

Сергей Валерьевич СЕРЁГИН<sup>1</sup>

УДК 539.3:534.1

## **О ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ РАДИАЛЬНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ КОЛЬЦЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

<sup>1</sup> кандидат технических наук, старший научный сотрудник  
управления научно-исследовательской деятельности,  
Комсомольский-на-Амуре государственный университет  
seregin-komshome@yandex.ru

### **Аннотация**

В настоящее время активно ведутся разработки волновых твердотельных гироскопов — ВТГ. Резонаторы ВТГ имеют динамическую асимметрию, которая приводит к специфическим особенностям при изгибных колебаниях колец, что, в свою очередь, может привести к неустойчивой работе ВТГ. В научной литературе результаты теоретических исследований не всегда согласуются с экспериментальными данными. В ряде работ автора уточнение математической модели привело к ряду новых результатов. Так, например, в работах показано, что некоторые начальные несовершенства формы и присоединенные массы приводят к появлению радиальных форм колебаний. При этом частоты, соответствующие радиальным формам колебаний при определенных геометрических и волновых параметрах кольца, могут быть соизмеримы с частотами, соответствующими изгибным формам колебаний. Однако численно и экспериментально подтвердить эту особенность до настоящего времени, к сожалению, не удалось. Считается, что частоты радиальных колебаний либо присутствуют в спектре частот, но всегда находятся на частотах высших осцилляций, либо отсутствуют вовсе. В настоящей статье данный вывод поставлен под сомнение. На конкретном примере колебаний изолированного кольца показано, что частоты радиальных колебаний могут быть не только одного порядка с частотами изгибных колебаний, как показано в предыдущих

---

**Цитирование:** Серёгин С. В. О возможности возникновения радиальных форм колебаний кольцевых элементов / С. В. Серёгин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Том 4. № 1. С. 132-143.

DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-1-132-143

---

работах автора, но и могут находиться в спектре низших частот (второго, третьего тона), соответствующих изгибным формам колебаний.

#### **Ключевые слова**

Кольцо, резонатор, волновой твердотельный гироскоп, изгибные, радиальные колебания, расщепление, частотный спектр, резонанс.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-1-132-143**

#### **Введение**

В настоящее время активно ведутся разработки волновых твердотельных гироскопов — ВТГ [2, 3, 29]. Расчетная модель простого резонатора волнового твердотельного гироскопа является оболочка вращения либо упругое кольцо [12, 13, 18, 30], закрепленные относительно оси чувствительности. Резонаторы имеют начальные отклонения от идеальной круговой формы [6], неоднородное распределение плотности материала [14, 15, 17] и присоединенные массы [16, 21, 22]. Такие неправильности приводят к специфическим особенностям при изгибных колебаниях колец [9, 16, 21, 22], что, в свою очередь, может привести к неустойчивой работе ВТГ.

В научной литературе имеются работы по изучению динамического поведения тонких колец. Однако результаты исследований не всегда согласуются с экспериментальными данными.

Так, например, в работах [8, 21, 22, 25] авторы, предложив уточненный подход к построению математической модели, показали, что некоторые начальные несовершенства формы и присоединенные массы приводят к появлению радиальных форм колебаний. При этом частоты, соответствующие радиальным формам колебаний, при определенных геометрических и волновых параметрах кольца могут быть соизмеримы с частотами, соответствующими изгибным формам колебаний. Полученные новые решения качественно и количественно лучше согласуются с экспериментальными данными, чем общепринятые традиционные решения [7]. Однако численно и экспериментально подтвердить эту особенность до настоящего времени, к сожалению, не удавалось [20, 23, 27]. Считается, что частоты радиальных колебаний либо присутствуют в спектре частот, но всегда находятся на частотах высших осцилляций [4, 10, 11, 19, 24, 26, 28], либо отсутствуют вовсе [7]. Именно поэтому, частоты радиальных колебаний не оказывают никакого влияния на напряженно-деформируемое состояние конструкций и не учитываются при расчетах [7].

В настоящей статье данный вывод поставлен под сомнение. На конкретном примере колебаний изолированного кольца показано, что частоты радиальных колебаний не только могут быть одного порядка с частотами изгибных колебаний, как показано в [8, 21, 22, 25] для кольца и в [8, 10, 19, 21, 24, 26] для оболочки конечной длины, но и могут находиться в спектре низших частот (второго, третьего тона), соответствующих изгибным формам колебаний.

### Аналитическое решение

Если кольцо единичной ширины, радиусом  $R$ , толщиной  $h$  имеет начальные отклонения от идеальной круговой формы  $w_0(y)$ , изменяющиеся по закону  $w_0(y) = h(a_{10} \sin \beta_0 y + a_{20} \cos \beta_0 y)$ , где  $a_{10} = a_0 \cos \varphi_0$ ;  $a_{20} = a_0 \sin \varphi_0$ ;  $a_0$  — безразмерная амплитуда несовершенств;  $y$  — круговая координата несовершенств;  $\beta_0 = n_0/R$ ,  $n_0$  — число волн несовершенств формы в окружном направлении, то, согласно уточненному подходу к построению математической модели [25], используя уравнения движения теории пологих оболочек [7], при устремлении длины оболочки к бесконечности получим систему связанных модальных уравнений следующего вида. Обозначения общепринятые [21]:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \omega_n^2 a_1 - \frac{12}{\varepsilon^{0,5}} \omega_n^2 a_3 a_{10} + 6\omega_n^2 a_{10} (a_1 a_{10} + a_2 a_{20}) &= 0; \\ \ddot{a}_2 + \omega_n^2 a_2 - \frac{12}{\varepsilon^{0,5}} \omega_n^2 a_3 a_{20} + 6\omega_n^2 a_{20} (a_2 a_{20} + a_1 a_{10}) &= 0; \\ \ddot{a}_3 + \frac{12}{\varepsilon} \omega_n^2 a_3 - \frac{6}{\varepsilon^{0,5}} \omega_n^2 (a_1 a_{10} + a_2 a_{20}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Из системы динамических уравнений (1) видно, что начальные несовершенства формы приводят к «связанности сопряженных изгибных форм и взаимодействию низкочастотных изгибных форм колебаний с высокочастотными радиальными формами ( $\omega_n^2 = Dn^4 / \rho h R^4$  — приближенное значение квадрата частоты свободных изгибных колебаний динамически симметричного кольца,  $\varepsilon = n^4(h/R)^2$  — параметр волнообразования, характеризующий относительную толщину кольца). Частотное уравнение (1) определяет три собственные частоты  $\Omega_{ni} = \omega_{ni} / \omega_n$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Первым двум  $\Omega_{n1}$ ,  $\Omega_{n2}$  соответствуют преимущественно изгибные колебания, а третьей  $\Omega_{n3}$  — преимущественно радиальные формы колебаний».

В традиционном решении, система (1) имеет только два первых уравнения и  $a_3 = 0$ . Характеристическое уравнение определяет две расщепленные собственные частоты, соответствующие изгибным формам колебаний. Т. е. традиционное решение не предусматривает возникновение радиальных форм колебаний [7]. «Меньшая из расщепленных собственных частот равна частоте колебаний идеального кольца  $\Omega_{n1} = 1$ , а большая — увеличивается с ростом амплитуды начальных несовершенств  $\Omega_{n2} = \sqrt{1 + 6a_0^2}$ . Расстройка частотного спектра  $\Delta = \Omega_{n2} - \Omega_{n1}$  может быть довольно существенной. Последнее обстоятельство противоречит известным экспериментальным данным [7], которые свидетельствуют о незначительном расщеплении частотного спектра».

В новом решении начальные несовершенства «уменьшают низшую из расщепленных собственных частот  $\Omega_{n1}$ , при этом ее снижение зависит и от ампли-

туды начальной погиби, и от параметра волнообразования  $\varepsilon$ . Большая частота  $\Omega_{n2}$  равна 1. Расстройка частот оказывается незначительной».

Если кольцо идеальное,  $a_{10} \equiv 0$ ,  $a_{20} \equiv 0$ , то система динамических уравнений (1) имеет более простой вид:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \omega_n^2 a_1 &= 0; \\ \ddot{a}_2 + \omega_n^2 a_2 &= 0; \\ \ddot{a}_3 + \frac{12}{\varepsilon} \omega_n^2 a_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В этом случае, как видим, частоты не расщепляются, а частота радиальных колебаний  $\Omega_{n3} = 12/\varepsilon$  во много раз больше частот, соответствующих изгибным формам колебаний.

### Численное решение МКЭ

В программном комплексе MSC «Nastran» смоделирована и решена задача колебаний изолированного кольца ( $R/h = 200$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  мПа,  $\rho = 7\,800$  кг/м<sup>3</sup> шириной  $a = 0,005$  м, толщиной  $h = 0,005$  м, радиусом  $R = 1$  м). Количество конечных элементов 3 150. Кольцо совершает колебания в своей плоскости. Для изучения условий возникновения и поиска радиальных форм колебаний проведено множество расчетов и исследовано влияние всевозможных вариантов граничных условий. В результате расчетов обнаружено возникновение радиальных форм колебаний на частотах низших осцилляций при одном единственном варианте закрепления — это в случае, когда отсутствуют моменты по всем степеням свободы и перемещения вдоль торцевого сечения. Результаты расчета спектра частот для идеальной оболочки представлены в таблице 1.

Видим, что частотам первого ( $n = 2$ ), третьего ( $n = 3$ ) и четвертого ( $n = 4$ ) тонов соответствуют изгибные формы колебаний. Частоте второго тона  $\lambda = 805,91$  Гц соответствуют радиальная форма колебаний. Визуализация представлена на рис. 1.

Таблица 1

Спектр низших частот колебаний идеального кольца

Table 1

The spectrum of the lowest vibrational frequencies of an ideal ring

Количество волн $n$	$\lambda$ , Гц
2	541,76
форма радиальных колебаний	805,91
3	1 057,8
4	1 553,3

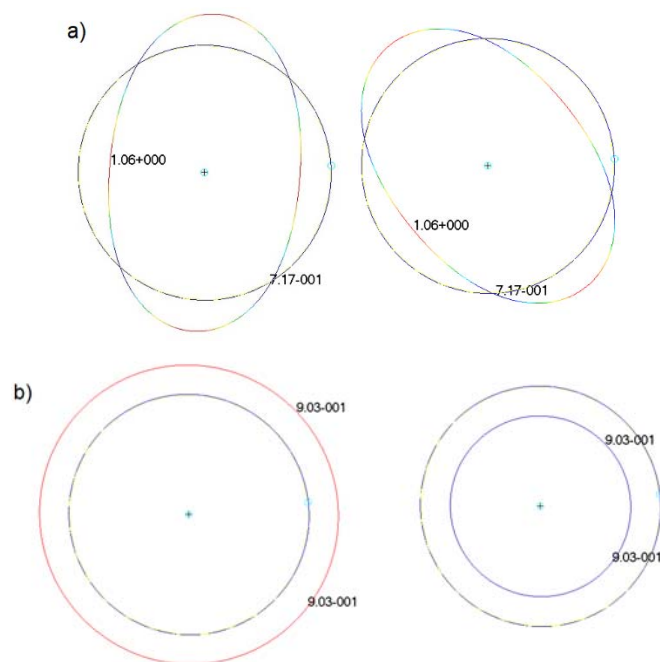


Рис. 1. а) Сопряженные изгибные формы при  $\lambda_{21} = \lambda_{22} = 541,76$  Гц; б) Радиальная форма колебаний  $\lambda_3 = 805,91$  Гц

Fig. 1. а) conjugate bending molds at  $\lambda_{21} = \lambda_{22} = 541.76$  Hz; б) the radial mode shape  $\lambda_3 = 805.91$  Hz

### Заключение

Таким образом показано, что радиальные формы колебаний могут возникать не только на частотах высших осцилляций, как это принято считать в настоящее время, но и на низших частотах спектра.

Стоит упомянуть выводы, полученные в результате эксперимента, проведенного в работе [1]. Авторы отмечают, что при возбуждении радиальных форм колебаний возбуждались формы, близкие к изгибным формам колебаний и наоборот. Это означает, что при колебаниях основания волновых твердотельных гироскопов в кольцевом резонаторе могут возбуждаться формы, отличные от возбуждаемой. А парциальные частоты кольца будут взаимодействовать с частотами колебаний основания ВТГ, в результате такой «перекачки» энергии могут происходить сложные и специфические явления [5] при изгибных колебаниях резонаторов ВТГ.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Абакумов А. И. Поведение сферической оболочки с присоединенной массой при импульсном нагружении / А. И. Абакумов, В. В. Егунов, В. Н. Мохов, А. В. Певницкая, В. П. Соловьев, А. А. Учаев // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький, 1984. С. 109-113.
2. Басараб М. А. Миниатюрные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов / М. А. Басараб, Б. С. Лунин, В. А. Матвеев, А. В. Фомичев, Е. А. Чуманкин, А. В. Юрин // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Приборостроение». 2014. № 4. С. 80-96.
3. Джанджгава Г. И. Бесплатформенная инерциальная навигационная система на базе твердотельного волнового гироскопа / Г. И. Джанджгава, К. А. Бахонин, Г. М. Виноградов, А. В. Требухов // Гироскопия и навигация. 2008. № 1. С. 22-33.
4. Егорычев О. А. Собственные продольно-радиальные колебания упругой цилиндрической оболочки жестко закрепленной по торцу / О. А. Егорычев, О. И. Поддаева // Вестник МГСУ. 2007. № 1. С. 35-36.
5. Карпова А. П. Приближенное вычисление амплитуд циклов, бифурцирующих при наличии резонансов / А. П. Карпова, Ю. И. Сапронов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. № 3. С. 12-22.
6. Козубняк С. А. Расщепление собственных частот колебаний цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, вызванное возмущением формы / С. А. Козубняк // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Приборостроение». 2015. № 3. С. 39-49.
7. Кубенко В. Д. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Т. С. Краснополякая. Киев: Наук. думка, 1984. 220 с.
8. Лейзерович Г. С. Исследование динамических характеристик круговых цилиндрических оболочек с начальными неправильностями: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук, 01.02.04 — механика деформируемого твердого тела / Г. С. Лейзерович. Комсомольск-на-Амуре: ГОУ ВПО «КнАГТУ», 2011. 329 с.
9. Лейзерович Г. С. О влиянии малой присоединенной массы на расщепление частотного спектра кругового кольца с начальными неправильностями / Г. С. Лейзерович, Н. Б. Приходько, С. В. Серёгин // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. № 6. С. 49-51.
10. Лейзерович Г. С. Свободные колебания круговых цилиндрических оболочек с присоединенной малой сосредоточенной массой / Г. С. Лейзерович, С. В. Серёгин // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57. № 5. С. 90-96. DOI: 10.15372/PMTF20160510
11. Леоненко Д. В. Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек / Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. 2010. № 3 (12). С. 53-56.
12. Лысов А. Н. Прикладная теория гироскопов: учебное пособие / А. Н. Лысов, Н. Т. Виниченко, А. А. Лысова. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2009. 254 с.
13. Мартыненко Ю. Г. Динамика кольцевого микромеханического гироскопа в режиме вынужденных колебаний / Ю. Г. Мартыненко, И. В. Меркурьев, В. В. Подалков // Гироскопия и навигация. 2009. № 3 (66). С. 10-22.

14. Мартыненко Ю. Г. Управление нелинейными колебаниями вибрационного кольцевого микрогироскопа / Ю. Г. Мартыненко, И. В. Меркурьев, В. В. Подалков // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 77-89.
15. Маслов А. А. Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом нелинейности колебаний резонатора / А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. В. Меркурьев // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. № 5. С. 24-29.
16. Матвеев В. А. Балансировка металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов низкой и средней точности / В. А. Матвеев, Б. С. Лунин, М. А. Басараб, Е. А. Чуманкин // Наука и образование. 2013. № 6. DOI: 10.7463/0613.0579179
17. Меркурьев И. В. Влияние малой анизотропии материала резонатора на собственные частоты и уходы волнового твердотельного гироскопа / И. В. Меркурьев, В. В. Подалков // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2005. № 10. С. 33-36.
18. Меркурьев И. В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов / И. В. Меркурьев, В. В. Подалков. М.: Физматлит, 2009.
19. Серёгин С. В. Влияние асимметричных начальных несовершенств формы на свободные колебания тонких оболочек / С. В. Серёгин // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2016. Т. 15. № 3. С. 209-222. DOI: 10.18287/2541-7533-2016-15-3-209-222
20. Серёгин С. В. Влияние площади контакта и величины линейно распределенной и сосредоточенной массы с круговой цилиндрической оболочкой на частоты и формы свободных колебаний / С. В. Серёгин // Вестник МГСУ. 2014. № 7. С. 64-74. DOI: 10.22227/1997-0935.2014.7.64-74
21. Серёгин С. В. Динамика тонких цилиндрических оболочек с присоединенной массой / С. В. Серёгин. Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КНАГТУ», 2016. 175 с.
22. Серёгин С. В. Качественные эффекты при колебаниях кольцевых подкрепляющих элементов с присоединенной массой, как частный случай тонкой бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки / С. В. Серёгин // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2017. № 1 (682). С. 31-43.
23. Серёгин С. В. Об эффекте расщепления изгибного частотного спектра тонких круговых цилиндрических оболочек, несущих присоединенную массу / С. В. Серёгин // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 59-61.
24. Серёгин С. В. Свободные изгибно-радиальные колебания тонкой круговой цилиндрической оболочки, несущей присоединенную массу / С. В. Серёгин // Вестник МГСУ. 2014. № 11. С. 74-81. DOI: 10.22227/1997-0935.2014.11.74-81
25. Серёгин С. В. Свободные колебания бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки с начальными неправильностями и малой присоединенной массой / С. В. Серёгин, Г. С. Лейзерович // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2014. Т. 1. № 4 (20). С. 36-43.
26. Серёгин С. В. Численное и аналитическое исследование свободных колебаний круговых цилиндрических оболочек, несущих присоединенную массу, линейно распределенную вдоль образующей / С. В. Серёгин // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7. № 4. С. 378-384. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.36

27. Серёгин С. В. Влияние присоединенной массы на динамические характеристики тонкой оболочки / С. В. Серёгин, Г. С. Лейзерович // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2015. № 4. С. 83-89.
28. Тарлаковский Д. В. Нестационарные радиальные колебания электромагнитоупругого кругового цилиндра / Д. В. Тарлаковский, В. А. Щербаков // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Т. 78. № 4. С. 396-405.
29. Трутнев Г. А. Модель твердотельного волнового гироскопа в медленных переменных / Г. А. Трутнев // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. № 3. С. 421-429.
30. Ayazi F. A HARPSS Polysilicon Vibrating Ring Gyroscope / F. Ayazi, K. Najafi // IEEE, Journal of Microelectromechanical Systems. 2001. Vol. 10. № 2. Pp. 169-179.  
DOI: 10.1109/84.925732



Sergei V. SEREGIN<sup>1</sup>

## ON THE EXISTENCE POSSIBILITY OF RADIAL FORMS OF OSCILLATIONS OF RING ELEMENTS

<sup>1</sup> Cand. Sci. (Tech.), Senior Researcher,  
Department of Scientific Research,  
Komsomolsk-on-Amur State University  
seregin-komshome@yandex.ru

### Abstract

Nowadays, Hemispherical Resonator Gyroscope (HRG) are actively developed. HRG resonators have dynamic asymmetry, which leads to specific features in bending vibrations of rings, which in turn can lead to unstable operation of HRG. In the academic literature, the results of theoretical studies do not always match the experimental data. In some of the author's works, the refinement of the mathematical model led to a number of new results. They show, for example, that some initial imperfections of form and attached masses lead to the appearance of radial modes of oscillations. In this case, the frequencies corresponding to the radial oscillation forms for certain geometric and wave parameters of the ring can be commensurable with the frequencies corresponding to the flexural modes of oscillations. However, it has not been possible to confirm this feature numerically and experimentally up to this day, unfortunately. It is believed that the frequencies of radial oscillations are either present in the frequency spectrum, but always at frequencies of higher oscillations, or absent altogether. In this article, this conclusion is questioned. On the example of oscillations of an isolated ring, the paper shows that the frequencies of radial oscillations can be not only of the same order as the frequencies of bending vibrations (as shown in the author's previous works), but they can also be in the spectrum of lower frequencies (second, third tone) corresponding to bending modes.

### Keywords

Ring, resonator wave solid-state gyroscope, bending, radial oscillations, splitting, frequency spectrum, resonance.

DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-1-132-143

---

**Citation:** Seregin S. V. 2018. "On the Existence Possibility of Radial Forms of Oscillations of Ring Elements". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 4, no 1, pp. 132-143.

DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-1-132-143

**REFERENCES**

1. Abakumov A. I., Yegunov V. V., Mokhov V. N., Pevnitskaya A. V., Solovyev V. P., Uchayev A. A. 1984. "Povedeniye sfericheskoy obolochki s prisoyedinennoy massoy pri impul'snom nagruzhenii" [Behavior of a Spherical Shell with an Attached Mass under Impulse Loading]. *Prikladnyye problemy prochnosti i plastichnosti*, pp. 109-113. Gorky.
2. Basarab M. A., Lunin B. S., Matveyev V. A., Fomichev A. V., Chumankin Ye. A., Yurin A. V. 2014. "Miniatyurnyye volnovyye tverdotel'nyye giroskopy dlya malykh kosmicheskikh apparatov" [Miniature Hemispherical Resonator Gyroscope for Small Space Vehicles]. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Ser. Priborostroyeniye*, no 4, pp. 80-96.
3. Dzhandzhgava G. I., Bakhonin K. A., Vinogradov G. M., Trebukhov A. V. 2008. "Besplatformennaya inertsiyal'naya navigatsionnaya sistema na baze tverdotel'nogo volnovogo giroskopa" [Strapdown Inertial Navigation System Based on Hemispherical Resonator Gyroscope]. *Giroskopiya i navigatsiya*, no 1, pp. 22-33.
4. Yegorychev O. A., Poddayeva O. I. 2007. "Sobstvennyye prodol'no-radial'nyye kolebaniya uprugoy tsilindricheskoy obolochki zhestko zakreplennoy po tortsu" [Own Longitudinal-Radial Oscillations of an Elastic Cylindrical Shell Rigidly Fixed at the End]. *Vestnik MGSU*, no 1, pp. 35-36.
5. Karpova A. P., Sapronov Yu. I. 2008. "Priblizhennoye vychisleniye amplitud tsiklov, bifurtsiruyushchikh pri nalichii rezonansov" [Approximate Calculation of the Amplitudes of Cycles Bifurcating in the Presence of Resonances]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye nauki*, no 3, pp. 12-22.
6. Kozubnyak S. A. 2015. "Rasshchepeniye sobstvennykh chastot kolebaniy tsilindricheskogo rezonatora volnovogo tverdotel'nogo giroskopa, vyzvannoye vozmushcheniyem formy" [Splitting of the Natural Frequencies of Oscillations of a Cylindrical Resonator of a Wave Solid-State Gyroscope, Caused by a Perturbation of the Form]. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Ser. Priborostroyeniye*, no 3, pp. 39-49.
7. Kubenko V. D., Kovalchuk P. S., Krasnopolskaya T. S. 1984. *Nelineynoye vzaimodeystviye form izgibnykh kolebaniy tsilindricheskikh obolochek* [Nonlinear Interaction of the Flexural Vibrations of Cylindrical Shells]. Kiev: Nauk. dumka.
8. Leyzerovich G. S. 2011. "Issledovaniye dinamicheskikh kharakteristik krugovykh tsilindricheskikh obolochek s nachal'nymi nepravil'nostyami" [Investigation of the Dynamic Characteristics of Circular Cylindrical Shells with Initial Irregularities]. Dr. Sci. (Phys.-Math.) diss. Komsomolsk-on-Amur: KnAGTU.
9. Leyzerovich G. S., Prikhodko N. B., Serogin S. V. 2013. "O vliyaniy maloy prisoyedinennoy massy na rasshchepeniye chastotnogo spektra krugovogo kol'tsa s nachal'nymi nepravil'nostyami" [On the Influence of a Small Added Mass on the Splitting of the Frequency Spectrum of a Circular Ring with Initial Irregularities]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, no 6, pp. 49-51.
10. Leyzerovich G. S., Seregin S. V. 2016. "Svobodnyye kolebaniya krugovykh tsilindricheskikh obolochek s prisoyedinennoy maloy sosredotochennoy massoy" [Free Oscillations of Circular Cylindrical Shells with Attached Small Concentrated Mass]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, vol. 57, no 5, pp. 90-96. DOI: 10.15372/PMTF20160510

11. Leonenko D. V. 2010. "Radial'nyye sobstvennyye kolebaniya uprugikh trekhsloynnykh tsilindricheskikh obolochek" [Radial Eigenvibrations of Elastic Three-Layered Cylindrical Shells]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov*, no 3 (12), pp. 53-56.
12. Lysov A. N., Vinichenko N. T., Lysova A. A. 2009. *Prikladnaya teoriya giroskopov: uchebnoye posobiye* [Applied Theory of Gyroscopes]. Chelyabinsk: Izdatel'skiy tsentr YUUrGU.
13. Martynenko Yu. G., Merkur'yev I. V., Podalkov V. V. 2009. "Dinamika kol'tsevogo mikromekhanicheskogo giroskopa v rezhime vynuzhdennykh kolebaniy" [Dynamics of a Circular Micromechanical Gyroscope in the Forced Oscillation Mode]. *Giroskopiya i navigatsiya*, no 3 (66), pp. 10-22.
14. Martynenko Yu. G., Merkur'yev I. V., Podalkov V. V. 2008. "Upravleniye nelineynymi kolebaniyami vibratsionnogo kol'tsevogo mikrogiroskopa" [Control of Nonlinear Vibrations of a Vibrating Annular Micro Gyroscope]. *Izv. RAN. MTT*, no 3, pp. 77-89.
15. Maslov A. A., Maslov D. A., Merkur'yev I. V. 2014. "Identifikatsiya parametrov volnovogo tverdotel'nogo giroskopa s uchetom nelineynosti kolebaniy rezonatora" [Identification of the Parameters of the Wave Solid-State Gyroscope with Allowance for the Nonlinearity of Cavity Oscillations.]. *Pribory i sistemy. Upravleniye, kontrol', diagnostika*, no 5, pp. 24-29.
16. Matveyev V. A., Lunin B. S., Basarab M. A., Chumankin Ye. A. 2013. "Balansirovka metallicheskikh rezonatorov volnovykh tverdotel'nykh giroskopov nizkoy i sredney tochnosti" [Balancing of Metal Resonators of Wave Solid-State Gyroscopes of Low and Medium Accuracy]. *Nauka i obrazovaniye. Elektron. izdaniye*, no 6. DOI: 10.7463/0613.0579179
17. Merkur'yev I. V., Podalkov V. V. 2005. "Vliyaniye maloy anizotropii materiala rezonatora na sobstvennyye chastoty i ukhody volnovogo tverdotel'nogo giroskopa" [Influence of the Small Anisotropy of the Resonator Material on the Natural Frequencies and Departures of the Wave Solid-State Gyroscope]. *Pribory i sistemy. Upravleniye, kontrol', diagnostika*, no 10, pp. 33-36.
18. Merkur'yev I. V., Podalkov V. V. 2009. *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotel'nogo giroskopov* [Dynamics of Micromechanical and Hemispherical Resonator Gyroscopes]. Moscow: Fizmatlit.
19. Seregin S. V. 2016. "Vliyaniye asimmetrichnykh nachal'nykh nesovershenstv formy na svobodnyye kolebaniya tonkikh obolochek" [Influence of Asymmetric Initial Imperfections of Form on Free Oscillations of Thin Shells]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroyeniye*, vol. 15, no 3, pp. 209-222. DOI: 10.18287/2541-7533-2016-15-3-209-222
20. Seregin S. V. 2014. "Vliyaniye ploshchadi kontakta i velichiny lineynogo raspredelennoy i sosredotochennoy massy s krugovoy tsilindricheskoy obolochkoy na chastoty i formy svobodnykh kolebaniy" [Influence of the Contact Area and the Magnitude of a linearly Distributed and Concentrated Mass with a Circular Cylindrical Shell on the Frequencies and Shapes of Free Oscillations]. *Vestnik MGSU*, no 7, pp. 64-74. DOI: 10.22227/1997-0935.2014.7.64-74
21. Seregin S. V. 2016. *Dinamika tonkikh tsilindricheskikh obolochek s prisoyedinennoy massoy* [Dynamics of Thin Cylindrical Shells with Attached Mass]. Komsomol'sk-na-Amure: KnAGTU.
22. Seregin S. V. 2017. "Kachestvennyye efekty pri kolebaniyakh kol'tsevyykh podkreplyayushchikh elementov s prisoyedinennoy massoy, kak chastnyy sluchay tonkoy

- beskonechno dlinnoy krugovoy tsilindricheskoy obolochki” [Qualitative Effects with Oscillations of Annular Reinforcing Elements with an Attached Mass, as a Special Case of a Thin Infinitely Long Circular Cylindrical Shell]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye*, no 1 (682), pp. 31-43.
23. Seregin S. V. 2014. “Ob effekte rasshchepeniya izgibnogo chastotnogo spektra tonkikh krugovykh tsilindricheskikh obolochek, nesushchikh prisoyedinennuyu massu” [On the Effect of Splitting the Flexural Frequency Spectrum of Thin Circular Cylindrical Shells Carrying an Attached Mass]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, no 6 (257), pp. 59-61.
  24. Seregin S. V. 2014. “Svobodnyye izgibno-radial'nyye kolebaniya tonkoy krugovoy tsilindricheskoy obolochki, nesushchey prisoyedinennuyu massu” [Free Flexural-Radial Oscillations of a Thin Circular Cylindrical Shell Carrying an Attached Mass]. *Vestnik MGSU*, no 11, pp. 74-81. DOI: 10.22227/1997-0935.2014.11.74-81
  25. Seregin S. V. Leyzerovich G. S. 2014. “Svobodnyye kolebaniya beskonechno dlinnoy krugovoy tsilindricheskoy obolochki s nachal'nymi nepravil'nostyami i maloy prisoyedinennoy massoy” [Free Oscillations of an Infinitely Long Circular Cylindrical Shell with Initial Irregularities and a Small Attached Mass]. *Uchenyye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, vol. 1, no 4 (20), pp. 36-43.
  26. Seregin S. V. 2014. “Chislennoye i analiticheskoye issledovaniye svobodnykh kolebaniy krugovykh tsilindricheskikh obolochek, nesushchikh prisoyedinennuyu massu, lineyno raspredelennuyu vdol' obrazuyushchey” [Numerical and Analytical Study of Free Vibrations of Circular Cylindrical Shells Carrying an Attached Mass Linearly Distributed Along the Generator]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, vol. 7, no 4, pp. 378-384. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.36
  27. Seregin S. V., Leyzerovich G. S. 2015. “Vliyaniye prisoyedinennoy massy na dinamicheskiye kharakteristiki tonkoy obolochki” [Influence of the Attached Mass on the Dynamic Characteristics of a Thin Shell]. *Problemy mashinostroyeniya i avtomatizatsii*, no 4, pp. 83-89.
  28. Tarlakovskiy D. V., Shcherbakov V. A. 2016. “Nestatsionarnyye radial'nyye kolebaniya elektro-magnitouprugogo krugovogo tsilindra” [Nonstationary Radial Oscillations of an Electro-Magnetoelastic Circular Cylinder]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, vol. 78, no 4, pp. 396-405
  29. Trutnev G. A. 2015. “Model' tverdotel'nogo volnovogo giroskopa v medlennykh peremennykh” [Model of a Hemispherical Resonator Gyroscope in Slow Variables]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye nauki*, vol. 25, no 3, pp. 421-429.
  30. Ayazi F., Najafi K. 2001. “A HARPSS Polysilicon Vibrating Ring Gyroscope”. *IEEE, Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 10, no 2, pp. 169-179. DOI: 10.1109/84.925732