этого семейства представляют зависимости относительной величины давления от времени в указанных точках пласта. Наиболее удаленная из этого семейства кривых соответствует  $r = 1$ , то есть изменению величины давления в скважине. Из сопоставления этого семейства кривых следует, что максимальные значения перепада давления в каждый момент времени достигаются в скважине.

Каждая из второго семейства кривых лежит в плоскости, ортогональной оси времени  $\tau$ , и представляет зависимость давления в пласте от радиальной координаты  $r$ . Анализ этого семейства кривых позволяет составить представление об изменении радиальных распределений давления при переходе от одного значения времени к следующему. Соответствующие значения времени определяются точкой пересечения плоскости, содержащей кривую, с осью времени  $\tau$ .

Наличие указанных семейств кривых обеспечивает высокую наглядность и информативность для уточнения представлений о поле давления в пласте и скважине.

На рис. 6 представлены зависимости величины относительного давления в полулогарифмической ( $a$ ) и равномерной ( $\delta$ ) шкалах в точке, соответствующей значению радиальной координаты  $r = 1$ , при различных значениях времени  $\tau$  от параметра  $\alpha$  в диапазоне от 0 до  $10^{-4}$ . Из рисунка следует, что при увеличении параметра  $\alpha$  значения возмущений давления уменьшаются, причем наиболее значительные изменения давления наблюдаются в области малых  $\alpha$ . Именно в диапазоне малых величин сконцентрированы значения  $\alpha$ , соответствующие физическим параметрам жидкости, скважины и пласта. Такая зависимость поля

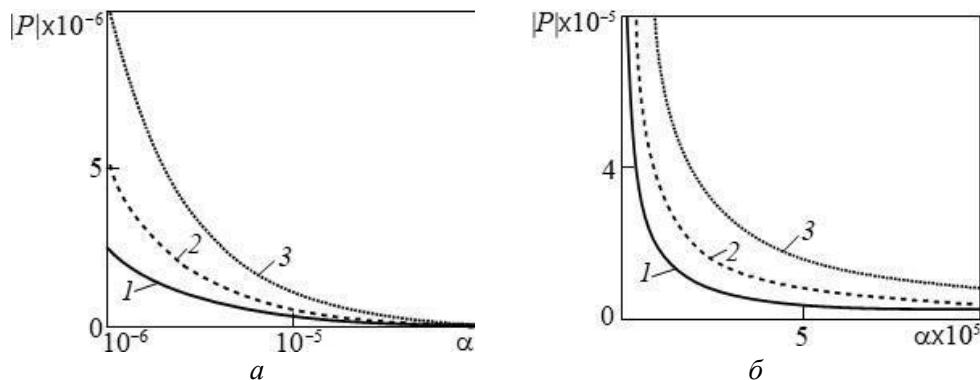


Рис. 6. Зависимость давления от параметра  $\alpha$  для разных времен при  $\delta = 1.4 \cdot 10^{-3}$ ,  $r = 1$ .  
Шифр кривых: 1 —  $\tau = 1.5 \cdot 10^3$ ,  
2 —  $2 \cdot 10^3$ , 3 —  $3 \cdot 10^3$

Fig. 6. The pressure dependencies on the parameter  $\alpha$  for different times at  $\delta = 1.4 \cdot 10^{-3}$ ,  $r = 1$ .  
The code for the lines: 1 —  $\tau = 1.5 \cdot 10^3$ ,  
2 —  $2 \cdot 10^3$ , 3 —  $3 \cdot 10^3$

давления от параметра  $\alpha$  свидетельствует о возможности его экспериментального определения на основе кривых изменения давления в интервале пласта после пуска насоса.

### **Выводы**

Таким образом, на основании аналитического решения, конечно-разностных расчетов и численного обращения исследованы особенности взаимосвязанных полей давления в пласте и скважине, эксплуатируемой с помощью насосного оборудования погружного типа. Осуществлены расчеты пространственно-временных зависимостей поля давления в пласте и скважине, для увеличения достоверности полученных результатов выполнено сопоставление расчетов указанными численными и аналитическими методами.

На основании расчетов подтверждено, что если насос поддерживает производительность постоянной, то режим работы скважины с течением времени после пуска приближается к постоянному отбору из пласта, который равен производительности насоса, а после пуска насоса реализуются режимы релаксации и стабилизации. Режим релаксации наблюдается в промежутке времени от пуска насоса до выравнивания отбора углеводородов из пласта и скважины. Поля давления в этом режиме определяются преимущественно параметрами насосного оборудования, скважины и пласта. После указанного выравнивания отбора релаксационный режим переходит в режим стабилизации, когда скорость изменения давления существенно уменьшается, а влияние параметров скважины и насосного оборудования нивелируется. Режим стабилизации ограничен промежутком времени, в течение которого уровень жидкости в стволе скважины достигает приема насосно-компрессорных труб или верхней границы перфорированного интервала.

Развитая аналитико-численная модель позволяет оценить времена реализации каждого из режимов и физические особенности формирования полей давления в таких условиях. Она позволила установить, что основными параметрами, определяющими пространственно-временные распределения полей давления после включения насоса в режиме постоянного отбора, являются  $\alpha$  и  $q$ . Параметр  $\delta = aq$  определяет величину депрессии в квазистационарном режиме.

Эти параметры имеют важное практическое значение, поскольку могут быть определены на основе измерения давления в скважине после пуска насоса, а контроль за их изменением в процессе разработки месторождения позволит обеспечить выбор сроков и методов воздействия для увеличения нефтеотдачи. Заметим, что соответствующие методы измерения могут быть реализованы как в вертикальных, так и в наклонных и горизонтальных скважинах, поскольку описываемые использованными уравнениями физические процессы являются аналогичными. Однако получаемые в горизонтальных и наклонных скважинах результаты будут соответствовать некоторой эквивалентной вертикальной скважине, т. е. являются кажущимися. Для уточнения методов интерпретации кривых давления в горизонтальных скважинах необходимо дальнейшее развитие предлагаемой теории.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бузинов С. Н. Исследование пластов и скважин при упругом режиме фильтрации / С. Н. Бузинов, И. Д. Умрихин. М.: Недра, 1964. 272 с.
2. Диткин В. А. Операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. М.: Высшая школа, 1966. 406 с.
3. Ентов В. М. Поле давления вокруг скважины в слоисто-неоднородном пласте / В. М. Ентов, Е. М. Чехонин // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2007. № 1. С. 83-90.
4. Заночуев С. А. Экспериментальный метод прогнозирования состава и свойств добываемого флюида в условиях двухфазной фильтрации газожидкостной смеси при разработке месторождений на истощение / С. А. Заночуев, А. Б. Шабаров // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Том 5. № 4. С. 21-36.
5. Карслу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслу, Д. Егер. М.: Наука, 1964. 488 с.
6. Кузнецов Д. С. Специальные функции М.: Высшая школа, 1965. 273 с.
7. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.; Ижевск: ИКИ, 2004. 628 с.
8. Николаевский В. Н. Механика насыщенных пористых сред / В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г. А. Зотов. М.: Недра, 1970. 339 с.
9. Пятибрат В. П. Математическое моделирование процесса восстановления давления на забое галереи в случае неоднородного по толщине ограниченного линейного пласта / В. П. Пятибрат, В. А. Соколов, Ю. Г. Бураков, В. В. Арефьев, Н. Д. Цхадая, А. Т. Банникова // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2009. № 6. С. 14-18.
10. Рубинштейн Л. И. Температурные поля в нефтяных пластах / Л. И. Рубинштейн. М.: Недра, 1972. 275 с.
11. Филиппов А. И. Волновые поля давления в пласте и скважине / А. И. Филиппов, К. Н. Короткова // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2009. Том 12. № 1. С. 48-53.
12. Филиппов А. И. Метод покоэффициентного осреднения в задаче о ламинарном течении газа в скважине / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Том 59. № 1 (347). С. 71-82.
13. Филиппов А. И. Основная задача термокаротажа / А. И. Филиппов, П. Н. Михайлов, О. В. Ахметова // Теплофизика высоких температур. 2006. Том 44. № 5. С. 747-755.
14. Чарный И. А. Подземная гидродинамика / И. А. Чарный. М.: Гостоптехиздат, 1963. 397 с.
15. Шабаров А. Б. Методы определения функций относительной фазовой проницаемости в задачах многофазной фильтрации / А. Б. Шабаров, А. В. Шаталов, П. В. Марков, Н. В. Шаталова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Том 4. № 1. С. 79-109.
16. Den Iseger P. Numerical transform inversion using Gaussian quadrature / P. Den Iseger // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2006. No. 20. Pp. 1-44.

**Aleksandr I. FILIPPOV<sup>1</sup>**  
**Oksana V. AKHMETOVA<sup>2</sup>**  
**Aleksey A. KOVALSKIY<sup>3</sup>**  
**Marina A. ZELENOVA<sup>4</sup>**

**UDC 532.685**

## **THE PRESSURE FIELD IN THE RESERVOIR AT A GIVEN WELL FLOW RATE**

<sup>1</sup> Dr. Sci. (Tech.), Professor,  
Department of General and Theoretical Physics,  
Sterlitamak Branch of the Bashkir State University  
filippov@rambler.ru

<sup>2</sup> Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,  
Department of General and Theoretical Physics,  
Sterlitamak Branch of the Bashkir State University  
ahoksana@yandex.ru

<sup>3</sup> Cand. Sci. (Phys.-Math.), Director,  
Sterlitamak Branch of the Bashkir State University  
aakov68@mail.ru

<sup>4</sup> Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor,  
Department of General and Theoretical Physics,  
Sterlitamak Branch of the Bashkir State University  
marina\_ag@inbox.ru

### **Abstract**

Due to the problems of hydrocarbon production, the study of pressure fields in natural reservoirs is the primary task of the filtration theory and special interest to the practitioners. Because of the variety of natural conditions necessary to account for in setting, the number of tasks is steadily increasing. At present, several analytical solutions of problems for homogeneous reservoirs with the simplest boundary conditions have been constructed.

---

**Citation:** Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalskiy A. A., Zelenova M. A. 2020. "The pressure field in the reservoir at a given well flow rate". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 6, no. 3 (23), pp. 58-78.

DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-58-78

---

Studying the influence of borehole conditions on pressure fields in productive formations presents interest, as in this case, it is expressed as a boundary condition in the form of an integro-differential equation, and the corresponding class of problems is not sufficiently studied in the fundamental sections of the mathematical physics.

In contrast to the existing works, this article constructs an analytical solution of the problem about the pressure field in the formation, represented by the classical equation of piezo-pipeline, for the case when the boundary condition in the form of the integro-differential equation describes the process of fluid extraction from the well with the help of a pump of the given productivity. The authors study the oil-saturated porous formation, opened by the producing well for the whole thickness. The pressure field in the reservoir is described by the classical piezoelectricity equation in the cylindrical coordinate system in the assumption of axial symmetry. The function of pressure perturbation distribution across the reservoir is determined considering the influence of the well. The relationship of pressures in the well and formation is established based on the law of mass conservation and Pascal's law.

The dimensionless criteria characterizing the filtration process and allowing to simplify the task definition are defined. It is shown, that all parameters, characterizing influence of well and formation, are grouped in two interrelated criteria, which define filtration process in such conditions.

The authors have presented an exact solution of the problem in the space of Laplace — Carson integral transformation with an analytical transition to the original space. In addition, they have created a numerical conversion program, based on Den Iseger's algorithm, and developed a finite-difference scheme for the task at hand. Having calculated the space-time distributions of pressure fields, the authors have compared the graphical pressure dependencies based on an analytical formula and a numerical program with the results of finite-difference calculations. That increases the reliability of the results obtained, which seems to be of great importance, since the existence and uniqueness theorems are not proved for this class of the problem in question.

The analysis of the calculation results allowed determining the contribution of the well and reservoir parameters to the pressure field. The results show that in the relaxation mode, the parameters of the well and pump have a significant influence on the formation of the pressure field. In the stabilization mode, the contribution of its physical parameters is predominant.

### **Keywords**

Filtration, flow rate, well, exact solution, Laplace — Carson integral transformation, numerical implementation, comparison of calculations.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-58-78**

### **REFERENCES**

1. Buzinov S. N., Umrihin I. D. 1964. Research of Formations and Wells in the Elastic Regime of Filtration. Moscow: Nedra. 272 pp. [In Russian]

- 
2. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. Operational Calculus. Moscow: Vysshaya shkola. 406 pp. [In Russian]
  3. Entov V. M., Chekhonin E. M. 2007. "Pressure field around a well in a layered-inhomogeneous formation". Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza, no. 1, pp. 83-90. [In Russian]
  4. Zanochuev S. A., Shabarov A. B. 2019. "An experimental method for predicting the composition and properties of a produced fluid under the conditions of a two-phase filtration of a gas-liquid mixture during field development for depletion". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 5, no. 4 (20), pp. 21-36. DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-4-21-36 [In Russian]
  5. Karslou G., Eger D. 1964. Thermal Conductivity of Solids. Moscow: Nauka. 488 pp. [In Russian]
  6. Kuznecov D. S. 1965. Special Functions. Moscow: Vysshaya shkola. 273 pp. [In Russian]
  7. Muskat M. 2004. Flow of Homogeneous Liquids in a Porous Medium. Moscow; Izhevsk: IKI. 628 pp. [In Russian]
  8. Nikolaevskiy V. N., Basniev K. S., Gorbunov A. T., Zotov G. A. 1970. Mechanics of Saturated Porous Media. Moscow: Nedra. 339 pp. [In Russian]
  9. Pyatibrat V. P., Sokolov V. A., Burakov Yu. G., Arefyev V. V., Ckhadaya N. D., Bannikova A. T. 2009. "Mathematical modeling of the pressure recovery process at the bottom of the gallery in the case of an inhomogeneous thickness of a limited linear formation". Avtomatzatsiya, telemekhanizaciya i svyaz v neftyanoy promyshlennosti, no. 6, pp. 14-18. [In Russian]
  10. Rubinshtejn L. I. 1972. Temperature Fields in Oil Reservoirs. Moscow: Nedra. 275 pp. [In Russian]
  11. Filippov A. I., Korotkova K. N. 2009. "Wave fields of pressure in the reservoir and well". Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy, vol. 12, no. 1, pp. 48-53. [In Russian]
  12. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalskiy A. A. 2018. "Coefficient averaging method in the problem of laminar gas flow in a well". Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, vol. 59, no. 1 (347), pp. 71-82. [In Russian]
  13. Filippov A. I., Mihajlov P. N., Ahmetova O. V. 2006. "The main objective of thermo logging". Teplofizika vysokikh temperature, vol. 44, no. 5, pp. 747-755. [In Russian]
  14. Charnyy I. A. 1963. Underground Hydrodynamics. Moscow: Gostoptekhizdat. 397 pp. [In Russian]
  15. Shabarov A. B., Shatalov A. V., Markov P. V., Shatalova N. V. 2018. "Relative permeability calculation methods in multiphase filtration problems". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 4, no. 1, pp. 79-109. DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-1-79-109 [In Russian]
  16. Den Iseger P. 2006. "Numerical transform inversion using Gaussian quadrature". Probability in the in Engineering and Informational Sciences, no. 20, pp. 1-44.