

Константин Юрьевич БАСИНСКИЙ¹
Дмитрий Сергеевич ЗВОНАРЕВ²

УДК 532.591

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ЖИДКОСТИ НА ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ

¹ кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры фундаментальной математики и механики,
Тюменский государственный университет
k.y.basinskij@utmn.ru

² ассистент кафедры фундаментальной математики и механики,
Тюменский государственный университет
d.s.zvonarev@utmn.ru

Аннотация

В данной статье рассматривается задача, описывающая распространение поверхностных волн в слое неоднородной жидкости. Приведена математическая модель, описывающая волновые движения на поверхности идеальной экспоненциально стратифицированной жидкости. В уравнениях и граничных условиях совершен переход к безразмерным переменным и величинам. Далее приведен линейный вариант задачи, решение которой находится в виде прогрессивных волн установившегося вида, с неизвестными амплитудными коэффициентами. Данный вид решения подставляется в уравнения и граничные условия линейной задачи, что позволяет свести определение неизвестных величин к задаче на решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате решения системы выявлены две области физических параметров с различным характером волнового движения. Получены выражения для неизвестных компонент скорости жидкости, давления, формы свободной поверхности и частоты волны.

Проведен анализ влияния на волновое движение различных параметров задачи: построены графики зависимости фазовой скорости волны от параметра стратификации

Цитирование: Басинский К. Ю. Влияние неоднородности жидкости на волновое движение / К. Ю. Басинский, Д. С. Звонарев // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2021. Том 7. № 1 (25). С. 112-125.

DOI: 10.21684/2411-7978-2021-7-1-112-125

при различной глубине слоя и длине волны. Для большего понимания характера волнового движения определены выражения для траекторий частиц жидкости. Для этого с помощью полученных выражений для компонент вектора скорости выписаны уравнения движения частиц, для решения которых используется метод асимптотических приближений. Проведен графический анализ влияния на форму траектории частицы величины параметра стратификации. Выявлено, что увеличение стратификации ведет к сжатию траектории в вертикальном направлении.

Ключевые слова

Поверхностные волны, прогрессивные волны, неоднородная жидкость, траектории частиц жидкости, фазовая скорость.

DOI: 10.21684/2411-7978-2021-7-1-112-125

Введение

Теория волновых движений стратифицированной жидкости — раздел современной гидродинамики, быстро развивающийся в последнее время, весьма интересный в теоретическом отношении и связанный с важнейшими приложениями в технике (гидротехнике, судостроении, мореплавании, энергетике) и в геофизике, океанологии, метеорологии, гидрологии, охране окружающей среды. Теории волн на поверхности неоднородной жидкости посвящено достаточно много работ, среди которых необходимо отметить работы [1-10]. Большинство прикладных задач, посвященных таким волновым движениям, решены в линейной постановке [1, 4, 7], т. е. в предположении, что амплитуда волновых движений мала по сравнению с длиной волны. Или с использованием асимптотических методов, являющихся обобщением пространственно-временного лучевого метода [2]. Относительная простота решения линейных уравнений по сравнению с полной нелинейной задачей позволяет в полной мере применить к их решению современный математический аппарат и возможности вычислительной техники. Однако даже в линейной постановке многие задачи в настоящее время не решены. В частности, в работах [1, 7] рассматривается вариант решения задачи, охватывающей не все возможные значения физических параметров волнового движения. Кроме того, не исследовано влияние параметров стратифицированной жидкости на форму траекторий движения частиц.

Данная статья посвящена вопросам определения более полной формы решения линейной задачи для прогрессивных волн на поверхности экспоненциально стратифицированной жидкости и исследования движения отдельных частиц жидкости.

Методы

1. Математическая модель

Рассмотрим слой идеальной неоднородной жидкости ограниченный сверху свободной поверхностью $z^* = \zeta^*(t^*, x^*, y^*)$ и снизу горизонтальным дном $z^* = -l^*$.

Система координат выбрана так, что плоскость $z^* = 0$ совпадает с невозмущенной свободной поверхностью, ось z^* противоположно направлена вектору сил тяжести \mathbf{g} . Волновое движение жидкости происходит в плоскости x^*Oz^* со скоростью $\mathbf{v}^* = (u^*, 0, v^*)$. Пусть по свободной поверхности в направлении оси Ox^* распространяется волна длины λ ($k = 2\pi/\lambda$ — волновое число) с фазовой скоростью c (частотой $\omega = ck$). Тогда волновые движения жидкости описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \rho^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \rho^*}{\partial z^*} &= 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0, \\ \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\mathbf{v}^{*2}}{2} \right) - \Omega^* v^* &= -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial P^*}{\partial x^*}, \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\mathbf{v}^{*2}}{2} \right) + \Omega^* u^* &= -g - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial P^*}{\partial z^*}, \quad \Omega^* = \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial z^*}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

На свободной поверхности $z^* = \zeta^*$ задаются кинематическое

$$v^* = \frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \zeta^*}{\partial x^*}, \quad z^* = \zeta^*$$

и динамическое

$$P^* = P_a^* + P_0^*, \quad z^* = \zeta^*$$

условия, где $P_0^*(z^*)$ — статическое давление, P_a^* — атмосферное давление.

На дне — условие непротекания: $v^* = 0, z^* = -l^*$.

Положим, что в состоянии покоя жидкость непрерывно стратифицирована, т. е. плотность — непрерывная функция координаты z^* . Тогда из четвертого уравнения системы (1.1) для жидкости, находящейся в состоянии покоя, следует, что статическое давление $P_0^*(z^*)$ и плотность $\rho_0^*(z^*)$ связаны соотношением: $(dP_0^*)/(dz^*) = -g\rho_0^*$. Будем рассматривать случай устойчивой экспоненциальной стратификации:

$$\rho_0^* = R e^{-a^*(z^*+l^*)} = r e^{-a^*z^*}, \quad a^* = \frac{1}{l^*} \ln \frac{R}{r},$$

где $r = \rho_0^*(0), R = \rho_0^*(-l^*), r \leq R, a^*$ — показатель стратификации. Тогда давление и плотность можно представить в виде суммы статической и динамической составляющих:

$$P^* = -g \int_{z^*}^0 \rho_0^* dz^* + p^*,$$

$$P^* = P_a^* + P_0^* + p^*, \quad \rho^* = \rho_0^* + \tilde{\rho}^* = \rho_0^*(1 + \mu),$$

где p^* — волновое возмущение давления (динамическое давление), $\tilde{\rho}^*$ и μ — размерное и безразмерное возмущения плотности соответственно. Введем безразмерные переменные и величины:

$$t = \omega t^*, x = kx^*, z = kz^*, \xi = k\xi^*, l = kl^*,$$

$$\mathbf{v}^* = c\mathbf{v}, P^* - (P_a^* + P_0^*) = p^* = Rc^2p, a^* = ka,$$

$$\rho_0^* = R\rho_0, \rho_0 = e^{-a(z+l)}, \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = -a,$$

$$\omega_0^2 = gk, c_0^2 = \frac{g}{k}, \alpha = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{c}{c_0},$$

где c_0 и ω_0 — фазовая скорость и частота волны линейной задачи для бесконечно глубокого слоя однородной идеальной жидкости соответственно. Ниже частная производная будет обозначаться соответствующим нижним индексом (например, $(\partial \rho_0)/(\partial z) = \rho_{0z}$). Линейная система уравнений для волновых возмущений в безразмерном виде запишется так:

$$u_x + v_z = 0, \mu_t = av, p_x = -\rho_0 u_t, p_z = -\rho_0 (v_t + \frac{\mu}{\alpha^2}), \quad (1.2)$$

где \mathbf{e}_z — единичный вектор оси z . Действуя оператором rot на уравнение движения, получим уравнение для определения вихревого поля:

$$\Omega_t = -(au_t + \frac{\mu_t}{\alpha^2}), rot \mathbf{v} = \Omega \mathbf{e}_y, \Omega = u_z - v_x. \quad (1.3)$$

Полагая ζ малой величиной, граничные условия (кинематическое и динамическое) линеаризацией сводятся со свободной поверхности $z = \zeta(t, x)$ на $z = 0$. Линейные граничные условия в безразмерном виде

$$\xi_t = v, p = \frac{r}{R\alpha^2} \xi, z = 0. \quad (1.4)$$

Кроме того, на дне должно быть выполнено условие непротекания: $v = 0, z = -l$ (1.5)

Таким образом, линейную модель волнового движения экспоненциально стратифицированной жидкости составляет краевая задача (1.2)-(1.5) для определения неизвестных величин: u, v, p, μ, ζ .

Результаты

2. Решение линейной задачи

Решение задачи (1.2)-(1.5) будем находить в виде прогрессивных волн установившегося вида. Представим вертикальную составляющую скорости в виде

$$v = V(z) \sin(\chi),$$

где $\chi = x - t + \theta$, θ — фаза волны. Тогда из уравнений и граничных условий системы (1.2)-(1.5) получим:

$$\begin{aligned} u &= V'(z) \cos \chi, p = \rho_0 V'(z) \cos \chi, \mu = aV \cos \chi, \\ \xi &= V(0) \cos \chi, \Omega = -a \left(V' - \frac{1}{\alpha^2} V \right) \cos \chi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из выражения для вихря Ω видно, что ненулевые значения он принимает при значениях параметра $a \neq 0$, т. е. наличие вихревого движения обусловлено именно учетом стратификации жидкости. В этом заключается отличие решения данной задачи от решения задачи для идеальной однородной жидкости [1], где можно перейти к модели потенциального течения.

Подставив выражения (2.1) в уравнение (1.3) и граничные условия (1.4) и (1.5), получим задачу для определения функции $V(z)$:

$$V'' - aV' - \left(1 - \frac{a}{\alpha^2}\right)V = 0,$$

$$V' - \frac{1}{\alpha^2}V = 0, z = 0,$$

$$V = 0, z = -l.$$

Приведенное выше уравнение — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами характеристические корни которого

$$n \pm \sqrt{q},$$

где:
$$n = \frac{a}{2}, q = n^2 - \frac{2n}{b} + 1, b = \alpha^2.$$

Отсюда видно, что вид решения уравнения зависит от того, какие значения принимает параметр q . Следует рассмотреть три случая: когда $q > 0$, $q = 0$ и $q < 0$.

Случай, когда $q > 0$, приводит к решению:

$$V = Ae^{nz}sh(\sqrt{q}(z+l)).$$

Здесь уже учтено условие при $z = -l$. Подстановка данного выражения в условие при $z = 0$ дает следующее соотношение:

$$\frac{\frac{1}{b} - n}{\sqrt{q}} = cth(l\sqrt{q}). \quad (2.2)$$

Это так называемое дисперсионное соотношение, которое позволяет определять частоту волны при заданных параметрах задачи. Постоянная A подлежит определению из начальных условий.

Таким образом, решение задачи принимает вид:

$$v = Ae^{nz}sh(\sqrt{q}(z+l))\sin(x-t+\theta),$$

$$u = Ae^{nz} \left(nsh(\sqrt{q}(z+l)) + \sqrt{q}ch(\sqrt{q}(z+l)) \right) \cos(x-t+\theta),$$

$$p = \rho_0 Ae^{nz} \left(nsh(\sqrt{q}(z+l)) + \sqrt{q}ch(\sqrt{q}(z+l)) \right) \cos(x-t+\theta), \quad (2.3),$$

$$\mu = aAe^{nz}sh(\sqrt{q}(z+l))\cos(x-t+\theta),$$

$$\xi = Ash(l\sqrt{q})\cos(x-t+\theta).$$

При $q < 0$, проведя такие же вычисления, получим следующие выражения для искомых функций:

$$\begin{aligned}v &= Ae^{nz} \sin(\sqrt{q}(z+l)) \sin(x-t+\theta), \\u &= Ae^{nz} \left(n \sin(\sqrt{q}(z+l)) + \sqrt{q} \cos(\sqrt{q}(z+l)) \right) \cos(x-t+\theta), \\p &= \rho_0 Ae^{nz} \left(n \sin(\sqrt{q}(z+l)) + \sqrt{q} \cos(\sqrt{q}(z+l)) \right) \cos(x-t+\theta), \\ \mu &= a Ae^{nz} \sin(\sqrt{q}(z+l)) \cos(x-t+\theta), \\ \xi &= A \sin(l\sqrt{q}) \cos(x-t+\theta).\end{aligned} \quad (2.4)$$

Дисперсионное соотношение теперь примет вид:

$$\frac{\frac{1}{b} - n}{\sqrt{|q|}} = \operatorname{ctg}(l\sqrt{|q|}). \quad (2.5)$$

При $q = 0$ решение задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}v &= Ae^{nz}(z+l) \sin(x-t+\theta), \\u &= Ae^{nz}((z+l)n+1) \cos(x-t+\theta), \\p &= \rho_0 Ae^{nz}((z+l)n+1) \cos(x-t+\theta), \\ \mu &= a Ae^{nz}(z+l) \sin(x-t+\theta), \\ \xi &= A \cos(x-t+\theta), \\ \frac{1}{b} - n &= \frac{1}{l}.\end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\quad (2.7)$$

Обсуждение

3. Анализ полученного решения линейной задачи

Как было показано выше, вид решения задачи зависит от того, какие значения принимает параметр q . Всего было выделено три возможных варианта решения, однако важно отметить, что при изменении значений параметра q никакого резкого перехода от одного режима к другому не должно наблюдаться. В этом можно убедиться если в решениях (2.3), (2.4) константу A представить в виде $A = \tilde{A}/\sqrt{|q|}$, а затем перейти к пределу при q , стремящемуся к нулю справа или слева соответственно. Тогда эти решения в пределе принимают вид (2.6). То же самое можно сказать и про дисперсионное соотношение. В подтверждение вышесказанного, проиллюстрируем график зависимости $b(n)$ (рис. 1), который получается с помощью численного решения соотношений (2.2), (2.5) и (2.7). Данный рисунок демонстрирует как решения трех приведенных выше дисперсионных соотношений соединяются в один непрерывный график.

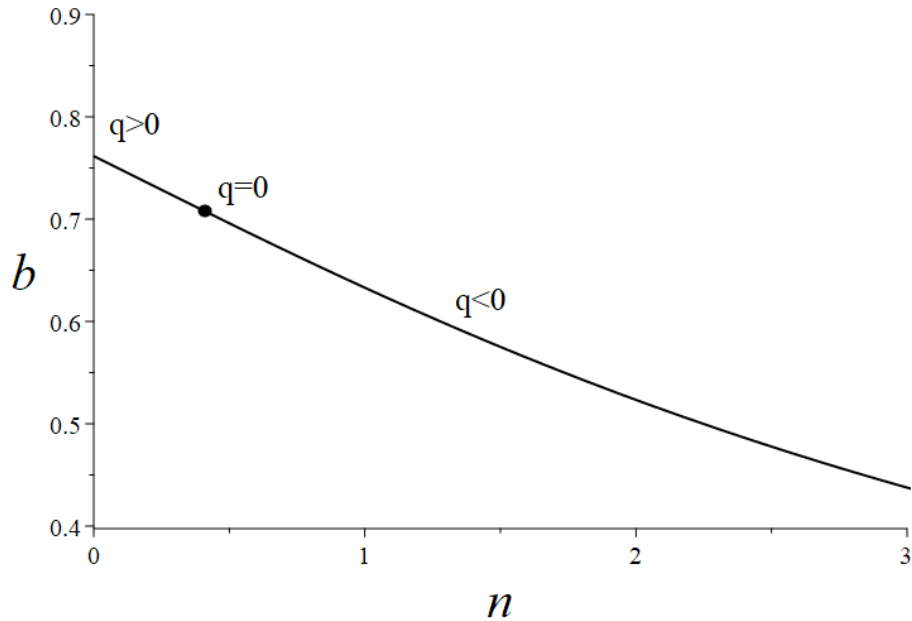


Рис. 1. Кривая дисперсионного соотношения

Fig. 1. Curve dispersion relation

Далее приведем графики зависимости фазовой скорости c от параметра стратификации a при разных значениях глубины слоя l (рис. 2) и длины волны λ (рис. 3). Видно, что фазовая скорость убывает с возрастанием стратификации. При этом большим значениям глубины слоя жидкости и длины волны соответствуют большие значения фазовой скорости.

Для большего понимания зависимости характера волнового движения от степени неоднородности жидкости определим и проиллюстрируем форму траекторий частиц жидкости. Для этого выпишем уравнения движения частиц жидкости:

$$\frac{dx^*}{dt^*} = u^*, \quad \frac{dz^*}{dt^*} = v^*.$$

Подставляя в данные уравнения найденные выражения для компонент скорости, получим следующие системы дифференциальных уравнений:

при $q > 0$:

$$\frac{dx^*}{dt^*} = \varepsilon c A e^{\frac{a}{2} k z^*} \left(\frac{a^*}{2} \operatorname{sh}(\sqrt{q^*}(z^* + l^*)) + \sqrt{q^*} \operatorname{ch}(\sqrt{q^*}(z^* + l^*)) \right) \times \\ \times \cos(k(x^* - ct^* + \theta^*)),$$

$$\frac{dz^*}{dt^*} = \varepsilon c A e^{\frac{a}{2} k z^*} \operatorname{sh}(\sqrt{q^*}(z^* + l^*)) \sin(k(x^* - ct^* + \theta^*));$$

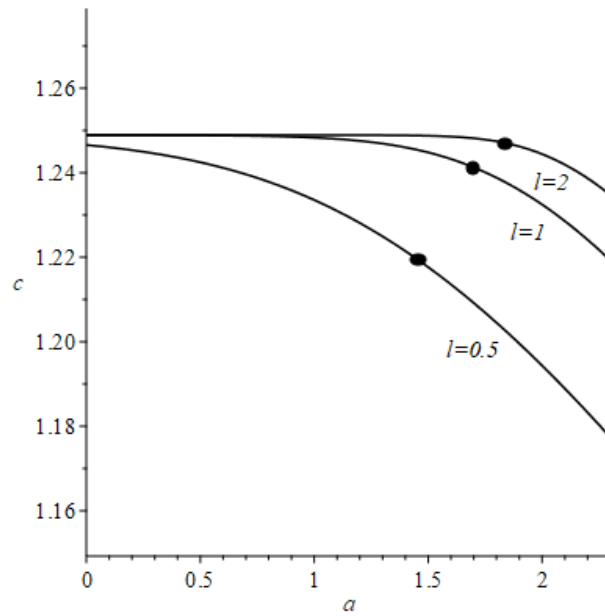


Рис. 2. Кривая зависимости фазовой скорости от параметра стратификации, при разных значениях глубины

Fig. 2. Phase velocity versus stratification parameter curve, at different depths

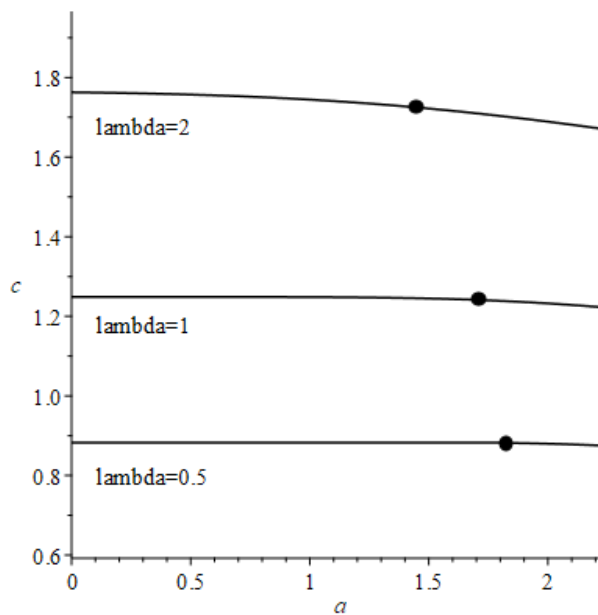


Рис. 3. Кривая зависимости фазовой от параметра стратификации, при разных значениях длины волны

Fig. 3. Phase velocity versus stratification parameter curve, at different wavelength

при $q < 0$:

$$\frac{dx^*}{dt^*} = \varepsilon c A e^{\frac{a}{2} k z^*} \left(\frac{a^*}{2} \sin(\sqrt{q^*}(z^* + l^*)) + \sqrt{q^*} \cos(\sqrt{q^*}(z^* + l^*)) \right) \times \\ \times \cos(k(x^* - ct^* + \theta^*)),$$

$$\frac{dz^*}{dt^*} = \varepsilon c A e^{\frac{a}{2} k z^*} \sin(\sqrt{q^*}(z^* + l^*)) \sin(k(x^* - ct^* + \theta^*)),$$

где

$$q^* = \frac{1}{k} \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 - \frac{ac_0^2}{c^2} + 1 \right), \theta^* = \frac{\theta}{k}.$$

Решения данных систем будем искать в виде рядов по параметру ε :

$$x^* = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots,$$

$$z^* = z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots.$$

Подставляя данные ряды в выше приведенные системы и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим:

при $q > 0$:

$$\frac{dx_0}{dt^*} = 0, \frac{dz_0}{dt^*} = 0,$$

$$\frac{dx_1}{dt^*} = \varepsilon c A e^{\frac{a}{2} k z_0} \left(\frac{a^*}{2} \operatorname{sh}(\sqrt{q^*}(z_0 + l^*)) + \sqrt{q^*} \operatorname{ch}(\sqrt{q^*}(z_0 + l^*)) \right) \times \\ \times \cos(k(x_0 - ct^* + \theta^*)),$$

$$\frac{dz_1}{dt^*} = \varepsilon c A e^{\frac{a}{2} k z_0} \operatorname{sh}(\sqrt{q^*}(z_0 + l^*)) \sin(k(x_0 - ct^* + \theta^*));$$

при $q < 0$:

$$\frac{dx_0}{dt^*} = 0, \frac{dz_0}{dt^*} = 0,$$

$$\frac{dx_1}{dt^*} = \varepsilon c A e^{\frac{a}{2} k z_0} \left(\frac{a^*}{2} \sin(\sqrt{q^*}(z_0 + l^*)) + \sqrt{q^*} \cos(\sqrt{q^*}(z_0 + l^*)) \right) \times \\ \times \cos(k(x_0 - ct^* + \theta^*)),$$

$$\frac{dz_1}{dt^*} = \varepsilon c A e^{\frac{a}{2} k z_0} \sin(\sqrt{q^*}(z_0 + l^*)) \sin(k(x_0 - ct^* + \theta^*)).$$

При построении данных систем ограничились только коэффициентами при ε^0 и ε^1 , т. к. решена только линейная задача и для учета других слагаемых в выражениях для траекторий необходимо решать нелинейную задачу.

Проинтегрировав выше приведенные уравнения, получим:

при $q > 0$:

$$x^* = x_L - \frac{\varepsilon}{k} A e^{\frac{a}{2} k z_L} \left(\frac{a^*}{2} \operatorname{sh}(\sqrt{q^*}(z_L + l^*)) + \sqrt{q^*} \operatorname{ch}(\sqrt{q^*}(z_L + l^*)) \right) \times \\ \times \sin(k(x_L - ct^* + \theta^*)),$$

$$z^* = z_L + \frac{\varepsilon}{k} A e^{\frac{a}{2} k z_L} \operatorname{sh}(\sqrt{q^*}(z_L + l^*)) \cos(k(x_L - ct^* + \theta^*));$$

при $q < 0$:

$$x^* = x_L - \frac{\varepsilon}{k} A e^{\frac{a}{2} k z_L} \left(\frac{a^*}{2} \sin(\sqrt{q^*}(z_L + l^*)) + \sqrt{q^*} \cos(\sqrt{q^*}(z_L + l^*)) \right) \times \\ \times \sin(k(x_L - ct^* + \theta^*)),$$

$$z^* = z_L + \frac{\varepsilon}{k} A e^{\frac{a}{2} k z_L} \sin(\sqrt{q^*}(z_L + l^*)) \cos(k(x_L - ct^* + \theta^*));$$

здесь x_L и z_L — лагранжевы координаты частицы жидкости.

Исключив время t^* из данных уравнений, получим, что траектории частиц жидкости имеют форму эллипса:

$$\frac{(x^* - x_L)^2}{E^2} + \frac{(z^* - z_L)^2}{F^2} = 1,$$

где при $q > 0$:

$$E = \frac{\varepsilon}{k} A e^{\frac{a}{2} k z_L} \left(\frac{a^*}{2} \operatorname{sh}(\sqrt{q^*}(z_L + l^*)) + \sqrt{q^*} \operatorname{ch}(\sqrt{q^*}(z_L + l^*)) \right),$$

$$F = \frac{\varepsilon}{k} A e^{\frac{a}{2} k z_L} \operatorname{sh}(\sqrt{q^*}(z_L + l^*));$$

при $q < 0$:

$$E = \frac{\varepsilon}{k} A e^{\frac{a}{2} k z_L} \left(\frac{a^*}{2} \sin(\sqrt{q^*}(z_L + l^*)) + \sqrt{q^*} \cos(\sqrt{q^*}(z_L + l^*)) \right),$$

$$F = \frac{\varepsilon}{k} A e^{\frac{a}{2} k z_L} \sin(\sqrt{q^*}(z_L + l^*)).$$

На рис. 4 приведен график зависимости отношения длин полуосей, траекторий жидких частиц, от параметра стратификации. Видно, что это отношение увеличивается при заглублении, что согласуется с классическим результатом для идеальной однородной жидкости ([1]). Кроме того, это отношение становится больше с увеличением параметра стратификации.

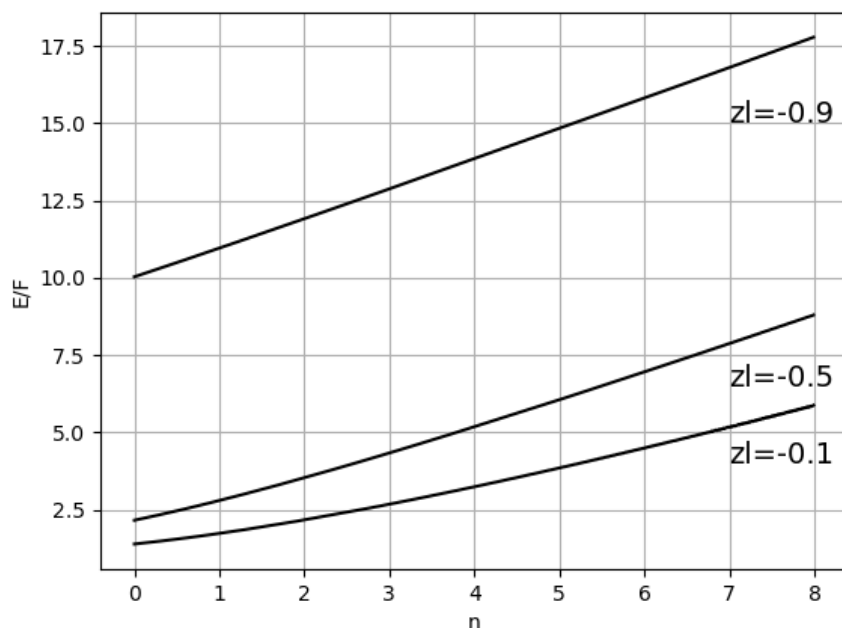


Рис. 4. Кривая зависимости отношения длин полуосей, траекторий жидких частиц, от параметра стратификации

Fig. 4. Curve of dependence of the lengths of the semiaxes, trajectories of liquid particles, on the stratification parameter

Заключение

Таким образом, была исследована краевая задача, описывающая распространение поверхностных волн в слое неоднородной, экспоненциально стратифицированной жидкости. Задача была сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Были выделены две области с различными видами решения. Для каждой из них получены выражения для составляющих скорости волнового движения, возмущений давления и плотности, а также формы свободной поверхности. Определены выражения для траекторий частиц жидкости. Исследовано влияние стратификации на величину фазовой скорости и форму частиц жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алешков Ю. З. Течение и волны в океане. / Ю. З. Алешков. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996. 224 с.
2. Булатов В. В. Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах / В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров. М.: Наука, 2005. 195 с.
3. Габов С. А. Введение в теорию нелинейных волн / С. А. Габов. М.: Изд-во МГУ, 1988. 176 с.

4. Габов С. А. Задачи динамики стратифицированных жидкостей / С. А. Габов, А. Г. Свешников. М.: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1986. 288 с.
5. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане / Ю. З. Миропольский. Л.: Гидромет, 1981. 384 с.
6. Овсянников Л. В. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др. Новосибирск: Наука, 1985. 318 с.
7. Перегудин С. И. Волновые движения в жидких и сыпучих средах. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2004. 288 с.
8. Кистович А. В. Линейная теория распространения внутренних волн в произвольно стратифицированной жидкости / А. В. Кистович, Ю. Д. Чашечкин // Прикладная механика и техническая физика. 1998. Том 39, № 5. С. 88-98.
9. Keller J. (1969). Internal Wave Propagation in an Inhomogeneous Fluid of Non-Uniform Depth / J. Keller, V. Mow // Journal of Fluid Mechanics. 1969. No. 38 (2). Pp. 365-374.
10. Paul P. Surface Wave Propagation in Inhomogeneous Liquid Layer over a Heterogeneous Anisotropic Elastic Half Space. / P. Paul, S. Kundu, D. Mandal // Applications of Fluid Dynamics. Lecture Notes in Mechanical Engineering. / M. Singh, B. Kushvah, G. Seth, J. Prakash (eds.). Singapore: Springer, 2018. Pp. 631-642.

Konstantin Yu. BASINSKY¹
Dmitry S. ZVONAREV²

UDC 532.591

FLUID INHOMOGENEITY INFLUENCING WAVE MOTION

¹ Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor,
Department of Fundamental Mathematics and Mechanics,
University of Tyumen
k.y.basinskij@utmn.ru

² Assistant, Department of Fundamental Mathematics and Mechanics,
University of Tyumen
d.s.zvonarev@utmn.ru

Abstract

This article deals with a problem that describes the propagation of surface waves in a layer of an inhomogeneous fluid. The authors present a mathematical model that describes wave motions on the surface of an ideal exponentially stratified fluid. In the equations and boundary conditions, the transition to dimensionless variables and quantities has been completed. Next, a linear version of the problem follows, the solution of which is in the form of progressive waves of a steady-state form with unknown amplitude coefficients. This type of solution is substituted into the equations and boundary conditions of the linear problem, which makes it possible to reduce the determination of unknown quantities to the problem of solving a system of ordinary differential equations. Solving the system has allowed identifying two areas of physical parameters with different nature of wave motion. Expressions are obtained for the unknown components of the fluid velocity, pressure, free surface shape, and wave frequency.

This article contains the analysis of the influence of various parameters of the problem on the wave motion: graphs of the dependence of the phase velocity of the wave on the stratification parameter are constructed for different layer depths and wavelengths. For a better understanding of the nature of wave motion, the expressions for the trajectories of liquid particles are determined. This has required writing the equations of

Citation: Basinsky K. Yu., Zvonarev D. S. 2021. "Fluid inhomogeneity influencing wave motion". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 7, no. 1 (25), pp. 112-125.

DOI: 10.21684/2411-7978-2021-7-1-112-125

motion of particles using the obtained expressions for the components of the velocity vector; these equations are solved with the method of asymptotic approximations. A graphical analysis of the effect of the stratification parameter value on the particle trajectory shape is carried out. The results have revealed that an increase in stratification leads to a compression of the trajectory in the vertical direction.

Keywords

Surface waves, progressive waves, inhomogeneous fluid, trajectories of fluid particles, phase velocity.

DOI: 10.21684/2411-7978-2021-7-1-112-125

REFERENCES

1. Aleshkov Yu. Z. 1996. *Current and Waves in the Ocean*. St. Petersburg: Publishing house of St. Petersburg State University. 224 pp. [In Russian]
2. Bulatov V. V. Vladimirov Yu. V. 2005. *Internal Gravitational Waves in Inhomogeneous Media*. Moscow: Nauka. 195 pp. [In Russian]
3. Gabov S. A. 1988. *Introduction to the Theory of Nonlinear Waves*. Moscow: MSU Publishing. 176 pp. [In Russian]
4. Gabov S. A., Sveshnikov A. G. 1986. *Problems of Dynamics of Stratified Liquids*. Moscow: Nauka. The main editorial board of physics and mathematics literature. 288 pp. [In Russian]
5. Miropolskii Yu. Z. 1981 *Dynamics of Internal Gravitational Waves in the Ocean*. Leningrad: Hydromet. 384 pp. [In Russian]
6. Ovsyannikov L. V. 1985. *Nonlinear Problems of the Theory of Surface and Internal Waves*. Novosibirsk: Nauka. 318 pp. [In Russian]
7. Peregudin S. I. 2004. *Wave Motions in Liquid and Granular States*. St. Petersburg: Publishing House of St. Petersburg State University. 288 pp. [In Russian]
8. Kistovich A. V., Chashechkin Yu. D. 1998. "The linear theory of internal waves spreading in random stratified fluid". *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, vol. 39, no. 5, pp. 88-98. [In Russian]
9. Keller J., Mow V. 1969. "Internal Wave Propagation in an Inhomogeneous Fluid of Non-Uniform Depth". *Journal of Fluid Mechanics*, no. 38 (2), pp. 365-374.
10. Paul P., Kundu S., Mandal D. 2018. "Surface Wave Propagation in Inhomogeneous Liquid Layer over a Heterogeneous Anisotropic Elastic Half Space". In: Singh M., Kushvah B., Seth G., Prakash J. (eds.). *Applications of Fluid Dynamics. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Singapore: Springer, pp. 631-642.