

# ВЕСТНИК

ТЮМЕНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математическое моделирование.

Нефть, газ, энергетика

Журнал основан в 1998 г.  
Выходит 4 раза в год

Том 9. № 3 (35)

2023

TYUMEN STATE  
UNIVERSITY

# HERALD

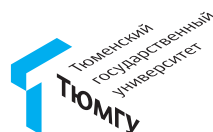
Physical and Mathematical Modeling.

Oil, Gas, Energy

Vol. 9. No. 3 (35)

Founded in 1998  
A quarterly journal

Издание включено в Перечень рецензируемых научных изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты  
диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук



## Главный редактор

*А. Б. Шабаров, Тюмень, Россия*

## Заместители главного редактора

*О. В. Ахметова, Стерлитамак, Россия*

*А. А. Губайдуллин, Тюмень, Россия*

*А. А. Захаров, Тюмень, Россия*

*А. А. Кислицын, Тюмень, Россия*

## Ответственный секретарь

*А. П. Садыкова, Тюмень, Россия*

## Редакционная коллегия

*А. А. Афанасьев, Москва, Россия*

*С. П. Баутин, Екатеринбург, Россия*

*Г. Л. Бровко, Москва, Россия*

*А. А. Вакулин, Тюмень, Россия*

*Н. А. Гумеров, Колледж-Парк, Мэриленд, США*

*В. И. Гуров, Москва, Россия*

*Б. С. Доброней, Красноярск, Россия*

*С. В. Костюченко, Тюмень, Россия*

*С. И. Лежнин, Новосибирск, Россия*

*Е. А. Новиков, Красноярск, Россия*

*О. А. Степанов, Тюмень, Россия*

*С. В. Степанов, Тюмень, Россия*

*А. В. Стрекалов, Тюмень, Россия*

*А. В. Татосов, Тюмень, Россия*

*С. Ю. Удовиченко, Тюмень, Россия*

*Ю. В. Шорников, Новосибирск, Россия*

*Д. И. Эскин, Москва, Россия*

*В. В. Ягов, Москва, Россия*

## Редакционный совет

*И. Ш. Ахатов, Сколково, Россия, США*

*А. Ю. Варакин, Москва, Россия*

*Д. А. Губайдуллин, Казань, Россия*

*Зыонг Нгок Хай, Ханой, Вьетнам*

*А. Г. Ивашико, Тюмень, Россия*

*К. К. Нанди, Силигури, Индия*

*Р. И. Нигматулин, Москва, Россия*

*А. И. Филяровский, Вроцлав, Польша*

*В. М. Фомин, Новосибирск, Россия*

*В. В. Шайдуров, Красноярск, Россия*

ISSN 2411-7978 (Print)

ISSN 2500-3526 (Online)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-72159 выдано 29 декабря 2017 г. (ранее: ПИ № ФС77-60410 от 29 декабря 2014 г.) Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

**Учредитель**

ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»

**Издатель/редакция/типография**

ТюмГУ-Press

625003, г. Тюмень, ул. Володарского, б

+7 (3452) 59-75-34, 59-74-81

**Прием статей**

vestnik-energy-r@utmn.ru

Публикация статей для авторов бесплатна

**Журнал распространяется**

В открытом доступе <http://www.e-library.ru>

<http://vestnik.utmn.ru>

По подписке

Каталог Российской прессы (индекс ПА230)

## Editor-in-chief

*A. B. Shabarov*, Tyumen, Russia

## Deputy editors-in-chief

*O. V. Akhmetova*, Sterlitamak, Russia

*A. A. Gubaidullin*, Tyumen, Russia

*A. A. Zakharov*, Tyumen, Russia

*A. A. Kislitsin*, Tyumen, Russia

## Executive secretary

*A. P. Sadykova*, Tyumen, Russia

## Editorial board

*A. A. Afanasyev*, Moscow, Russia

*S. P. Bautin*, Yekaterinburg, Russia

*G. L. Brovko*, Moscow, Russia

*A. A. Vakulin*, Tyumen, Russia

*N. A. Gumerov*, College Park, Maryland, USA

*V. I. Gurov*, Moscow, Russia

*B. S. Dobronets*, Krasnoyarsk, Russia

*S. V. Kostyuchenko*, Tyumen, Russia

*S. I. Lezhnin*, Novosibirsk, Russia

*E. A. Novikov*, Krasnoyarsk, Russia

*O. A. Stepanov*, Tyumen, Russia

*S. V. Stepanov*, Tyumen, Russia

*A. V. Strekalov*, Tyumen, Russia

*A. V. Tatosov*, Tyumen, Russia

*S. Yu. Udovichenko*, Tyumen, Russia

*Yu. V. Shornikov*, Novosibirsk, Russia

*D. I. Eskin*, Moscow, Russia

*V. V. Yagov*, Moscow, Russia

## Editorial council

*I. Sh. Akhatov*, Skolkovo, Russia, USA

*A. Yu. Varaksin*, Moscow, Russia

*D. A. Gubaidullin*, Kazan, Russia

*Duong Ngoc Hai*, Hanoi, Vietnam

*A. G. Ivashko*, Tyumen, Russia

*K. K. Nandi*, Siliguri, India

*R. I. Nigmatulin*, Moscow, Russia

*A. I. Filarowski*, Wrocław, Poland

*V. M. Fomin*, Novosibirsk, Russia

*V. V. Shaidurov*, Krasnoyarsk, Russia

ISSN 2411-7978 (Print)

ISSN 2500-3526 (Online)

**Founded by**

University of Tyumen

**Published, edited and printed by**

UTMN-Press

6 Volodarskogo St., Tyumen, 625003, Russia

+7 (3452) 59-75-34, 59-74-81

**For article submission**

vestnik-energy-r@utmn.ru

No publication charges

**The journal is distributed**

Accessed at

<http://www.e-library.ru>

<http://vestnik.utmn.ru>

Subscription to

Russian Post catalogue (No. IIA230)

## Содержание

### Теплофизика и теоретическая теплотехника

- 6 Анализ влияния теплофизических параметров пласта и флюида на процесс пароциклического воздействия на нефтяные пласты  
*Гильманов А. Я., Ковальчук Т. Н., Скобликов Р. М., Фёдоров А. О., Ходжиев Ё. Н., Шевелёв А. П.*
- 28 Методика расчета теплообменного аппарата с пористыми вставками на основе полученного критериального уравнения  
*Рыдалина Н. В., Степанов О. А., Шабаров А. Б., Александров М. А.*
- 46 Оптимизация и актуализация алгоритма расчета интегрированных моделей газоконденсатных месторождений  
*Кулагин А. В., Варава А. И., Торопов Е. С.*
- 66 Аналитическое решение уравнения теплопроводности с учетом конвекции с изотермическими граничными условиями  
*Ганопольский Р. М.*

### Механика жидкости, газа и плазмы

- 83 Численное исследование процесса добычи газа из газогидратной залежи при наличии термического и депрессионного воздействия  
*Мусакаев Н. Г., Бельских Д. С.*
- 100 Параметрический анализ модели многозабойной скважины в пласте с двойной пористостью  
*Майков Д. Н., Макаров С. С.*
- 117 Стеkanie капель воды с текстурированной поверхности металла  
*Войткова К. А., Косторева Ж. А.*

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Информационные технологии

- 132 Применение методов нейросетевого моделирования при решении начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных  
*Вершинин В. Е., Пономарев Р. Ю.*
- 148 К вопросу о закономерностях в трансформации параметров относительной фазовой проницаемости при изменении размерности модели нефтяного пласта  
*Бекман А. Д., Степанов С. В., Зеленин Д. В.*

## Contents

### Thermal physics and thermology

- 6 Analysis of the influence of the thermophysical parameters of the reservoir and fluid on the process of cyclic steam stimulation  
*Gilmanov, A. Ya., Kovalchuk, T. N., Skoblikov, R. M., Fedorov, A. O., Khodzhiyev, Ye. N., & Shevelev, A. P.*
- 28 The method of calculating the parameters of a heat exchanger with porous inserts based on the obtained criterion equation  
*Rydalina, N. V., Stepanov, O. A., Shabarov, A. B., & Aleksandrov, M. A.*
- 46 Optimization and actualization of the algorithm for calculating integrated gas condensate field models  
*Kulagin, A. V., Varavva, A. I., & Toropov, E. S.*
- 66 Analytical solution of heat equation taking into account convection with isothermal boundary conditions  
*Ganopolskij, R. M.*

### Fluid, plazma, and gas mechanics

- 83 Numerical study of the gas production process from a gas hydrate deposit in the presence of thermal and depression effects  
*Musakaev, N. G., & Belskikh, D. S.*
- 100 The multilateral well model with complete vertical opening of naturally fractured reservoir  
*Maykov, D. N., & Makarov, S. S.*
- 117 Sliding of water droplets onto a textured metal surface  
*Voytkova, K. A., & Kostoreva, Zh. A.*

### Mathematical modeling, numerical methods, and software systems. Information technologies

- 132 Application of neural network modeling methods in solving initial boundary value problems for partial differential equations  
*Vershinin, V. E., & Ponomarev, R. Yu.*
- 148 On the question of the regularities in the transformation of the parameters of the relative phase permeability with a change in the dimension of the oil reservoir model  
*Bekman, A. D., Stepanov, S. V., & Zelenin, D. V.*

## Анализ влияния теплофизических параметров пласта и флюида на процесс пароциклического воздействия на нефтяные пласты

Александр Янович Гильманов, Татьяна Николаевна Ковальчук✉,  
Родион Максимович Скобликов, Антон Олегович Фёдоров,  
Ёсинджон Назирджонович Ходжиев, Александр Павлович Шевелёв

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
Контакт для переписки: t.n.kovalchuk@mail.ru✉

**Аннотация.** В настоящее время существующие модели пароциклической обработки не позволяют исследовать развитие теплового фронта на этапе нагнетания пара в пласт с учетом возможного влияния как конвективных потоков, так и кондуктивных, а также свойств породы и флюида. Знания динамики развития фронтов позволяют определить особенности протекающих физических процессов на конкретных месторождениях и могут быть использованы для оптимизации процесса добычи. Целью работы является анализ развития теплового поля в породах с различными теплофизическими параметрами. Была разработана гидродинамическая модель развития теплового поля и рассчитана на программном комплексе tNavigator для пород с различными теплофизическими свойствами. Модель учитывает трехмерное распространение тепла, свойства коллекторных и нагнетаемых флюидов, а также теплопотери в кровлю и подошву пласта. Проведено сопоставление максимальных размеров прогретой области, рассчитанных по разработанной гидродинамической модели, с результатами, полученными по интегральной модели. Определена зависимость координаты теплового фронта от удельной теплоемкости и теплопроводности породы. Тепловой фронт продвигается значительно дальше в породах с меньшей удельной теплоемкостью и теплопроводностью при одинаковом объеме закачки. Показано, что конвективная составляющая теплообмена слабо зависит от удельной теплоемкости и что форма теплового фронта остается одинаковой во всех случаях.

**Ключевые слова:** теплофизика, подземная гидромеханика, пароциклическая обработка, гидродинамический симулятор, тепловой фронт, конвективные потоки, фазовые переходы, вязкость нефти

**Цитирование:** Гильманов А. Я., Ковальчук Т. Н., Скобликов Р. М., Фёдоров А. О., Ходжиев Ё. Н., Шевелёв А. П. 2023. Анализ влияния теплофизических параметров пласта и флюида на процесс пароциклического воздействия на нефтяные пласты // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 3 (35). С. 6–27. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-6-27>

Поступила 05.06.2023; одобрена 16.06.2023; принята 06.10.2023

## **Analysis of the influence of the thermophysical parameters of the reservoir and fluid on the process of cyclic steam stimulation**

**Alexander Ya. Gilmanov, Tatiana N. Kovalchuk<sup>✉</sup>, Rodion M. Skoblikov, Anton O. Fedorov, Yesinjon N. Khodzhiev, Alexander P. Shevelev**

University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: [t.n.kovalchuk@mail.ru](mailto:t.n.kovalchuk@mail.ru)<sup>✉</sup>

**Abstract.** Currently, the existing models of cyclic steam stimulation do not allow to research the development of the heat front at the stage of steam injection into the reservoir, considering the possible influence of both convective and conductive flows, as well as the properties of the rock and fluid. Knowledge of the dynamics of the development of fronts allows to determine the features of the ongoing physical processes at specific deposits and can be used to optimize the production process. The aim of the work is to analyze the development of the thermal field in rocks with different thermophysical parameters. A hydrodynamic model of the development of the thermal field was developed and calculated on the tNavigator software package for rocks with various thermophysical properties. The model considering the three-dimensional propagation of heat, the properties of reservoir and injected fluids, as well as heat loss into the top and the bottom of the reservoir. The comparison of the maximum dimensions of the heated area calculated according to the developed hydrodynamic model with the results obtained by the integral model is carried out. The dependence of the advance of the thermal front on the specific heat capacity and thermal conductivity of the rock is determined. The thermal front moves much further in rocks with a lower specific heat capacity and thermal conductivity with the same injection volume. It is shown that the convective component of heat exchange weakly depends on the specific heat capacity and the shape of the heat front remains the same in all cases.

**Keywords:** thermophysics, underground hydromechanics, cyclic steam stimulation, hydrodynamic simulator, thermal front, convective flows, phase transitions, oil viscosity

**Citation:** Gilmanov, A. Ya., Kovalchuk, T. N., Skoblikov, R. M., Fedorov, A. O., Khodzhiyev, Ye. N., & Shevelev, A. P. (2023). Analysis of the influence of the thermophysical parameters of the reservoir and fluid on the process of cyclic steam stimulation. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 6–27. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-6-27>

Received June 5, 2023; Reviewed June 16, 2023; Accepted October 6, 2023

## Введение

Тепловые методы увеличения нефтеотдачи (МУН) являются одними из наиболее эффективных для тяжелых нефтей и битума с плотностью по шкале Американского института нефти (American Petroleum Institute, API) от 10 до 20°, а также битуминозных песков с плотностью менее 10° [ГОСТ Р 51069—97]. Эти методы успешно применялись во многих странах, особенно в Канаде, Индонезии и Венесуэле с 1950-х гг. Нетермические методы, в свою очередь, обычно используются для легких нефтей [Hasan, 2021]. В основе тепловых методов лежит зависимость вязкости нефти от температуры [Swadesi и др., 2020]. При увеличении температуры вязкость нефти падает, что приводит к увеличению нефтеотдачи. Особенно восприимчивы к изменению температуры нефти с высокой вязкостью. Так, при тепловом воздействии можно достичь уменьшения вязкости на четыре порядка [Бурже и др., 1989].

Следует отметить, что при адаптации тепловых МУН под конкретное месторождение значительно возрастает эффективность использования тепловой энергии, что приводит к оптимизации технологического процесса добычи [Швелёв и др., 2022]. При этом успех любого проекта повышения нефтеотдачи зависит от количества дополнительной нефти, которую можно извлечь экономически выгодным способом [Abd El-Moniem, 2020].

Основными тепловыми МУН являются: пароциклическая обработка (ПЦО), паротепловое воздействие (ПТВ), внутрислоевого горение (ВГ), парогравитационный дренаж (ПГД) [Сергеев, 1981; Антониади и др., 2000]. ПТВ подразумевает непрерывное нагнетание пара в коллектор и проталкивание этим паром образующуюся пароводонефтяную оторочку к добывающей скважине. При ВГ поджигают нефть и поддерживают горение, в ходе чего образуется несколько характерных зон, одна из которых — зона нефтяного вала, продвигающаяся к добывающей скважине за счет водонапорного режима и пара. Инициация горения в пластовых условиях многими рассматривается как процесс с высоким риском. При ПГД пробуриваются две расположенные друг над другом параллельные горизонтальные скважины, при этом верхняя — нагнетательная. В пласт непрерывно нагнетают пар, и образуется паровая камера, которая постоянно контактирует с нефтью и нагревает ее. Разогретая нефть



стекает за счет гравитации вниз к добывающей скважине. Существуют также менее испытанные тепловые МУН, предлагаемые в качестве альтернативы использованию пара или горячей воды. Например, для объемного нагрева пласта может применяться электрическая энергия или электромагнитные волны (микроволновые или радиоволны). Многочисленные лабораторные и пилотные промысловые исследования, проведенные на канадских битуминозных песках, подтвердили правильность концепции применения ПГД и более высокую эффективность добычи нефти, чем без использования этой технологии [Vishnumolakala и др., 2020].

Каждый из описанных методов имеет свои преимущества и недостатки. Преимущество ПЦО над другими методами — самое эффективное использование тепловой энергии, а недостаток — относительно небольшая зона прогрева.

В процессе разработки любого месторождения возникает необходимость определения пластовых и технологических параметров. На подбор последних влияют параметры коллектора, такие как мощность пласта, проницаемость, пористость, вязкость, температуропроводность, теплопроводность, теплоемкость, температура насыщения, давление [Антониади и др., 2000]. Сложность разработки с применением ПЦО заключается в том, что технологические параметры рассчитываются либо с использованием статистических данных [Осипов, Соломатин, 2011], либо приближенно, без учета особенностей физических процессов, протекающих в конкретном пласте.

ПЦО включает в себя три этапа: 1) нагнетание пара, 2) выдержку на конденсацию и 3) добычу. На каждом из этапов стоит учитывать определенные физические процессы: теплоперенос, частичную конденсацию на этапе закачки, теплопотери в кровлю и подошву, изменение вязкости, конденсацию на этапе выдержки, течение двухфазной (многокомпонентной) жидкости, остывание нефти на этапе добычи. ПЦО может применяться в том числе с добавлением растворителей. Например, в работе [Suranto и др., 2022] этот процесс изучается с помощью моделирования коллектора, чтобы доказать эффективность комбинации пара и растворителя. Модель включает конвекцию, диффузию, адсорбцию и фазовый переход, позволяет исследовать смешанные эффекты различных физических процессов, связанных с повышением нефтеотдачи в нетрадиционных коллекторах [Santiago, Kantzas, 2020].

Как правило, существует три категории методов прогнозирования нефтедобычи с помощью ПЦО: 1) аналитические модели, 2) методы аналогии и 3) численное моделирование. Аналитические прогностические модели используют различные допущения для упрощения расчетов прогнозирования добычи нефти. В большинстве аналитических моделей использовалось ограничивающее предположение о том, что пар образует в пласте цилиндр в конце периода нагнетания пара. Однако промысловые данные показывают, что пар уходит в верхнюю зону или высокопроницаемые зоны. С другой стороны, корреляции, найденные по методу аналогий при использовании ПЦО для конкретных коллекторов, строятся с использованием исторических данных для параметров, влияющих на дебиты нефти или совокупную добычу нефти [Liu и др., 2022].

При численном моделировании ПЦО применяются балансовые-интегральные модели и механистические модели.

В интегральной модели Маркса — Лангенгейма [Marx, Langenheim, 1959] используется радиальная симметрия для определения расстояния теплового фронта и рассматривается идеализированный тепловой профиль, представляющий собой ступенчатую функцию. Модель описывает скорость распространения теплового фронта, площадной охват теплового воздействия и экономически эффективный предел использования.

Интегральная модель Джонса [Jones, 1977] опирается на радиальный подход и строится по большей части из эмпирических законов. Она включает в себя три этапа: 1) закачку, 2) выдержку на конденсацию и 3) добычу. Профиль теплового фронта — ступенчатая функция с постоянно уменьшающейся средней температурой. Этот метод позволяет предсказать максимальный радиус прогрева и масштабы обводненной зоны, а также учитывает остаточную теплоту от прошлых циклов. В модели Джонса, так же как и в модели Маркса — Лангенгейма, использовано приближение Ловьерье [Lauwerier, 1955].

Предложенная в работе [Шевелёв, 2005] интегральная модель, основанная на аналитических законах, сразу предполагает приближение Ловьерье и использует радиальную геометрию. Эта модель описывает все три этапа ПЦО: 1) нагнетание, 2) выдержку, 3) добычу. Она, в отличие от других моделей, позволяет предсказать время закачки и конденсации, а также дебит, учитывая остаточную теплоту.

В модели ПЦО, представленной в исследовании [Chen и др., 2019], с целью описать зону нагрева вводится масштабный коэффициент для согласования максимального и минимального объема нагрева. Максимальный объем нагрева рассчитывается исходя из предположения об отсутствии потерь тепла из верхних и нижних пород-коллекторов, в то время как минимальный объем нагрева оценивается путем предположения о потерях тепла из эквивалентной вертикальной скважины.

В работе [Yang и др., 2022] предлагается такая модель ПЦО для неоднородного пласта с тяжелой нефтью, в которой из закона сохранения энергии определяется радиус прогретой области с учетом неизотермической фильтрации в прогретой зоне.

В статье [Liu и др., 2022] авторы, проанализировав экспериментальные данные, приходят к выводу, что эмульсия тяжелой нефти и воды приводит к увеличению вязкости добываемой жидкости, что, в свою очередь, ухудшает эффективность разработки месторождения методом ПЦО. Исследователями была разработана математическая модель фильтрации добываемых флюидов в пластах с тяжелой нефтью месторождения Бохай (Китай) с учетом этого явления.

В основе механистических моделей лежит система уравнений механики многофазных сред, используются законы сохранения массы, импульса и энергии. Эти модели, реализующиеся в коммерческих симуляторах, хорошо себя зарекомендовали для решения задач подземной гидромеханики.

В настоящее время актуальным является моделирование процессов ПЦО с помощью симуляторов. Симулятор, используемый в качестве вычислительного модуля, должен быть способен рассчитывать изменение теплофизических свойств пластового флюида и решать уравнения теплопереноса. Этим требованиям отвечают, например, симулятор тепловых (неизотермических) и специальных процессов CMG STARS и tNavigator [Savchik и др., 2020]. Однако именно последний, являясь отечественной разработкой, имеет не только

более доступную лицензию и удобный русифицированный интерфейс, но и широкий выбор модулей, в том числе позволяющих моделировать гидоразрыв пласта.

Следует отметить, что в настоящее время существующие модели ПЦО не позволяют исследовать развитие теплового фронта на этапе нагнетания пара в пласт с учетом возможного влияния как конвективных потоков, так и кондуктивных, а также свойств породы и флюида. При этом знания динамики развития фронтов позволяют определить особенности протекающих физических процессов на конкретных месторождениях и могут быть использованы для оптимизации процесса добычи.

На основании вышеизложенного целью работы является анализ развития теплового поля в породах с различными теплофизическими параметрами. В работе предлагается гидродинамическая модель развития теплового поля, которая рассчитана в программном комплексе tNavigator для пород с различными теплофизическими свойствами. Модель создается с учетом трехмерного распространения тепла, свойств коллекторных и нагнетаемых флюидов, теплопотерь в кровлю и подошву пласта. Проводится сопоставление максимальных размеров прогретой области, рассчитанных по разработанной гидродинамической модели, с результатами, полученными по интегральной модели. Определяется зависимость продвижения теплового фронта от удельной теплоемкости и теплопроводности породы. Полученные результаты сравниваются с интегральными моделями ПЦО, предложенными авторами ранее [Шевелёв, 2005; Шевелёв и др., 2022]. Также рассматривается аппроксимация для значения дополнительной накопленной добычи в зависимости от теплофизических параметров теплоносителя.

## Методы

### Описание численной модели пароциклического воздействия, реализованной в tNavigator

Для численного моделирования была построена гидродинамическая модель в формате E3 (в данном формате учитывается компонентный состав композиционной нефти и имеется возможность воспроизводить неизотермические и химические процессы). Модель состоит из законов сохранения массы фаз, импульса в виде закона Дарси, закона сохранения энергии, а также соотношений для капиллярного давления и насыщенностей фаз [Каневская, 2002]. Относительные фазовые проницаемости моделируются с использованием корреляций Кори со связанной водонасыщенностью 0,2 д. ед. и остаточной нефтенасыщенностью 0,2 д. ед.

Для расчета данной модели использовался программный комплекс tNavigator. Всего было рассчитано девять вариантов с различными теплофизическими свойствами породы (таблица 1).

### Геометрия и свойства расчетной сетки

Расчетная сетка, используемая при решении уравнений данной модели, представляет из себя модельный пласт, состоящий из 201 ячейки в горизонтальном направлении  $x$ , 201 ячейки в перпендикулярном  $x$  горизонтальном направлении  $y$  и 30 ячеек в вертикальном направлении  $z$ . Размеры каждой ячейки во всех направлениях ( $x, y, z$ ) составляют 1 м. Глубина залегания кровли пласта равна 1 650 м.

**Таблица 1.** Теплофизические свойства породы различных вариантов модели

**Table 1.** Thermophysical properties of rocks of various model variants

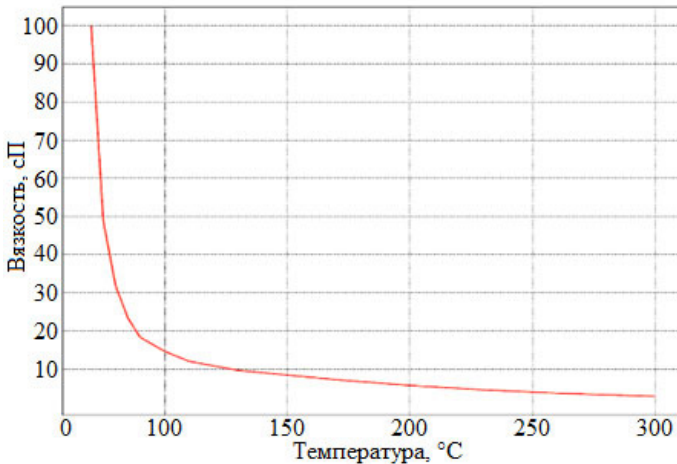
Вариант	Удельная теплоемкость, $10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$	Теплопроводность, $\text{Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$
1	2,5	2,431
2	1,5	2,431
3	2,0	2,431
4	3,0	2,431
5	3,5	2,431
6	2,5	1,736
7	2,5	2,083
8	2,5	2,778
9	2,5	3,125

Во всех ячейках модельного пласта пористость породы равна 0,2 д. ед., проницаемость —  $10^{-13} \text{ м}^2$ , коэффициент песчаности — 1 д. ед., сжимаемость —  $2,6 \cdot 10^{-9} \text{ 1/Па}$ .

### Свойства флюидов

В модели рассматривается трехфазная система, состоящая из нефти, воды и водяного пара. В пласте в начальный момент времени находятся вода и нефть, нагнетаемый флюид состоит из воды и водяного пара.

Нефть в данных вариантах является однокомпонентной. Молярная масса нефти равна 0,378 кг/моль. Сжимаемость нефти  $8,63 \cdot 10^{-10} \text{ 1/Па}$ . Плотность нефти при стандартных условиях равна 880 кг/м<sup>3</sup>. Вязкость нефти зависит от температуры так, как показано на рис. 1.



**Рис. 1.** Зависимость вязкости нефти от температуры

**Fig. 1.** Dependence of oil viscosity on temperature

Плотность воды равна  $1\,000\text{ кг/м}^3$  при стандартных условиях в данных вариантах. С изменением давления  $p$  и температуры  $T$  плотность воды  $\rho_w$  рассчитывается по следующей формуле:

$$\rho_w = \frac{\rho_{w,ref}}{(1 - c_{w,p}(p - p_{ref})) (1 + c_{w,1,T}(T - T_{ref}) + c_{w,2,T}(T - T_{ref})^2)},$$

где  $\rho_{w,ref}$  — плотность воды при выбранных значениях давления  $p_{ref}$  и температуры  $T_{ref}$ ;  $c_{w,p}$  — коэффициент изотермической сжимаемости воды;  $c_{w,1,T}$  — первый коэффициент теплового расширения;  $c_{w,2,T}$  — второй коэффициент теплового расширения.

Для расчета принято использовать уравнение состояния Редлиха — Квонга:

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v(v + b)}.$$

Фазовые переходы моделируются при помощи уравнений, приведенных в источнике [Брусиловский, 2002].

### Начальные условия

Пластовое давление на момент начала моделирования равно  $1,65 \cdot 10^7$  Па во всех ячейках. Начальные значения параметров пласта во всех блоках: температура — 343 К, водонасыщенность — 0,2 д. ед., нефтенасыщенность — 0,8 д. ед.

В данных вариантах был задействован прилегающий водоносный пласт (аквифер), приток воды из которого в моделируемый пласт рассчитывается по модели Картера — Трейси. Приток воды из аквифера в модельный пласт осуществляется через боковые грани пласта.

Давление в аквифере на опорной глубине, равной 1 650 м, составляет  $1,65 \cdot 10^7$  Па, сжимаемость аквифера —  $9,5 \cdot 10^{-10}$  1/Па, угол влияния аквифера —  $360^\circ$  (т. е. может осуществляться как приток воды из аквифера в модельный пласт, так и отток флюида из модельного пласта в аквифер).

## Результаты

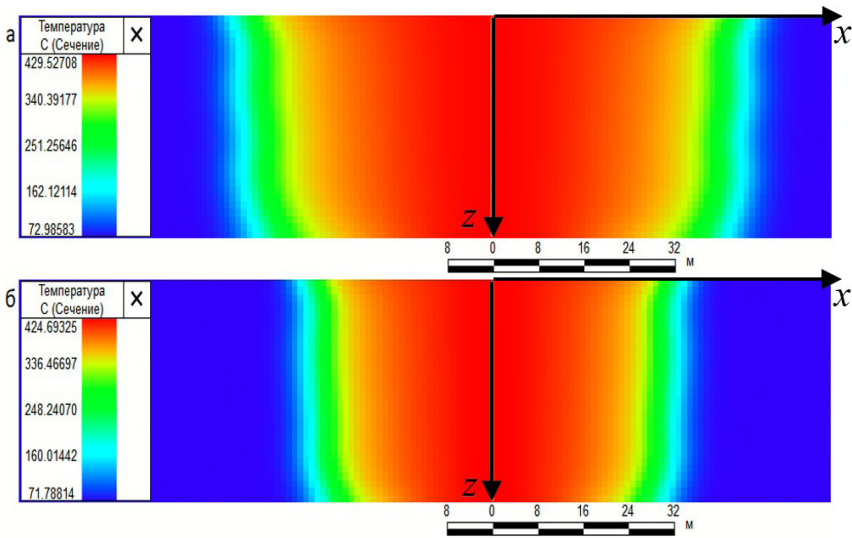
### Проведение экспериментов

При расчете каждого варианта моделировалась закачка пароводяной смеси в пласт с постоянным расходом и паросодержанием.

В ходе численного моделирования было проведено два эксперимента:

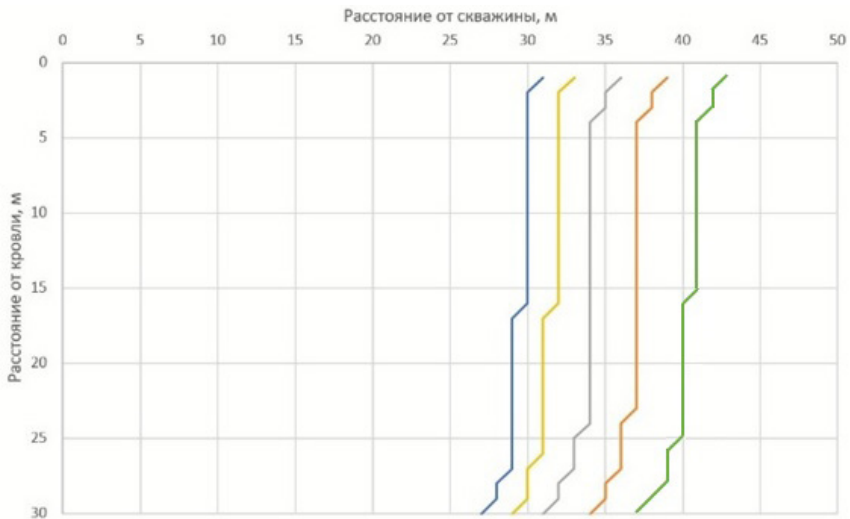
- 1) выявление влияния удельной теплоемкости породы на распространение теплового поля при постоянной теплопроводности породы (рис. 2, 3);
- 2) выявление влияния теплопроводности породы на распространение теплового поля при постоянной удельной теплоемкости породы (рис. 4, 5).

В рамках проведения первого эксперимента были рассчитаны пять вариантов модели (№ 1–5, таблица 1). Теплопроводность породы равнялась  $2,431\text{ Дж/(м} \cdot \text{с} \cdot \text{К)}$  во всех пяти вариантах.



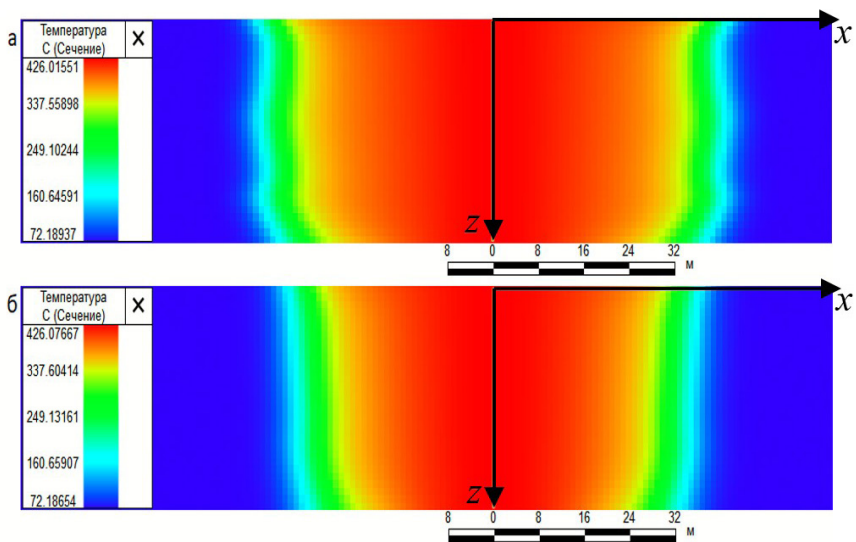
**Рис. 2.** Распределение теплового поля на момент окончания закачки при удельной теплоемкости породы (Дж/(м<sup>3</sup> · К)): а —  $1,5 \cdot 10^6$ ; б —  $3,5 \cdot 10^6$

**Fig. 2.** Distribution of the thermal field at the time of the end of injection with a specific heat capacity of the rock (J/(m<sup>3</sup> · K)): а —  $1.5 \cdot 10^6$ ; б —  $3.5 \cdot 10^6$



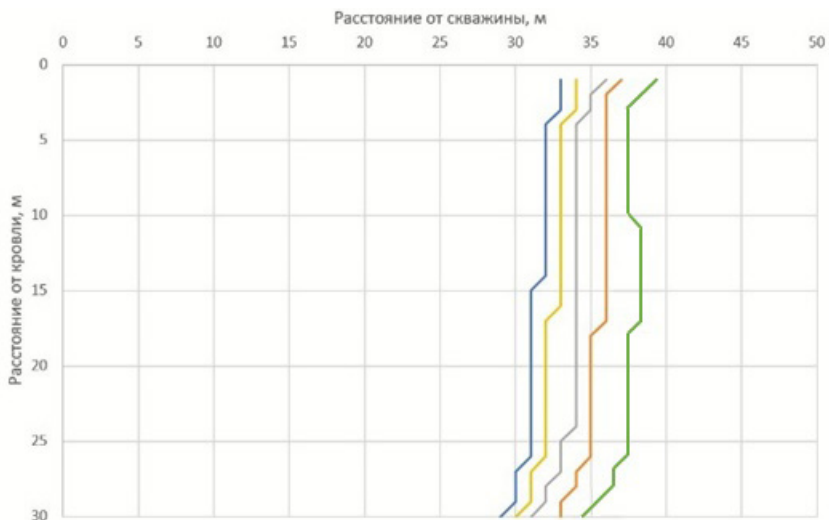
**Рис. 3.** Расположение тепловых фронтов, соответствующих температуре 523 К, на момент окончания закачки пароводяной смеси в пласт при разной удельной теплоемкости породы (Дж/(м<sup>3</sup> · К)): синяя кривая —  $1,5 \cdot 10^6$ ; желтая —  $2 \cdot 10^6$ ; серая —  $2,5 \cdot 10^6$ ; оранжевая —  $3 \cdot 10^6$ ; зеленая —  $3,5 \cdot 10^6$

**Fig. 3.** The location of the thermal fronts corresponding to the temperature of 523 K at the end of the injection of the steam-water mixture into the formation at different specific heat capacity of the rock (J/(m<sup>3</sup> · K)): blue curve —  $1.5 \cdot 10^6$ ; yellow —  $2 \cdot 10^6$ ; gray —  $2.5 \cdot 10^6$ ; orange —  $3 \cdot 10^6$ ; green —  $3.5 \cdot 10^6$



**Рис. 4.** Распределение теплового поля на момент окончания закачки при теплопроводности породы (Дж/(м · с · К)): а — 1,736; б — 3,125

**Fig. 4.** Distribution of the thermal field at the time of the end of injection with the thermal conductivity of the rock (J/(m · s · K)): а — 1.736; б — 3.125



**Рис. 5.** Расположение тепловых фронтов, соответствующих температуре 523 К, на момент окончания закачки пароводяной смеси в пласт при разной теплопроводности породы (Дж/(м · с · К)): синяя кривая — 3,125; желтая — 2,778; серая — 2,431; оранжевая — 2,083; зеленая — 1,736

**Fig. 5.** The location of the thermal fronts corresponding to the temperature of 523 K at the end of the injection of the steam-water mixture into the formation at different thermal conductivity of the rock (J/(m · s · K)): blue curve — 3.125; yellow — 2.778; gray — 2.431; orange — 2.083; green — 1.736



Из результатов моделирования на рис. 2 и 3 видно, что при снижении удельной теплоемкости породы тепловой фронт продвигается дальше при том же объеме закачки теплоносителя в пласт. Это говорит о том, что при снижении удельной теплоемкости породы тепловые потери в скелет породы уменьшаются, что позволяет большему количеству теплоты продвинуться дальше в пласт и более эффективно прогреть пластовые флюиды.

Также стоит заметить, что при изменении удельной теплоемкости породы форма теплового фронта и его наклон значимо не меняются. Таким образом, конвективная составляющая теплообмена в моделируемых процессах слабо зависит от удельной теплоемкости породы.

В рамках проведения второго эксперимента были рассчитаны еще четыре варианта (№ 6–9, таблица 1). Во всех четырех вариантах удельная теплоемкость породы равнялась  $2,5 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$ .

Результаты моделирования на рис. 4 и 5 показывают, что при снижении теплопроводности породы тепловой фронт продвигается дальше при том же объеме закачки теплоносителя в пласт. Следовательно, при снижении теплопроводности породы количество теплоты, проходящее через скелет породы за единицу времени, снижается, что позволяет передать большее количество теплоты пластовым флюидам.

Стоит обратить внимание, что при снижении теплопроводности породы тепловой фронт становится менее ровным по вертикали, начинают прослеживаться прорывы теплового фронта вблизи кровли пласта.

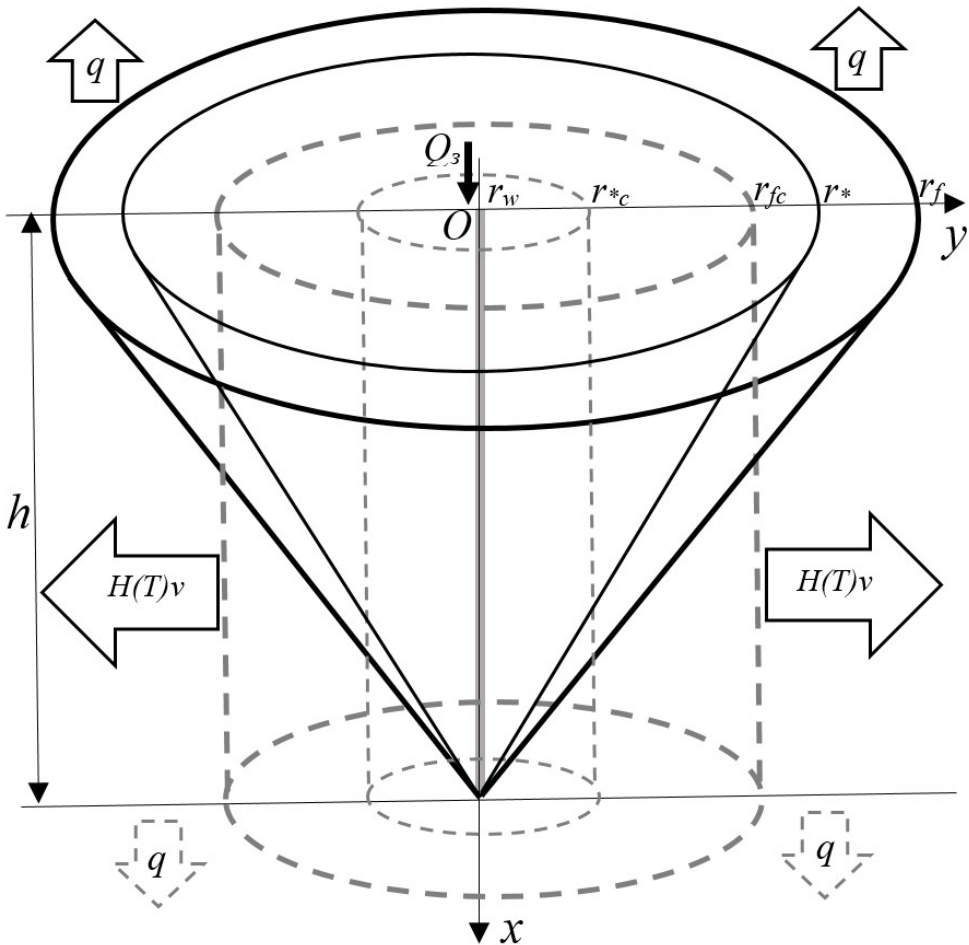
### Описание интегральных моделей пароциклического воздействия на пласт

В работах [Шевелёв, 2005; Шевелёв и др., 2022] предлагаются две интегральные физико-математические модели пароциклического воздействия на пласт, а также подробно описываются физические процессы, происходящие в пласте при ПЦО. В первой модели [Шевелёв, 2005] прогретая зона имеет форму цилиндра, во второй [Шевелёв и др., 2022] — конуса. В частности, конусоидальная модель учитывает, что пар, имеющий значительно меньшую плотность в сравнении с нефтью, в большей степени распространяется вблизи кровли пласта. В данной статье расчеты проводятся с помощью обеих приведенных моделей и сравниваются с результатами, полученными в симуляторе tNavigator.

Вводится следующая декартова система координат: ось  $x$  направляется вниз вдоль оси скважины радиуса  $r_w$ , а ось  $y$  — вдоль радиуса фронта прогрева. Мощность пласта обозначается  $h$ . Максимальный радиус фронта прогрева конуса  $r_f$ , а цилиндра —  $r_{fc}$ . Следовательно, начальное положение границ между прогретой нефтью при температуре теплоносителя  $T_s$  и нефтью при начальной пластовой температуре  $T_0$  конуса и цилиндра определяются в декартовой системе координат точками  $(r_f, 0)$ ,  $(0, h)$  и  $(r_{fc}, 0)$ ,  $(r_{fc}, h)$  соответственно. С течением времени  $t$  объем прогретой области уменьшается. Мощность пласта  $h$  не изменяется в обеих моделях при охлаждении прогретой зоны. Радиус фронта прогрева конуса уменьшается от максимального значения  $r_f$  до 0, принимая промежуточные значения  $r_f(t)$ , а цилиндра — от  $r_{fc}$  до 0, принимая значения  $r_{fc}(t)$ .



Тепло пара, поступающее в нефтяной пласт с постоянным расходом  $Q_3$ , перераспределяется на прогрев скелета породы, нефти в призабойной зоне и тепловые потери в кровлю и подошву пласта  $q$ . В рамках обеих моделей фронт прогрева уменьшается со скоростью  $v$ , при этом на фронте накапливается количество теплоты  $H$ . В случае модели, в которой форма прогретой области определяется цилиндром, когда тепло, закачиваемое в пласт, компенсируется тепловыми потерями в кровлю и подошву пласта, формируется стационарное распределение температуры; в случае конусоидальной модели теплотерями в подошву можно пренебречь. На рис. 6 схематически проиллюстрирована объемная геометрия интегральных моделей ПЦО и физических процессов, происходящих в пласте.



**Рис. 6.** Геометрия интегральных моделей ПЦО и схематическое изображение физических процессов, происходящих в пласте

**Fig. 6.** The geometry of the integrated models of the CSS and the schematic representation of the physical processes occurring in the reservoir

Максимальный радиус фронта прогрева для конусоидальной модели с учетом закона Ньютона — Рихмана для удельных тепловых потерь из пласта, мощности суммарных тепловых потерь из прогретой области и постоянства скорости закачки теплоносителя определяется следующим выражением [Шевелёв и др., 2022]:

$$r_f = \sqrt{\frac{2Q_3\rho_s(c_s(T_s - T_0) + l)}{\pi\alpha(T_s - T_0)} + r_w^2},$$

где  $\rho_s$  и  $c_s$  — плотность и удельная теплоемкость пара соответственно;  $Q_3$  — постоянный объемный расход, с которым происходит закачка пара;  $l$  — скрытая удельная теплота парообразования.

Аналогично для цилиндрической геометрии области прогрева [Шевелёв, 2005]:

$$r_{fc} = \sqrt{\frac{Q_3\rho_s(c_s(T_s - T_0) + l)}{\pi\alpha(T_s - T_0)} + r_w^2}.$$

При этом коэффициент теплоотдачи определяется выражением:

$$\alpha = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\lambda}{h},$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности.

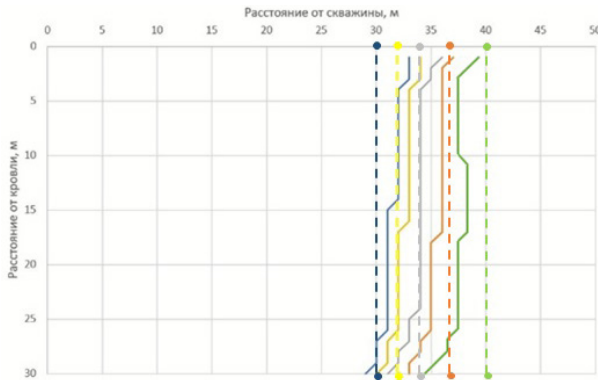
Таким образом, значения максимального радиуса фронта прогрева для конусоидальной модели [Шевелёв и др., 2022] приблизительно в 1,4 раза больше, чем для цилиндрической [Шевелёв, 2005], тем не менее объем прогретой области в цилиндрической модели в 1,5 раза больше.

### Результаты, полученные с помощью интегральных моделей

Для расчетов с помощью интегральных моделей были выбраны следующие параметры: расход пароводяной смеси на забое скважины  $Q_3 = 0,000\ 769\ \text{м}^3/\text{с}$ ; плотность пара  $\rho_s = 56\ \text{кг}/\text{м}^3$ ;  $C_s = 4\ 043\ \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;  $T_s = 523\ \text{К}$ ;  $T_0 = 343\ \text{К}$ ;  $l = 2\ 300\ 000\ \text{Дж}/\text{кг}$ ;  $r_w = 0,1\ \text{м}$ . Проводилось по пять численных экспериментов для пород со следующими значениями теплопроводности  $\lambda$  ( $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ): 1,736; 3,125; 2,083; 2,431; 2,778.

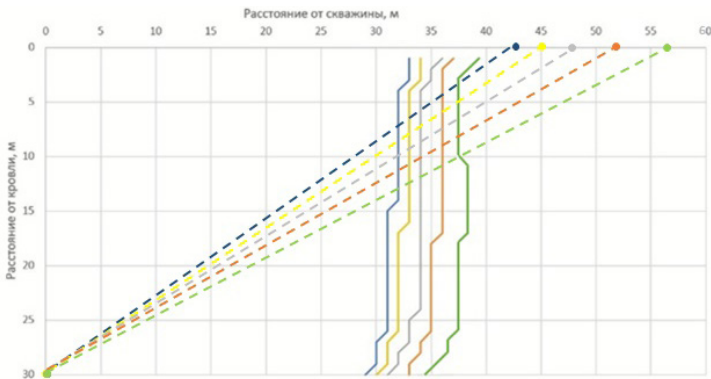
Следует сравнить результаты, полученные с помощью интегральных моделей и tNavigator. Проиллюстрируем сравнение максимального радиуса фронта прогрева на рис. 7 для цилиндрической модели, на рис. 8 — для конусоидальной. Результаты вычислений приведены в сечении  $Oxy$  при положительных значениях координат  $x$  и  $y$  ввиду симметрии задачи.

Сравнение интегральной цилиндрической (пунктирные линии на рис. 7) и разработанной в tNavigator модели (сплошные линии на рис. 7) показывает достаточную согласованность результатов для максимального радиуса фронта прогрева. Точность согласования данных составляет 10%.



**Рис. 7.** Сравнение радиусов фронта прогрева, полученных с помощью гидродинамической модели в tNavigator и интегральной цилиндрической модели. Пунктирные линии — результаты, полученные для цилиндрической модели, сплошные — для модели в tNavigator. Значения теплопроводности (Дж/(м · с · К)): синие линии — 3,125; желтые — 2,778; серые — 2,431; оранжевые — 2,083; зеленые — 1,736

**Fig. 7.** Comparison of the radii of the heating front obtained using the hydrodynamic model in tNavigator and the integral cylindrical model. Dotted lines are the results obtained for the cylindrical model, solid lines are for the model in tNavigator. Thermal conductivity value (J/(m · s · K)): blue lines — 3.125; yellow — 2.778; gray — 2.431; orange — 2.083; green — 1.736



**Рис. 8.** Сравнение радиусов фронта прогрева, полученных с помощью гидродинамической модели в tNavigator и интегральной конусоидальной модели. Пунктирные линии — результаты, полученные для конусоидальной модели, сплошные — для модели в tNavigator. Значения теплопроводности (Дж/(м · с · К)): синие линии — 3,125; желтые — 2,778; серые — 2,431; оранжевые — 2,083; зеленые — 1,736

**Fig. 8.** Comparison of the radii of the heating front obtained using the hydrodynamic model in tNavigator and the integral conusoidal model. Dotted lines are the results obtained for the conusoidal model, solid lines are for the model in tNavigator. Thermal conductivity value (J/(m · s · K)): blue lines — 3.125; yellow — 2.778; gray — 2.431; orange — 2.083; green — 1.736

Из сравнения интегральной конусоидальной модели и модели, разработанной в tNavigator, следует отметить, что при высоких скоростях закачки пара в пласт фронт продвигается дальше относительно скважины, и конвективные явления вносят меньший вклад в это движение. Поэтому модель, рассчитанная в tNavigator, более точно описывает максимальный радиус фронта прогрева для данного случая.

## Обсуждение

Рассмотрим аппроксимацию для определения дополнительной накопленной добычи нефти с помощью интегральной модели пароциклического воздействия.

Пусть вводится предположение, что значение дополнительной накопленной добычи  $V_{\text{доп. накоп}}$  зависит от удельной теплоемкости теплоносителя  $c_s$  и скрытой удельной теплоты парообразования  $l$  следующим образом:

$$V_{\text{max}} = k_1 c_s + k_2 c_s^2 + k_3 c_s^3 + k_4 c_s^4 + k_5 c_s^5 + k_6 l + k_7 l^2 + k_8 l^3 + k_9 l^4 + k_{10} l^5 + k_{11}, \quad (1)$$

где коэффициенты  $k_j$  (индекс  $j$  изменяется от 1 до 11) подлежат определению.

С целью вычислить коэффициенты  $k_j$  необходимо рассчитать в первую очередь дополнительную накопленную добычу нефти с помощью интегральной цилиндрической модели в зависимости от скрытой удельной теплоты парообразования  $l$  (Дж/кг) и удельной теплоемкости теплоносителя  $c_s$  (Дж/(кг · К)). Результаты расчетов приведены в таблице 2.

**Таблица 2.** Значения дополнительной накопленной добычи нефти (в тоннах), рассчитанные с использованием интегральной цилиндрической модели, при удельной теплоте парообразования  $l$  (Дж/кг) и удельной теплоемкости теплоносителя  $c_s$  (Дж/(кг · К))

**Table 2.** Values of additional accumulated oil production (in tons) calculated using the integral cylindrical model, with a specific heat of vaporization  $l$  (J/kg) and a specific heat capacity of the coolant  $c_s$  (J/(kg · K))

$c_s/l$	1 300 000	2 300 000	4 300 000	6 200 000	8 200 000	10 000 000
500	8 860*	9 757	11 023	11 892	12 623	13 180
1 000	9 042	9 882	11 103	11 954	12 674*	13 224
1 500	9 213	10 002	11 182	12 015	12 724	13 267
2 000	9 375	10 118	11 259	12 075	12 774	13 311
2 500	9 529	10 230	11 335*	12 134	12 823	13 354
3 000	9 676	10 339	11 409	12 193	12 872	13 397*
3 500	9 816	10 445	11 483	12 251	12 920	13 439
4 000	9 950	10 547*	11 554	12 308	12 968	13 481
4 200	10 002	10 587	11 583	12 331	12 987	13 498
4 500	10 079	10 647	11 625	12 365*	13 015	13 522
4 800	10 154	10 705	11 667	12 398	13 043	13 547
5 000	10 203	10 744	11 694	12 421	13 062	13 564

Окончание таблицы 2

Table 2 (end)

$c_s / \text{л}$	12 000 000	14 000 000	16 000 000	18 000 000	20 000 000	22 000 000
500	13 720	14 201	14 635	15 033*	15 401	15 744
1 000	13 759	14 236	14 667	15 062	15 428	15 769
1 500	13 798	14 270	14 698	15 091	15 455	15 794
2 000	13 836	14 305	14 730	15 120	15 482*	15 820
2 500	13 874	14 339	14 761	15 149	15 509	15 845
3 000	13 912	14 373	14 792	15 178	15 535	15 870
3 500	13 949	14 407	14 823*	15 206	15 562	15 895
4 000	13 986	14 440	14 854	15 234	15 588	15 920
4 200	14 001	14 454	14 866	15 246	15 599	15 930
4 500	14 023	14 474	14 884	15 263	15 615	15 944
4 800	14 045	14 494	14 903	15 280	15 631	15 959*
5 000	14 060*	14 507	14 915	15 291	15 641	15 969

\* Значения дополнительной накопленной добычи нефти, рассчитанные при выбранных модельных значениях удельной теплоемкости теплоносителя и скрытой удельной теплоты парообразования.

\* The values of additional cumulative oil production calculated for the selected model values of the specific heat capacity of the heat carrier and the specific heat of vaporization.

Далее необходимо составить систему из 11 уравнений вида (1). В каждом из уравнений системы имеется 11 неизвестных с первой степенью. Такие уравнения решаются с помощью классического метода Гаусса для систем линейных алгебраических уравнений. Выбор этого метода обусловлен тем, что он позволяет получить аналитическое решение при более простых преобразованиях, чем у других методов.

Алгоритм метода заключается в следующем:

- 1) в уравнение (1) подставляются точки, отмеченные (\*) в таблице 2;
- 2) прямым ходом метода Гаусса исключаются неизвестные, остается одно уравнение с одной переменной;
- 3) обратным ходом метода Гаусса находятся переменные.

В результате расчетов получаются следующие значения коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= -8,401 \cdot 10^{-14} \text{ м}^3 \cdot \text{кг} / \text{Дж}; \\
 k_2 &= 1,026 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3 \cdot (\text{кг} / \text{Дж})^2; \\
 k_3 &= -4,206 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \cdot (\text{кг} / \text{Дж})^3; \\
 k_4 &= 6,104 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot (\text{кг} / \text{Дж})^4; \\
 k_5 &= -7,05 \cdot 10^{-1} \text{ м}^3 \cdot (\text{кг} / \text{Дж})^5; \\
 k_6 &= 5,73 \cdot 10^{-33} \text{ м}^3 \cdot (\text{кг} \cdot \text{К}) / \text{Дж}; \\
 k_7 &= -2,787 \text{ 51} \cdot 10^{-25} \text{ м}^3 \cdot (\text{кг} \cdot \text{К})^2 / \text{Дж}^2;
 \end{aligned}$$

$$k_8 = 2,07 \cdot 10^{-18} \text{ м}^3 \cdot (\text{кг} \cdot \text{К})^3 / \Delta\text{ж}^3;$$

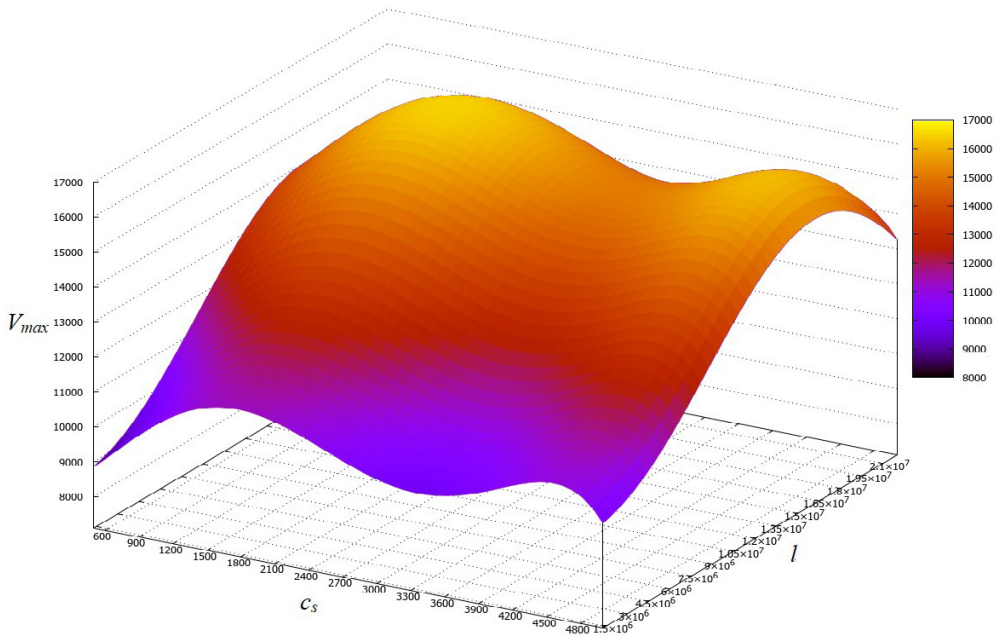
$$k_9 = 3,51 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot (\text{кг} \cdot \text{К})^4 / \Delta\text{ж}^4;$$

$$k_{10} = 7,84 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3 \cdot (\text{кг} \cdot \text{К})^5 / \Delta\text{ж}^5;$$

$$k_{11} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ м}^3.$$

На рис. 9 представлен график зависимости дополнительной накопленной добычи нефти в зависимости от теплофизических параметров теплоносителя с использованием результатов, указанных в таблице 2, и уравнения поверхности (1).

Таким образом, уравнение (1) позволяет определять дополнительную накопленную добычу нефти с учетом теплофизических параметров теплоносителя, а значит, предоставляет возможность подобрать теплоноситель для получения максимальной эффективности разработки месторождения.



**Рис. 9.** График зависимости дополнительной накопленной добычи нефти в зависимости от теплофизических параметров теплоносителя

**Fig. 9.** Graph of the dependence of additional accumulated oil production depending on the thermophysical parameters of the heat carrier

## Заключение

Таким образом, в работе представлена гидродинамическая модель, разработанная в tNavigator, позволяющая определять геометрию прогретой области при пароциклическом воздействии на пласт. Проанализировано влияние удельной теплоты парообразования и удельной теплоемкости теплоносителя на развитие теплового поля.

Показано, что с увеличением значения теплопроводности породы объем прогретой области уменьшается, а с увеличением удельной теплоемкости — увеличивается. Установлено, что значения для радиуса фронта прогрета, полученные по предлагаемой и интегральным моделям, согласуются с точностью 10%. Предложена аппроксимация для определения значения дополнительной накопленной добычи в зависимости от теплофизических параметров теплоносителя.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- Антониади Д. Г., Гарушев А. Р., Ишиханов В. Г. 2000. Настольная книга по термическим методам добычи нефти. Краснодар: Советская Кубань. 462 с.
- Брусиловский А. И. 2002. Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа. М.: Грааль. 575 с.
- Бурже Ж., Сурио П., Комбарну М. 1989. Термические методы повышения нефтеотдачи пластов. М.: Недра. 422 с.
- ГОСТ Р 51069—97. 2008. Нефть и нефтепродукты. Метод определения плотности, относительной плотности и плотности в градусах API ареометром. М.: Стандартинформ. 8 с.
- Каневская Р. Д. 2002. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований. 140 с.
- Осипов А. В., Соломатин А. Г. 2011. Влияние продолжительности периода добычи нефти на эффективность паротепловых обработок призабойных зон скважин // Бурение и нефть. № 2. С. 42–44.
- Сергеев Р. В. 1981. Тепловые методы воздействия на призабойную зону пласта месторождений тяжелых и высоковязких нефтей // Нефтепромысловое дело. № 16.
- Шевелёв А. П. 2005. Математическое моделирование циклического теплового воздействия на нефтяные пласты: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тюмень: Тюменский гос. ун-т. 23 с.
- Шевелёв А. П., Фёдоров К. М., Гильманов А. Я. 2022. Оптимизация пароциклического воздействия на нефтяной пласт // Актуальные проблемы нефтегазовой отрасли. М.: Нефтяное хозяйство. С. 181–195.
- Abd El-Moniem M. 2020. Heavy oil production, Review paper // Emirates Journal for Engineering Research. Vol. 25. No. 4. Article 5. <https://scholarworks.uaeu.ac.ae/ejer/vol25/iss4/5> (дата обращения: 05.06.2023).
- Chen F, Liu H., Dong X., Wang Y., Zhang Q., Zhao D., Gai P., Yin F., Qu L. 2019. A new analytical model to predict oil production for cyclic steam stimulation of horizontal wells // SPE Western Regional Meeting (23–26 April 2019, San Jose, California, USA). Paper SPE-195291-MS. <https://doi.org/10.2118/195291-MS>
- Hasan M. M. 2021. Various techniques for enhanced oil recovery: A review // Iraqi Journal of Oil and Gas Research. Vol. 2. No. 1. Pp. 83–97. <https://doi.org/10.55699/ijogr.2022.0201.1018>
- Jones J. 1977. Cyclic steam reservoir model for viscous oil, pressure depleted gravity drainage reservoirs // SPE California Regional Meeting (13–15 April 1977, Bakersfield, California). Paper SPE-6544-MS. <https://doi.org/10.2118/6544-MS>



- Lauwerier H. A. 1955. The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid // Applied Scientific Research, Section A. Vol. 5. No. 2. Pp. 145–150. <https://doi.org/10.1007/BF03184614>
- Liu J., Zhong L., Hao T., Liu Y. 2022. Study on flow characteristics of produced fluid in Bohai Oil-field cycle steam stimulated heavy oil reservoir // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Vol. 966. Article 012006. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/966/1/012006>
- Marx J. W., Langenheim R. H. 1959. Reservoir heating by hot fluid injection // Petroleum Transactions, AIME. Vol. 216. No. 1. Pp. 312–315. <https://doi.org/10.2118/1266-G>
- Santiago C. J., Kantzas A. 2020. On the role of molecular diffusion in modelling enhanced recovery in unconventional condensate reservoirs // SPE Europec (1–3 December 2020, Virtual). Paper SPE-200596-MS. <https://doi.org/10.2118/200596-MS>
- Savchik M. B., Ganeeva D. V., Raspopov A. V. 2020. Efficiency improvement of the cyclic steam treatment of wells in the Upper Permian deposit of the Usinskoye field based on the hydrodynamic model // Perm Journal of Petroleum and Mining Engineering. Vol. 20. No. 2. Pp. 137–149. <https://doi.org/10.15593/2224-9923/2020.2.4>
- Suranto A. M., Putradianto R. R., Rizqi Al Asy'ari M., Lukmana H. A. 2022. An investigation of novel technique cyclic steam-solvent stimulation using horizontal well to escalate heavy oil production // Journal of Earth Energy Engineering. Vol. 11. No. 2. Pp. 60–68. <https://doi.org/10.25299/jeee.2022.8130>
- Swadesi B., Suranto S., Widiyaningsih I., Jani M. 2020. Optimization study of integrated scenarios on cyclic steam stimulation (CSS) using CMG STARS simulator // Journal of Petroleum and Geothermal Technology. Vol. 1. No. 1. Pp. 8–14. <https://doi.org/10.31315/jpgt.v1i1.3315>
- Vishnumolakala N., Zhang J., Ismail N. B. 2020. A comprehensive review of enhanced oil recovery projects in Canada and recommendations for planning successful future EOR projects // SPE Canada Heavy Oil Conference (28 September — 2 October 2020, Virtual). Paper SPE-199951-MS. <https://doi.org/10.2118/199951-MS>
- Yang X., Zhao H., Zhang B., Zhao Q., Cheng Y., Zhang Y., Li Y. 2022. Displacement characteristics and produced oil properties in steam flood heavy oil process // Energies. Vol. 15. No. 17. Article 6246. <https://doi.org/10.3390/en15176246>

## References

- Antoniadi, D. G., Garushev, A. R., & Ishikhanov, V. G. (2000). *A handbook on thermal methods of oil production*. Sovetskaya Kuban. [In Russian]
- Brusilovsky, A. I. (2002). *Phase transformations in the development of oil and gas fields*. Graal. [In Russian]
- Bourget, J., Surio, P., & Kombarnu, M. (1989). *Thermal methods of enhanced oil recovery*. Nedra. [In Russian]
- GOST R 51069—97. (2008). *Crude petroleum and petroleum products. Determination of density, relative density and API gravity. Hydrometer method*. Standartinform. [In Russian]
- Kanevskaya, R. D. (2002). *Mathematical modeling of hydrodynamic processes of development of hydrocarbon reserves*. Institute of Computer Research. [In Russian]
- Osipov, A. V., & Solomatina, A. G. (2011). Influence of oil recovery cycle duration on steam treatment efficiency of wellbore zone. *Drilling and Oil*, (2), 42–44. [In Russian]



- Sergeev, R. V. (1981). Thermal methods of influence on the bottom-hole zone of layer of heavy and high-viscosity oil deposits. *Oilfield Engineering*, 16. [In Russian]
- Shevelev, A. P. (2005). *Mathematical modeling of cyclic thermal effects on oil reservoirs* [Cand. Sci. (Phys.-Math.) abstract of the dissertation, University of Tyumen]. [In Russian]
- Shevelev, A. P., Fedorov, K. M., & Gilmanov, A. Ya. (2022). Optimization of cyclic steam stimulation of oil reservoir. In *Actual Problems of Oil Industry* (pp. 181–195). Oil Industry. [In Russian]
- Abd El-Moniem, M. (2020). Heavy oil production, Review paper. *Emirates Journal for Engineering Research*, 25(4), Article 5. Retrieved June 5, 2023, from <https://scholarworks.uaeu.ac.ae/ejer/vol25/iss4/5>
- Chen, F., Liu, H., Dong, X., Wang, Y., Zhang, Q., Zhao, D., Gai, P., Yin, F., & Qu, L. (April 23–26, 2019). *A new analytical model to predict oil production for cyclic steam stimulation of horizontal wells* [Conference paper SPE-195291-MS]. SPE Western Regional Meeting, San Jose, California, USA. <https://doi.org/10.2118/195291-MS>
- Hasan, M. M. (2021). Various techniques for enhanced oil recovery: A review. *Iraqi Journal of Oil and Gas Research*, 2(1), 83–97. <https://doi.org/10.55699/ijogr.2022.0201.1018>
- Jones, J. (April 13–15, 1977). *Cyclic steam reservoir model for viscous oil, pressure depleted gravity drainage reservoirs* [Conference paper SPE-6544-MS]. SPE California Regional Meeting, Bakersfield, California. <https://doi.org/10.2118/6544-MS>
- Lauwerier, H. A. (1955). The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid. *Applied Scientific Research, Section A*, 5(2), 145–150. <https://doi.org/10.1007/BF03184614>
- Liu, J., Zhong, L., Hao, T., & Liu, Y. (2022). Study on flow characteristics of produced fluid in Bohai Oilfield cycle steam stimulated heavy oil reservoir. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 966, Article 012006. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/966/1/012006>
- Marx, J. W., & Langenheim, R. H. (1959). Reservoir heating by hot fluid injection. *Petroleum Transactions, AIME*, 216(1), 312–315. <https://doi.org/10.2118/1266-G>
- Santiago, C. J., & Kantzas, A. (December 1–3, 2020). *On the role of molecular diffusion in modelling enhanced recovery in unconventional condensate reservoirs* [Conference paper SPE-200596-MS]. SPE Europec, Virtual. <https://doi.org/10.2118/200596-MS>
- Savchik, M. B., Ganeeva, D. V., & Raspopov, A. V. (2020). Efficiency improvement of the cyclic steam treatment of wells in the Upper Permian deposit of the Usinskoye field based on the hydrodynamic model. *Perm Journal of Petroleum and Mining Engineering*, 20(2), 137–149. <https://doi.org/10.15593/2224-9923/2020.2.4>
- Suranto, A. M., Putradianto, R. R., Rizqi Al Asy'ari, M., & Lukmana, H. A. (2022). An investigation of novel technique cyclic steam-solvent stimulation using horizontal well to escalate heavy oil production. *Journal of Earth Energy Engineering*, 11(2), 60–68. <https://doi.org/10.25299/jeee.2022.8130>
- Swadesi, B., Suranto, S., Widiyaningsih, I., & Jani, M. (2020). Optimization study of integrated scenarios on cyclic steam stimulation (CSS) using CMG STARS simulator. *Journal of Petroleum and Geothermal Technology*, 1(1), 8–14. <https://doi.org/10.31315/jpgt.v1i1.3315>
- Vishnumolakala, N., Zhang, J., & Ismail, N. B. (September 28–October 2, 2020). *A comprehensive review of enhanced oil recovery projects in Canada and recommendations for planning successful future EOR projects* [Conference paper SPE-199951-MS]. <https://doi.org/10.2118/199951-MS>

Yang, X., Zhao, H., Zhang, B., Zhao, Q., Cheng, Y., Zhang, Y., & Li, Y. (2022). Displacement characteristics and produced oil properties in steam flood heavy oil process. *Energies*, 15(17), Article 6246. <https://doi.org/10.3390/en15176246>

## Информация об авторах

*Александр Янович Гильманов*, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры моделирования физических процессов и систем, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
[a.y.gilmanov@utmn.ru](mailto:a.y.gilmanov@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7115-1629>

*Татьяна Николаевна Ковальчук*, аспирант, ассистент кафедры моделирования физических процессов и систем, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
[t.n.kovalchuk@mail.ru](mailto:t.n.kovalchuk@mail.ru), <https://orcid.org/0009-0001-1582-2176>

*Родион Максимович Скобликов*, студент бакалавриата, кафедра моделирования физических процессов и систем, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
[skoblikov.rodion@yandex.ru](mailto:skoblikov.rodion@yandex.ru), <https://orcid.org/0009-0007-2241-246X>

*Антон Олегович Фёдоров*, студент магистратуры, кафедра моделирования физических процессов и систем, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
[stud0000126277@study.utmn.ru](mailto:stud0000126277@study.utmn.ru), <https://orcid.org/0009-0001-8253-9637>

*Ёсинджон Назирджонович Ходжиев*, делопроизводитель кафедры алгебры и математической логики, Институт математики и компьютерных наук, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
[y.n.khodzhiev@utmn.ru](mailto:y.n.khodzhiev@utmn.ru), <https://orcid.org/0009-0002-5304-9177>

*Александр Павлович Шевелёв*, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры моделирования физических процессов и систем, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
[a.p.shevelev@utmn.ru](mailto:a.p.shevelev@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0017-4871>

## Information about the authors

*Alexander Ya. Gilmanov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Lecturer, Department of Modeling of Physical Processes and Systems, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[a.y.gilmanov@utmn.ru](mailto:a.y.gilmanov@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7115-1629>

*Tatiana N. Kovalchuk*, Postgraduate Student, Assistant, Department of Modeling of Physical Processes and Systems, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[t.n.kovalchuk@mail.ru](mailto:t.n.kovalchuk@mail.ru), <https://orcid.org/0009-0001-1582-2176>

*Rodion M. Skoblikov*, Undergraduate Student, Department of Modeling of Physical Processes and Systems, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[skoblikov.rodion@yandex.ru](mailto:skoblikov.rodion@yandex.ru), <https://orcid.org/0009-0007-2241-246X>

*Anton O. Fedorov*, Master Student, Department of Modeling of Physical Processes and Systems, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
stud0000126277@study.utmn.ru, <https://orcid.org/0009-0001-8253-9637>

*Yesinjon N. Khodzhev*, Clerk, Department of Algebra and Mathematical Logic, Institute of Mathematics and Computer Science, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
y.n.khodzhev@utmn.ru, <https://orcid.org/0009-0002-5304-9177>

*Alexander P. Shevelev*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Professor, Department of Modeling of Physical Processes and Systems, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
a.p.shevelev@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0017-4871>

## Методика расчета теплообменного аппарата с пористыми вставками на основе полученного критериального уравнения

Наталья Владимировна Рыдалина<sup>1</sup>✉, Олег Андреевич Степанов<sup>1</sup>,  
Александр Борисович Шабаров<sup>2</sup>, Михаил Алексеевич Александров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

<sup>2</sup> Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
Контакт для переписки: rydalinanv@tyuiu.ru✉

**Аннотация.** Теплообменное оборудование применяется в различных отраслях промышленности, вопросы повышения эффективности его работы являются актуальными. Пористые металлы хорошо зарекомендовали себя при использовании в теплообменных системах газотурбинных и ракетных двигателей, системах лазерных зеркал, ядерных реакторах и других подобных системах для повышения эффективности теплообмена. Использование пористых структур эффективно благодаря значительному увеличению площади теплообмена. В представленной работе приводятся результаты экспериментально-теоретических исследований эффективности использования пористых вставок из алюминия в конструкции кожухотрубного теплообменного аппарата.

Экспериментально показана эффективность использования в конструкции кожухотрубного теплообменного аппарата пористых вставок из алюминия. Получено уравнение подобия для расчета критерия Нуссельта, позволяющего найти коэффициент теплоотдачи для теплоносителя, протекающего по пористым вставкам в межтрубном пространстве теплообменного аппарата. Для вычисления площади теплообмена со стороны теплоносителя, протекающего по порам, использована кластерная модель. Показано соответствие полученной расчетной формулы критерия Нуссельта с результатами проведенной экспериментальной работы. Предложена методика проведения теплового расчета теплообменного аппарата с пористыми вставками из алюминия с использованием кластерной модели и полученного критериального уравнения для вычисления коэффициента теплоотдачи. Сделан вывод о целесообразности использования пористых металлов в теплообменных конструкциях.

**Ключевые слова:** теплообмен, пористые вставки, пористые структуры, кластерная модель, критериальное уравнение, результаты расчетов, уравнение подобия

**Цитирование:** Рыдалина Н. В., Степанов О. А., Шабаров А. Б., Александров М. А. 2023. Методика расчета теплообменного аппарата с пористыми вставками на основе полученного критериального уравнения // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 3 (35). С. 28–45. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-28-45>

Поступила 08.08.2023; одобрена 04.09.2023; принята 06.10.2023

## The method of calculating the parameters of a heat exchanger with porous inserts based on the obtained criterion equation

Natalia V. Rydalina<sup>1</sup>✉, Oleg A. Stepanov<sup>1</sup>, Alexandr B. Shabarov<sup>2</sup>,  
Mikhail A. Aleksandrov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia

<sup>2</sup> University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: rydalinanv@tyuiu.ru✉

**Abstract.** The issues of improving the efficiency of heat exchange equipment are relevant. Heat exchange equipment is used in various industries. Porous metals have proven themselves well when used in heat exchange systems of gas turbine and rocket engines, laser mirror systems, nuclear reactors and other similar systems to increase the efficiency of heat exchange. The use of porous structures is effective due to a significant increase in the heat exchange area. The paper presents the results of experimental and theoretical studies of the efficiency of using porous aluminum inserts in the construction of a shell-and-tube heat exchanger.

The efficiency of using porous aluminum inserts in the construction of a shell-and-tube heat exchanger has been experimentally shown. A similarity equation is obtained for calculating the Nusselt criterion, which makes it possible to find the heat transfer coefficient, and as a consequence, heat transfer for the coolant flowing through porous inserts in the inter-tube space of the heat exchanger. A cluster model was used to calculate the heat exchange area from the side of the coolant flowing through the pairs. The correspondence of the obtained calculation formula with the results of the experimental work is shown. A method of thermal calculation of a heat exchanger with porous aluminum inserts using a cluster model and the obtained criterion equation

for calculating the heat transfer coefficient is proposed. The conclusion is made about the expediency of using porous metals in heat exchange structures.

**Keywords:** heat transfer, porous inserts, porous structures, cluster model, criterion equation, calculation results, similarity equation

**Citation:** Rydalina, N. V., Stepanov, O. A., Shabarov, A. B., & Aleksandrov, M. A. (2023). The method of calculating the parameters of a heat exchanger with porous inserts based on the obtained criterion equation. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 28–45. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-28-45>

Received August 8, 2023; Reviewed September 4, 2023; Accepted October 6, 2023

## Введение

В конструкциях теплообменных аппаратов для повышения эффективности теплообмена используют различные способы турбулизации потоков теплоносителей. Турбулизаторы имеют различную конструкцию: ленточные, петельно-проволочные и т. д. Использование того или иного способа турбулизации обусловлено назначением теплообменного аппарата и видом теплоносителя (пар, газ, жидкость) [Лаптев и др., 2011, 2015; Лобанов, Низовитин, 2013].

Пористые металлы применяются в теплообменных аппаратах различных конструкций для интенсификации теплообмена несколькими способами. Из пористых металлов изготавливают пористые охлаждающие покрытия для движения теплоносителя. Кроме того, пористые металлы используют в пластинчатых теплообменниках для заполнения пространства между пластинами, производят пористые ребра, применяют пористые засыпки, а также используют пористые секционные кольцевые каналы для потока теплоносителей [Дементьев и др., 2017; Ильющенко и др., 2018; Генбач, Бондарцев, 2019; Rashidi и др., 2019]. Тип теплообменника, в котором используется пористый металл, обуславливается его назначением и гидродинамическими свойствами теплоносителей.

Теплогидравлические характеристики пористых материалов исследуют многие авторы, интересующиеся вопросами интенсификации процесса теплообмена. Так, вопросами теплообмена в пористых структурах занимался В. П. Исаченко [Исаченко и др., 1981]. В настоящее время ряд авторов изучают теплогидродинамические характеристики пористых материалов. И. А. Попов приводит критериальные уравнения для оценки теплоотдачи в пористых структурах, при этом предпочтение отдает высокопористым материалам. Диапазон пористости исследуемых материалов 0,85–0,95 [Попов, 2007]. Ф. В. Пелевин выводит обобщающее критериальное уравнение поверхностной теплоотдачи в тракте с межканальной транспирацией теплоносителя через материалы пористостью 0,2–0,61 в диапазоне изменения  $Re = (20...2) \cdot 10^4$  [Пелевин и др., 2013]. Э. В. Карпович по проведенным экспериментальным исследованиям

получает критериальное уравнение для конвективного теплообмена стальных сетчатых материалов. Пористость исследуемых моделей варьировалась в диапазоне 0,34–0,36 [Карпович, 2019]. В. А. Данилов рассматривает цилиндрическое пористое тело, где сток теплоты происходит с внешней поверхности и составляет уравнение переноса теплоты [Кирсанов и др., 2010, 2011]. Д. А. Коновалов предлагает математическую модель для описания явлений переноса тепла в плоских пористых теплообменниках, используемых для тепловой защиты в ракетных двигателях [Коновалов, 2017]. Нужно отметить, что исследования такого типа всегда являются актуальными для каждого из рассматриваемых случаев. Актуальность представленного в статье исследования обусловлена отсутствием методики проведения теплового расчета для теплообменных аппаратов с пористыми вставками.

Цель работы — расчетно-экспериментальное обоснование критериального уравнения теплоотдачи при течении фреона в поровых каналах и разработка методики расчета теплообменных аппаратов с пористыми вставками, полученными при спекании стружек из алюминия.

Для реализации поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- провести экспериментальное исследование параметров теплообмена при использовании в конструкции теплообменников пористых вставок;
- выполнить первичную обработку полученных данных для подтверждения эффективности использования пористых металлов в конструкции теплообменных аппаратов;
- по полученным экспериментальным данным вывести критериальное уравнение теплоотдачи при течении фреона в поровых каналах;
- разработать методику расчета теплообменного аппарата с пористыми вставками из алюминия.

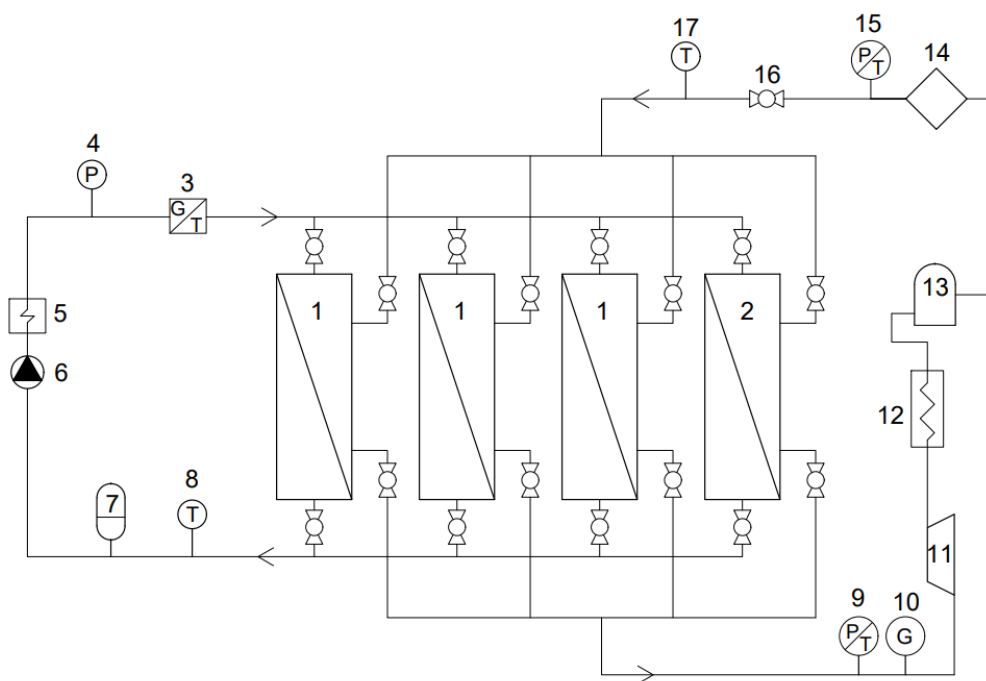
Научная новизна работы состоит в разработке методики расчета теплообменного аппарата рассматриваемой конструкции с применением пористых металлов, а также в получении критериального уравнения теплоотдачи при течении теплоносителя по пористой вставке на основе обобщения полученных экспериментальных данных.

## Методы

### Экспериментальное исследование

Для проведения экспериментальной работы создан уникальный стенд. На стенде установлены четыре теплообменных аппарата (рис. 1). В первых трех теплообменниках в межтрубном пространстве использован пористый алюминий для интенсификации теплообмена, а в конструкции четвертого нет дополнительных интенсификаторов. Организовано два контура для движения теплоносителей. Первый контур для движения горячего теплоносителя — воды, второй контур для движения холодного теплоносителя — фреона. Каждый из контуров оборудован устройствами, позволяющими производить измерение не только давления теплоносителей в контуре, но также расхода и температуры каждого теплоносителя на входе и выходе из теплообменных аппаратов.





**Рис. 1.** Экспериментальный стенд: 1 — теплообменники с пористым металлом; 2 — теплообменник без пористых вставок; 3 — измерительное устройство (для измерения расхода и температуры); 4, 9 — манометр; 5 — водогрейный котел; 6 — насос; 7 — бак расширительный; 8, 17 — датчик температуры; 10 — расходомер (*G* — расход теплоносителя); 11 — компрессор; 12 — конденсатор; 13 — ресивер; 14 — фильтр-влагодотделитель; 15 — манометр (*P* — давление, *T* — температура); 16 — дроссель

**Fig. 1.** Experimental stand: 1 — heat exchangers with porous metal; 2 — heat exchanger without porous inserts; 3 — measuring device (for measuring flow and temperature); 4, 9 — pressure gauge; 5 — hot water boiler; 6 — pump; 7 — expansion tank; 8, 17 — temperature sensor; 10 — flow meter (*G* — coolant flow rate); 11 — compressor; 12 — condenser; 13 — receiver; 14 — filter-dehumidifier; 15 — pressure gauge (*P* — pressure, *T* — temperature); 16 — throttle

Пористые вставки внутри теплообменников представляют собой цилиндры из пористого алюминия с отверстиями для трубок, по которым протекает горячий теплоноситель. Девятнадцать трубок расположены по двум concentрическим окружностям. Фреон движется по межтрубному пространству сквозь поры вдоль теплообменника. Под пористостью понимаем отношение объема пор ко всему объему цилиндрической вставки [Davletbaev и др., 2018].

Во время первого типа экспериментов сначала нагревали воду до 40...60 °С, затем включали фреоновый контур. Далее фиксировали параметры воды и фреона — расход, температуру на входе и выходе в теплообменный аппарат, а также производили контроль давления. После этого меняли расход воды и повторяли опыты.



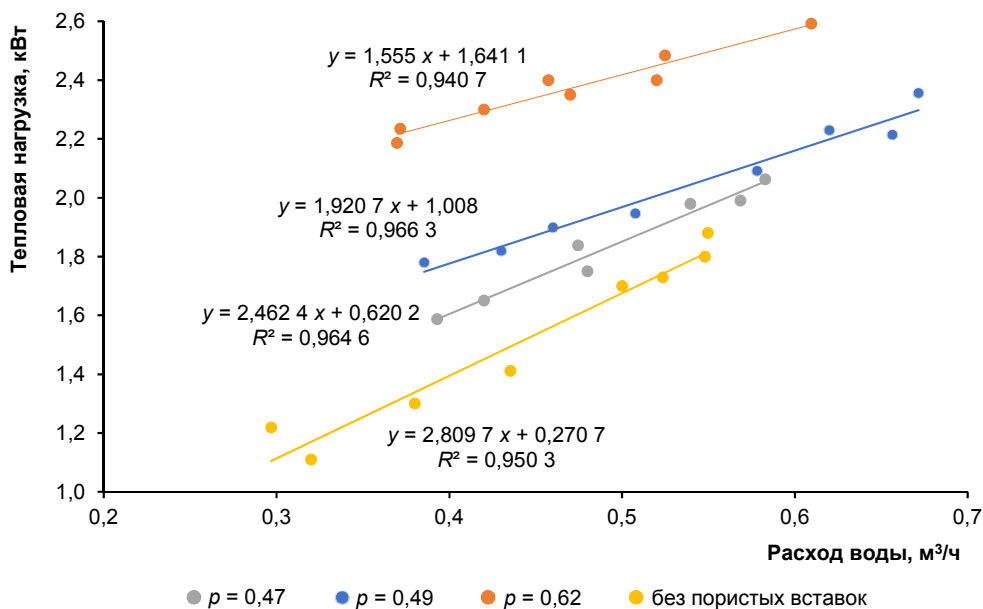


Рис. 2. Тепловая мощность теплообменников при различных расходах воды

Fig. 2. Heat capacity of heat exchangers at different water flow rates

В результате обработки полученных экспериментальных данных было определено количество теплоты  $Q$  при разных расходах горячего теплоносителя (рис. 2). Погрешность косвенных вычислений при нахождении теплового потока составила 0,31%. На рис. 2 видно, что большее количество теплоты соответствует теплообменному аппарату с наибольшей из рассматриваемых пористых вставок (с пористостью  $p = 0,62$ ).

Следующий цикл измерений состоял в фиксации темпа охлаждения воды. Вода нагревалась до 20, 40 и 80 °С. Котел отключался, и запускался фреоновый контур. Параметры воды и фреона (расход, температура, давление) фиксировались каждые 2 мин [Stepanov et al., 2019]. На рис. 3 представлены графики темпа охлаждения воды в каждом из теплообменных аппаратов. По этим графикам заметно, что наилучшие результаты при охлаждении воды достигались при использовании теплообменного аппарата с пористостью  $p = 0,62$ .

Далее произведена оценка величины гидравлических сопротивлений при прохождении фреона по пористым вставкам. На рис. 4 представлены средние величины потерь давления фреона в каждом из теплообменников, полученные при проведении экспериментальной работы. Приведенные результаты показывают, что при движении фреона по межтрубному пространству величина гидравлических потерь увеличивается в теплообменниках с уменьшением коэффициента пористости. Кроме того, можно отметить, что увеличение гидравлических потерь при использовании пористых вставок не оказывает существенного влияния на увеличение плотности теплового потока.

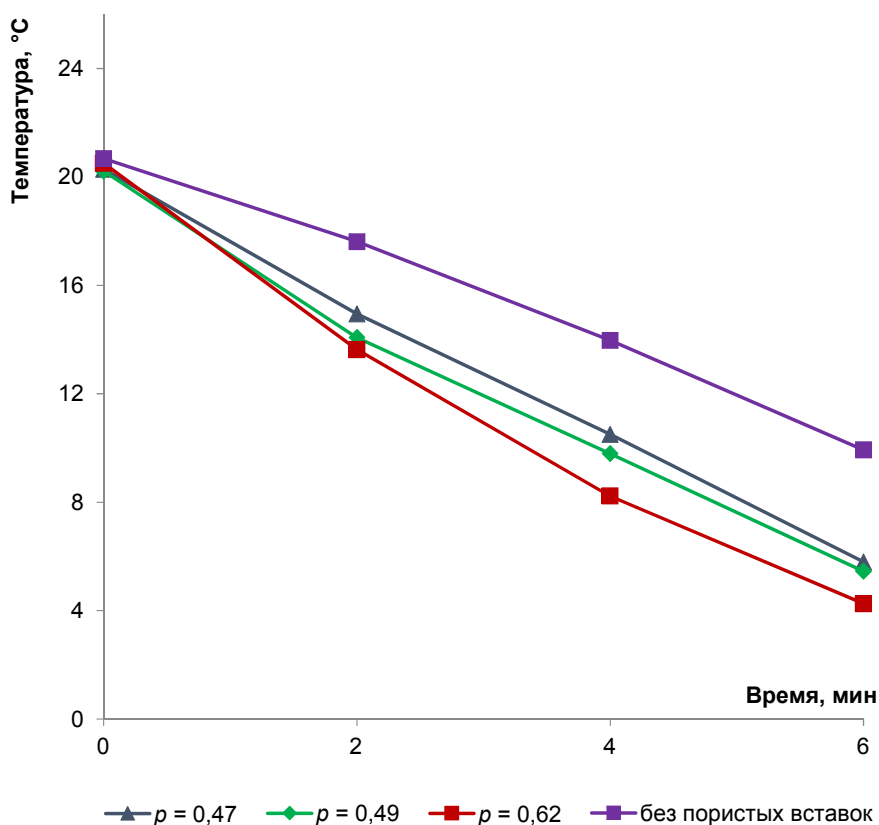


Рис. 3. Графики изменения температуры во времени при охлаждении воды  
 Fig. 3. Graphs of temperature changes over time during water cooling

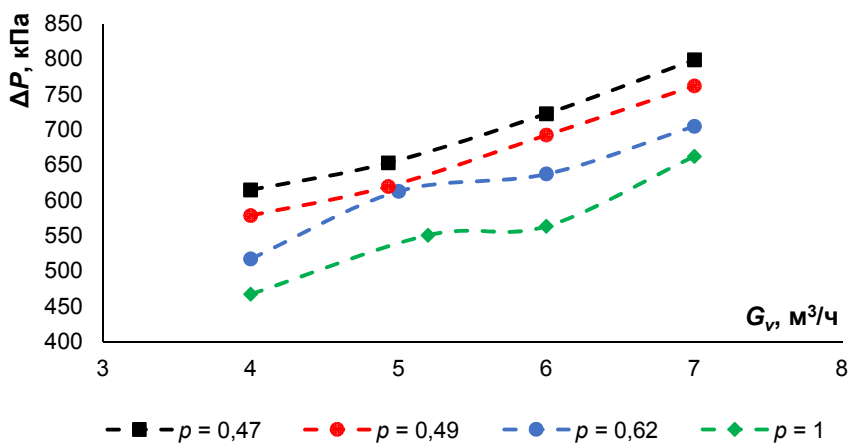


Рис. 4. Гидравлические сопротивления фреона в межтрубном пространстве  
 Fig. 4. Hydraulic resistance of freon in the inter-tube space

## Расчетно-экспериментальное исследование с получением внутриспорового критериального уравнения теплоотдачи

Одной из основных трудностей при составлении модели теплообмена в пористых конструкциях является сложность геометрической конфигурации каналов пористой структуры, не имеющих правильную геометрическую форму. В таком случае можно предложить упрощенную модель. В ее основе лежит разбиение объемного тела на кластеры, элементарные объемы. Коэффициент теплопередачи для рассматриваемого типа теплообменного аппарата позволяет найти уравнение теплопередачи для кластера:

$$Q_1 = k_{ж} F_{г} \Delta t_{ср} = k_{ж} F_{г} (\bar{t}_{ж} - \bar{t}_{с}), \quad (1)$$

где  $F_{г}$  — расчетная площадь теплообмена, внутренняя поверхность трубки,  $m^2$ ;  $Q_1$  — количество теплоты, передаваемое от одной трубки,  $m^2$ ;  $\bar{t}_{ж}$  — средняя температура по воде;  $^{\circ}C$ ;  $\bar{t}_{с}$  — средняя температура по фреону,  $^{\circ}C$ .

Коэффициент теплопередачи можно выразить из совместного решения четырех уравнений. Уравнения (1)–(4) представляют собой количество теплоты, передаваемое от горячего теплоносителя к стенке трубки, к фреону через пористый материал и через трубку соответственно:

$$Q_1 = \alpha_{ж} F_{ж} (\bar{t}_{ж} - t_{сж}), \quad (2)$$

$$Q_1 = \alpha_{с} F_{п.м} (t_{сс} - \bar{t}_{с}), \quad (3)$$

$$Q_1 = \frac{\lambda}{\delta} F_{х} (t_{сж} - t_{сс}), \quad (4)$$

где  $\alpha_{ж}$  — коэффициент теплоотдачи от воды к внутренней стенке трубки,  $Вт/(m^2 \cdot K)$ ;  $\alpha_{с}$  — коэффициент теплоотдачи от пористого материала к фреону,  $Вт/(m^2 \cdot K)$ ;  $F_{ж}$  — площадь поверхности теплообмена, внутренняя поверхность трубки,  $m^2$ ;  $t_{сж}$  — температура внутренней стенки трубки,  $^{\circ}C$ ;  $F_{п.м}$  — площадь теплообмена по поверхности капилляров вставки,  $m^2$ ;  $t_{сс}$  — температура поверхности трубки со стороны фреона;  $\lambda$  — теплопроводность материала стенки трубки,  $Вт/(m \cdot K)$ ;  $\delta$  — толщина трубки,  $m$ .

При малой толщине стенки трубки допустимо принять, что  $F_{х} = F_{ж}$ .

При совместном решении четырех уравнений получается уравнение для нахождения коэффициента теплопередачи от воды к фреону через пористую вставку:

$$k_{ж} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{ж}} + \frac{F_{ж} \delta}{F_{х} \lambda} + \frac{F_{ж}}{\alpha_{с} F_{п.м}}}. \quad (5)$$

На рис. 5 изображено поперечное сечение элементарного объема, приходящегося на одну трубку. Задача вычисления площади теплообмена  $F_{п.м}$  сводится к вычислению количества эквивалентных диаметров капилляров для одного элементарного объема.

Площадь поперечного сечения, через которое фильтруется теплоноситель, вычисляется по формуле (6):

$$S = \frac{\pi D_{вст}^2}{4} - n \frac{\pi d_{ж}^2}{4}. \quad (6)$$

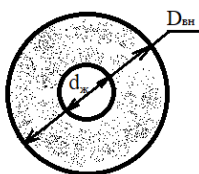


Рис. 5. Элементарный кластер пористой вставки

Fig. 5. Elementary cluster of porous insert

Геометрические размеры вставок следующие: диаметр  $D_{\text{вст}} = 0,049$  м; длина  $l = 0,2$  м; количество трубок  $n = 19$ ; внешний диаметр трубок  $d_{\text{ж}} = 0,006$  м; внутренний диаметр трубок  $d_{\text{ж.внутр}} = 0,004$  м.

Площадь поперечного сечения:

$$S = \frac{\pi 0,049^2}{4} - 19 \frac{\pi 0,006^2}{4} = 0,001\ 349\ \text{м}^2.$$

Диаметр кластера вычисляется по следующей формуле (7):

$$\frac{S}{n} = \frac{\pi(D_{\text{вн}}^2 - d_{\text{ж}}^2)}{4},$$

$$D_{\text{вн}} = \sqrt{\left(\frac{4S}{\pi n} + d_{\text{ж}}^2\right)}, \quad (7)$$

$$D_{\text{вн}} = \sqrt{\left(\frac{4 \cdot 0,001\ 349}{\pi 19} + 0,006^2\right)} = 0,011\ \text{м}.$$

Площадь отдающей тепло поверхности, образованной поверхностью поровых каналов, вычисляется через площадь поверхности одного канала:

$$F_{\text{п.м}} = N_1 \pi d_3 l, \quad (8)$$

где  $d_3$  — эквивалентный диаметр капилляра, по которому движется фреон, м;  $l$  — длина пористой вставки, м;  $N_1$  — количество капилляров в элементарном кластере.

Эквивалентный диаметр капилляра, по которому движется фреон, можно найти через коэффициент проницаемости  $k_p$  и коэффициент пористости  $p$  [Розенберг и др., 1990]:

$$k_p = \frac{p d_3^2}{32}, \quad d_3 = \sqrt{\frac{32 k_p}{p}}. \quad (9)$$

В свою очередь, коэффициент проницаемости вычисляется по уравнению Дарси [Шабаров, 2013]:

$$G_{cv} = \frac{k_p \Delta p S}{\mu l}, \quad k_p = \frac{G_{cv} \mu l}{\Delta p S}, \quad (10)$$

где  $G_{cv}$  — объемный расход теплоносителя, проходящего через пористую вставку,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $\mu$  — динамическая вязкость,  $\text{Па} \cdot \text{с}$ ;  $\Delta p$  — разность давлений на входе и выходе,  $\text{Па}$ .

Далее подробный расчет проведен для вставки с пористостью  $p = 0,62$  при объемном расходе теплоносителя  $G_{cv} = 0,001 \text{ м}^3/\text{с}$ . По экспериментальным данным, потери давления составляют  $\Delta p = 705 \text{ кПа}$ , динамическая вязкость для средней температуры фреона  $\bar{t}_c = 7 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\mu = 1,162 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ .

$$k_p = \frac{0,001 \text{ м}^3 \cdot 1,162 \cdot 10^{-5} \cdot 0,2}{705 \cdot 10^3 \cdot 0,001 \text{ м}^2} = 2,69 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2,$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{32 \cdot 2,69 \cdot 10^{-12}}{0,62}} = 1,18 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Количество капилляров в элементарном кластере  $N_1$  вычисляется через площадь живого сечения фреона:

$$Sp = N_1 n \frac{\pi d_3^2}{4}, \quad N_1 = \frac{4Sp}{\pi n d_3^2}, \quad (11)$$

$$N_1 = \frac{4 \cdot 0,001 \text{ м}^2 \cdot 0,62}{\pi \cdot 19 \cdot (1,18 \cdot 10^{-5})^2} = 404 \text{ 372},$$

$$F_{п.м} = 404 \text{ 372} \cdot \pi \cdot 1,18 \cdot 10^{-5} \cdot 0,2 = 2,99 \text{ м}^2.$$

Коэффициент теплоотдачи от стенки трубки через пористую вставку к фреону вычисляется из равенства на основе данных, полученных при экспериментальном исследовании:

$$\alpha_c = \frac{Q_1}{F_{п.м} (\bar{t}_ж - \bar{t}_c)}, \quad \alpha_c = \frac{23,9}{2,99 \cdot (13,3 - 7)} = 1,27 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}. \quad (12)$$

Для определения режима течения теплоносителя вычисляется скорость в капиллярах:

$$\omega = \frac{G_{cv}}{S}, \quad \omega = \frac{0,001 \text{ м}^3/\text{с}}{0,001 \text{ м}^2 \cdot 0,62} = 1,32 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (13)$$

Кроме того, по найденной скорости и коэффициенту теплоотдачи найдены число Рейнольдса (Re) и число Нуссельта (Nu):

$$\text{Re} = \frac{w d_3}{\nu_c}, \quad (14)$$

$$\text{Nu} = \frac{\alpha_c d_3}{\lambda_c}, \quad (15)$$

где  $\nu_c$  — кинематическая вязкость фреона,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\lambda_c$  — теплопроводность фреона,  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ . Значения  $\nu_c$  и  $\lambda_c$  находятся по таблицам теплофизических свойств фреона R404A [Цветков, Лаптев, 2013, с. 24] при средней температуре теплоносителя:  $\nu_c = 1,19 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\lambda_c = 0,0144 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ .

$$\text{Re} = \frac{1,32 \cdot 1,18 \cdot 10^{-5}}{1,19 \cdot 10^{-7}} = 130,8,$$

$$Nu = \frac{1,27 \cdot 1,18 \cdot 10^{-5}}{0,0144} = 0,00103.$$

Аналогичные расчеты были проведены для теплообменников со вставками пористостью 0,49 и 0,47. Кроме того, обработаны полученные экспериментальные данные при различных скоростях фреона и различных средних температурах для каждого теплообменника. Для каждого значения скорости проводилось порядка 10 измерений. Диапазон изменения объемной скорости фреона 3,8...6,2 м<sup>3</sup>/ч.

Уравнение подобия при вынужденном движении теплоносителя имеет вид:

$$Nu = f(Re, Pr). \quad (16)$$

В данном уравнении определяемым является Nu. Число Прандтля (Pr), являясь определяющим, составлено из физических свойств, заданных по условиям однозначности. Значения Re также являются подобными определяющими значениями, зависящими от скорости потока [Михеев, Михеева, 1977].

Pr вычисляется по формуле:

$$Pr_c = \frac{\mu_c c_c}{\lambda_c}, \quad (17)$$

где  $c_c$  — теплоемкость фреона,  $c_c = 1001,5$  Дж/(кг · К);  $\mu$  — динамическая вязкость для средней температуры фреона  $\bar{t}_c = 6,3$  °С;  $\mu = 1,162 \cdot 10^{-5}$  Па · с;  $\lambda_c$  — теплопроводность фреона при средней температуре,  $\lambda_c = 0,0144$  Вт/(м · К).

$$Pr_c = \frac{1,162 \cdot 10^{-5} \cdot 1001,5}{0,0144} = 0,808.$$

При проведении опытов средняя температура фреона принимала значения в диапазоне от 1,2 до 8,7 °С. При рассматриваемых значениях средней температуры значения теплофизических свойств фреона практически не отличаются, а значения Pr получаются из интервала 0,801...0,835. Соответственно, значение Pr можно принять за постоянную величину  $Pr = 0,815$ . Следовательно, основным фактором, влияющим на теплоотдачу при течении фреона через пористую вставку, будет являться скорость фреона в капиллярах. Поэтому уравнение подобия, характеризующее движение фреона по пористым вставкам из алюминия в рассматриваемом диапазоне температур, может иметь вид:

$$Nu = f(Re). \quad (18)$$

Анализ полученных экспериментальных результатов показал, что существует логарифмическая зависимость Nu от Re (рис. 6).

Обобщая полученные результаты, получаем следующее критериальное уравнение Nu для диапазона изменения объемной скорости фреона 3,8...6,2 м<sup>3</sup>/ч:

$$Nu = 0,00034 Re^{0,26}. \quad (19)$$

График полученного уравнения в логарифмической системе координат был нанесен на поле полученных экспериментальных данных (рис. 7).

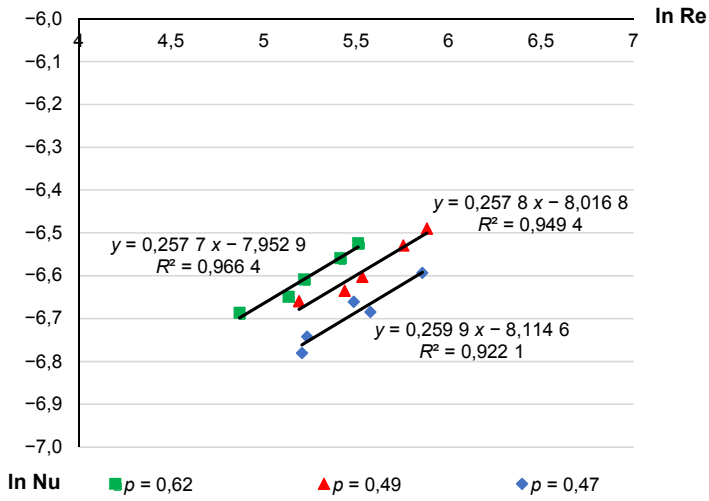


Рис. 6. Зависимость Nu от Re в логарифмических координатах

Fig. 6. Dependence of Nu on Re in logarithmic coordinates

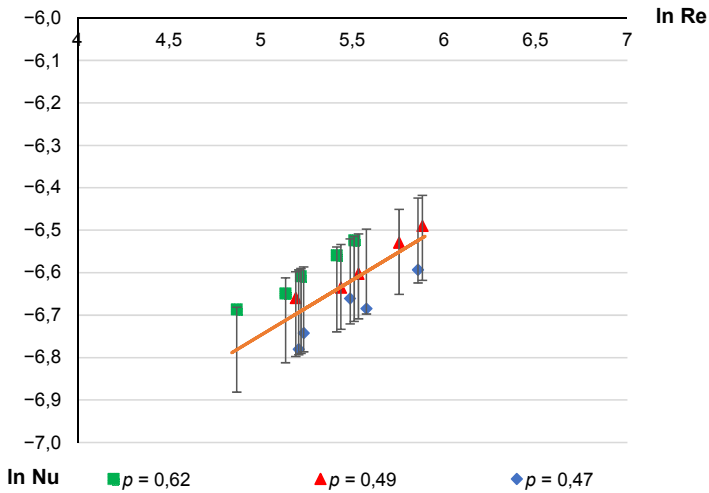


Рис. 7. Эмпирические и расчетные значения Nu с указанием абсолютного отклонения  $\pm 0,1$

Fig. 7. Empirical and calculated values of Nu indicating an absolute deviation of  $\pm 0.1$

Все полученные в ходе экспериментальной работы значения укладываются в полосу  $\pm 0,1$ , что в относительной величине составляет  $\pm 1,5\%$ . Полученный результат является удовлетворительным при проведении тепловых расчетов.

Качество полученного уравнения оценено при помощи  $F$ -критерия Фишера [Едисеева и др., 2005]. При уровне значимости 5% отвергнута гипотеза  $H_0$  о статистической незначимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи.

## Результаты и обсуждение

### Методика теплового расчета теплообменного аппарата с использованием пористых вставок из алюминия

Полученные критериальное уравнение и способ нахождения поверхности теплообмена на основе кластерной модели позволяют проводить тепловые и конструкторские расчеты теплообменных аппаратов рассматриваемого типа.

В предлагаемой методике можно выделить шесть основных этапов:

- 1) подготовка исходных данных для проведения расчета, принятие конечных температур теплоносителей;
- 2) вычисление коэффициента теплоотдачи со стороны теплоносителя — фреона, протекающего по пористому материалу;
- 3) расчет площади теплообмена со стороны теплоносителя, проходящего по пористому материалу (на основе кластерной модели);
- 4) вычисление коэффициента теплопередачи в элементарном объеме;
- 5) вычисление среднелогарифмической разности температур;
- 6) вычисление площади внутренней поверхности трубки и сравнение ее с заданной. При значительном отклонении площади поверхности трубки необходимо изменить температуры на выходе и повторить расчет.

#### Первый этап

Для проведения теплового расчета теплообменного аппарата задаются начальные температуры теплоносителей  $t_{ж1}$  и  $t_{с1}$ , объемные расходы теплоносителей  $G_{жв}$  и  $G_{св}$ . Кроме того, необходимо знать геометрические размеры теплообменного аппарата и вставок: диаметр вставки  $D_{вст}$ , длину  $l$ , количество трубок  $n$ , внешний диаметр трубок  $d_{ж}$ , внутренний диаметр трубок  $d_{ж.внутр}$ . Также по экспериментальным данным необходимо знать потери давления при прохождении фреона по пористым вставкам  $\Delta P$ .

Далее принимается температура горячего теплоносителя, до которой нужно охладить горячий теплоноситель  $t_{ж2}$ . Температура холодного теплоносителя вычисляется из уравнения теплового баланса:

$$Q = c_{рж} G_{ж} (t_{ж2} - t_{ж1}) = c_{рс} G_{с} (t_{с2} - t_{с1}). \quad (20)$$

#### Второй этап

Вычисляется коэффициент теплоотдачи со стороны фреона, проходящего по пористой вставке:

$$\alpha_c = \frac{Nu_c \lambda_c}{d_3}, \quad (21)$$

где  $Nu_c$  определяется по формуле:

$$Nu_c = 0,000\ 34\ Re^{0,26}. \quad (22)$$



Для вычисления  $Re$  используется формула:

$$Re = \frac{w d_3}{\nu_c}, \quad (23)$$

где  $w = G_{cv}/S$ ,  $d_3 = \sqrt{(32 k_p/p)}$ ,  $k_p = G_{cv} \mu l / \Delta p S$ ,  $\nu_c$  — кинематическая вязкость фреона при средней температуре,  $m^2/c$ .

Площадь сечения вставки, по которой протекает теплоноситель, вычисляется по следующей формуле:

$$S = \frac{\pi D_{вст}^2}{4} - n \frac{\pi d_{ж}^2}{4}. \quad (24)$$

### Третий этап

Необходимо вычислить площадь поверхности теплообмена со стороны теплоносителя, проходящего по пористому каналу, для вычисления коэффициента теплопередачи. Для этого необходимо найти количество эквивалентных каналов  $N_1$ , соответствующее кластеру (элементарному объему пористого материала, приходящегося на одну трубку):

$$F_{п.м} = N_1 \pi d_3 l, \quad (25)$$

где  $N_1 = 4Sp/\pi n d_3^2$ .

### Четвертый этап

Для вычисления коэффициента теплопередачи в элементарном объеме необходимо вычислить коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{ж}$  со стороны холодного теплоносителя по классическим формулам, описанным в теории теплопередачи [Исаченко и др., 1981]. Далее коэффициент теплопередачи вычисляется по формуле:

$$k_{ж} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{ж}} + \frac{F_{ж}}{F_x} \delta + \frac{F_{ж}}{\alpha_c F_{п.м}}}. \quad (26)$$

### Пятый этап

Вычисляется среднелогарифмическая разность температур, подробно представленная в теории теплопередачи [Исаченко и др., 1981]:

$$\Delta t_{cp} = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\ln \frac{\Theta_1}{\Theta_2}}, \quad (27)$$

$$\Theta_1 = \Theta_{cp}^{ap} + 0,5\Delta T,$$

$$\Theta_2 = \Theta_{cp}^{ap} - 0,5\Delta T,$$

$$\Theta_{cp}^{ap} = t_{ж1} - t_{c1} - 0,5\Delta t_{ж}\Delta t_c,$$

$$\Delta T = \sqrt{(\Delta t_{ж} + \Delta t_c)^2 - 4P\Delta t_{ж}\Delta t_c}.$$

## Шестой этап

На последнем этапе необходимо сравнить расчетную площадь внутренней поверхности трубки  $F_{ж}^*$  с действительной площадью поверхности  $F_{ж}$ . При этом расчетная площадь поверхности трубки вычисляется по формуле:

$$F_{ж}^* = \frac{Q_1}{k_{ж}\Delta t_{ср}}. \quad (28)$$

При относительном отклонении  $\delta$ , которое находится по формуле (29):

$$\delta = \frac{|F_{ж} - F_{ж}^*|}{F_{ж}} 100\%, \quad (29)$$

более чем на 5% необходимо изменить температуру горячего теплоносителя на выходе из теплообменного аппарата  $t_{ж2}$  и повторить расчет.

## Заключение

1. Экспериментально подтверждена эффективность использования пористых вставок из алюминия в конструкции кожухотрубных теплообменных аппаратов с целью увеличения интенсивности теплообмена.
2. Экспериментально показано, что увеличение гидравлических сопротивлений при использовании пористых вставок в конструкциях теплообменных аппаратов не уменьшает эффективность их использования.
3. Получено критериальное уравнение числа Нуссельта для диапазона изменения объемной скорости фреона  $3,8 \dots 6,2 \text{ м}^3/\text{ч}$ :  $Nu = 0,000 34 Re^{0,26}$ .
4. Разработана методика проведения теплового расчета кожухотрубного теплообменного аппарата, в конструкции которого используются пористые вставки из алюминия, по которым протекает фреон на основе кластерной модели.

## Список источников

- Генбач А. А., Бондарцев Д. Ю. 2019. Моделирование термических напряжений, разрушающих пористые покрытие теплообменных поверхностей энергоустановок // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. Том 21. № 3. С. 117–125. <https://doi.org/10.30724/1998-9903-2019-21-3-117-125>
- Дементьев А. И., Подоплатов Е. В., Мартинюк В. В., Корчевин Н. А. 2017. Разработка оборудования для нанесения пористого металлизированного покрытия на поверхность теплообменных труб // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. № 2 (54). С. 49–54.
- Едисеева И. И., Курышева С. В., Гордиенко Н. М., Бабаева И. В., Костеева Т. В., Михайлов Б. А. 2005. Практикум по эконометрике. М.: Финансы и статистика. 192 с.
- Ильющенко А. Ф., Черняк И. Н., Кусин Р. А., Кусин А. Р., Еремин Е. Н. 2018. Процесс получения пористых проницаемых материалов спеканием электрическим током металлических порошков, волокон и сеток // Динамика систем, механизмов и машин. Том 6. № 2. С. 191–196. <https://doi.org/10.25206/2310-9793-2018-6-2-191-196>

- Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. 1981. Теплопередача. М.: Энергоиздат. 488 с.
- Карпович Э. В. 2019. Подтверждение обобщенного критериального уравнения конвективного теплообмена для пористых структур экспериментальным путем // Агротехника и энергообеспечение. № 1 (22). С. 106–117.
- Кирсанов Ю. А., Назипов Р. А., Данилов В. А., Башкирцев Г. В. 2010. Математическая модель тепловых процессов и методика исследования теплоотдачи в пористом цилиндре // Известия Самарского научного центра РАН. Том 12. № 4. С. 90–96.
- Кирсанов Ю. А., Назипов Р. А., Данилов В. А. 2011. Теплообмен пористого тела с однофазным потоком теплоносителя // Теплофизика высоких температур. Том 49. № 2. С. 235–242.
- Коновалов Д. А. 2017. Разработка и анализ модели теплопереноса в компактных пористых теплообменниках систем управления авиационной и космической техники // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. Том 16. № 2. С. 36–46.
- Лаптев А. Г., Николаев Н. А., Башаров М. М. 2011. Методы интенсификации и моделирования тепломассообменных процессов. М.: Теплотехник. 288 с.
- Лаптев А. Г., Фарахов Т. М., Дударовская О. Г. 2015. Эффективность теплообмена в каналах с хаотичными насадочными и зернистыми слоями // Вестник Казанского государственного энергетического университета. № 1 (25). С. 79–92.
- Лобанов И. Е., Низовитин А. А. 2013. Общая теория интенсифицированного теплообмена и эффективности его применения для перспективных компактных теплообменных аппаратов, применяемых в современном металлургическом производстве // Технология материалов. № 1 (2). С. 3–42.
- Михеев М. А., Михеева И. А. 1977. Основы теплопередачи. М.: Энергия. 344 с.
- Пелевин Ф. В., Авраамов Н. И., Орлин С. А., Синцов А. Л. 2013. Эффективность теплообмена в пористых элементах конструкций жидкостных ракетных двигателей // Инженерный журнал: наука и инновации. № 4 (16). С. 1–14.
- Попов И. А. 2007. Гидродинамика и теплообмен в пористых теплообменных элементах и аппаратах. Казань: Центр инновационных технологий. 240 с.
- Розенберг Г. Д., Астрахан И. М., Евгеньев А. Е., Кочина И. Н. 1990. Сборник задач по гидравлике и газодинамике для нефтяных вузов. М.: Недра. 238 с.
- Цветков О. Б., Лаптев Ю. А. 2013. Таблицы свойств холодильных агентов: учеб.-метод. пос. СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ. 52 с.
- Шабаров А. Б. 2013. Газодинамика: учеб. пос. 2-е изд., перераб. Тюмень: Изд-во Тюменского гос. ун-та. 460 с.
- Davletbaev V., Rydalina N., Antonova E. 2018. Experimental investigation of the heat exchange intensity // MATEC Web of Conferences. Vol. 245. Article 07002. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201824507002>
- Rashidi S., Kashefi M. H., Kim K. Ch., Samimi-Abianeh O. 2019. Potentials of porous materials for energy management in heat exchangers — A comprehensive review // Applied Energy. Vol. 243. Pp. 206–232. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2019.03.200>
- Stepanov O., Aksenov B., Rydalina N., Antonova E. 2019. Heat-exchange units with porous inserts // E3S Web of Conferences. Vol. 140. Article 05006.

## References

- Genbach, A. A., & Bondartsev, D. Yu. (2019). Modeling of thermal stresses destroying the porous coating of heat-exchange surfaces of power plants. *Power Engineering: Research, Equipment, Technology*, 21(3), 117–125. <https://doi.org/10.30724/1998-9903-2019-21-3-117-125> [In Russian]
- Dementev, A. I., Podoplelov, E. V., Martynyuk, V. V., & Korchevin, N. A. (2017). Equipment for applying a porous metallic coating on the surface of heat exchanger tubes development. *Modern Technologies. System Analysis. Modeling*, 2(54), 49–54. [In Russian]
- Ediseeva, I. I., Kurysheva, S. V., Gordienko, N. M., Babaeva, I. V., Kosteeva, T. V., & Mihajlov, B. A. (2005). *A workshop on econometrics*. Finance and Statistics. [In Russian]
- Ilyushchanko, A. Ph., Charniak, I. M., Kusin, R. A., Kusin, A. R., & Eremin, E. N. (2018). The process of obtaining of porous permeable materials by electric current sintering of metal powders, fibers and nets. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines*, 6(2), 191–196. <https://doi.org/10.25206/2310-9793-2018-6-2-191-196> [In Russian]
- Isachenko, V. P., Osipova, V. A., & Sukomel, A. S. (1981). *Heat transfer*. Energoizdat. [In Russian]
- Karpovich, E. V. (2019). Confirmation of the generalized criterial equation of convective heat exchange for porous structures experimental way. *Agrotekhnika i energoobespechenie*, 1(22), 106–117. [In Russian]
- Kirsanov, Yu. A., Nazipov, R. A., Danilov, V. A., & Bashkirtsev, G. V. (2010). The mathematical model of thermal processes and the technique of heat exchange research in the porous cylinder. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 12(4), 90–96. [In Russian]
- Kirsanov, Yu. A., Nazipov, R. A., & Danilov, V. A. (2011). Heat transfer between a porous body and a single-phase flow of the heat carrier. *High Temperature*, 49(2), 227–235.
- Konovalov, D. A. (2017). Development and analysis of models of heat transfer in compact porous heat exchangers of aero space control systems. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 16(2), 36–46. [In Russian]
- Laptev, A. G., Nikolaev, N. A., & Basharov, M. M. (2011). *Methods of intensification and modeling of heat and mass transfer processes*. Teplotekhnika. [In Russian]
- Laptev, A. G., Farakhov, T. M., & Dudarovskaya, O. G. (2015). Efficiency of heat transfer in a channel with a packed chaotic and grainy layers. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo energeticheskogo universiteta*, (1), 79–92. [In Russian]
- Lobanov, I. E., & Nizovitin, A. A. (2013). The general theory of intensified heat exchange and the effectiveness of its application for promising compact heat exchangers used in modern metallurgical production. *Tekhnologiya materialov*, 1(2), 3–42. [In Russian]
- Miheev, M. A., & Miheeva, I. A. (1977). *Fundamentals of heat transfer*. Energiya. [In Russian]
- Pelevin, F. V., Avraamov, N. I., Orlin, S. A., & Sintsov, A. L. (2013). Heat exchange efficiency in porous structural elements of liquid-propellant rocket engines. *Engineering Journal: Science and Innovation*, (4), 1–14. [In Russian]
- Popov, I. A. (2007). *Hydrodynamics and heat transfer in porous heat exchange elements and apparatuses*. Center of Innovative Technologies. [In Russian]
- Rozenberg, G. D., Astrahan, I. M., Evgenev, A. E., & Kochina, I. N. (1990). *Collection of problems in hydraulics and gas dynamics for oil universities*. Nedra. [In Russian]

- Cvetkov, O. B., & Laptev, Yu. A. (2013). *Tables of refrigerants properties*. ITMO University; The Institute of Refrigeration and Biotechnology (IRBT). [In Russian]
- Shabarov, A. B. (2013). *Fluid dynamics: a training manual* (2<sup>nd</sup> ed.). University of Tyumen. [In Russian]
- Davletbaev, V., Rydalina, N., & Antonova, E. (2018). Experimental investigation of the heat exchange intensity. *MATEC Web of Conferences*, 245, Article 07002. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201824507002>
- Rashidi, S., Kashefi, M. H., Kim, K. Ch., & Samimi-Abianeh, O. (2019). Potentials of porous materials for energy management in heat exchangers — A comprehensive review. *Applied Energy*, 243, 206–232. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2019.03.200>
- Stepanov, O., Aksenov, B., Rydalina, N., & Antonova, E. (2019). Heat-exchange units with porous inserts. *E3S Web of Conferences*, 140, Article 05006.

## Информация об авторах

*Наталья Владимировна Рыдалина*, старший преподаватель кафедры промышленной теплоэнергетики, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия  
[rydalinanv@tyuiu.ru](mailto:rydalinanv@tyuiu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5628-188X>

*Олег Андреевич Степанов*, доктор технических наук, профессор кафедры промышленной теплоэнергетики, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия  
[stepanovoa@tyuiu.ru](mailto:stepanovoa@tyuiu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-9202-2885>

*Александр Борисович Шабаров*, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной и технической физики, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
[a.b.shabarov@utmn.ru](mailto:a.b.shabarov@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5374-8704>

*Михаил Алексеевич Александров*, кандидат технических наук, доцент кафедры транспорта углеводородных ресурсов, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия  
[aleksandrovma@tyuiu.ru](mailto:aleksandrovma@tyuiu.ru)

## Information about the authors

*Natalia V. Rydalina*, Senior Lecturer, Department of Industrial Heat Power Engineering, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[rydalinanv@tyuiu.ru](mailto:rydalinanv@tyuiu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5628-188X>

*Oleg A. Stepanov*, Dr. Sci. (Tech.), Professor, Department of Industrial Heat Power Engineering, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[stepanovoa@tyuiu.ru](mailto:stepanovoa@tyuiu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-9202-2885>

*Alexandr B. Shabarov*, Dr. Sci. (Tech.), Professor, Department of Applied and Technical Physics, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[a.b.shabarov@utmn.ru](mailto:a.b.shabarov@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5374-8704>

*Mikhail A. Aleksandrov*, Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor, Department of Transportation of Hydrocarbon Resources, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[aleksandrovma@tyuiu.ru](mailto:aleksandrovma@tyuiu.ru)

## Оптимизация и актуализация алгоритма расчета интегрированных моделей газоконденсатных месторождений

Артём Владимирович Кулагин<sup>1✉</sup>, Артём Игоревич Варавва<sup>2</sup>,  
Евгений Сергеевич Торопов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

<sup>2</sup> Газпромнефть НТЦ, Тюмень, Россия

<sup>3</sup> Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

Контакт для переписки: k.artem2013@yandex.ru<sup>✉</sup>

**Аннотация.** Моделирование с использованием гидродинамического симулятора tNavigator с опцией Network на данный момент позволяет решать множество задач в области интегрированного моделирования. Однако на сегодняшний день существуют проблемы, вынуждающие либо применять альтернативные методики расчетов, либо вводить допущения. Одной из таких проблем на данный момент является невозможность расчета температур на сети сбора продукции. Целью данной статьи является определение актуальности выбранной проблемы, литературный и технический обзор возможных решений, а также предложение конкретного пути решения для актуализации и оптимизации расчетов температур на сети сбора продукции. В качестве главного из рассматриваемых в статье решений предлагается написание на языке Python скрипта для tNavigator, рассчитывающего актуальные температуры в связке с интегрированной моделью, что позволяет исключить риски снижения прибыли проекта в существующих моделях. Научная новизна заключается в использовании эффективного пути решения данной проблемы, который исключает необходимость использовать связку Network tNavigator — PetEx RESOLVE — PetEx GAP, сильно замедляющую расчеты моделей. Выводом может служить предварительная оценка эффективности и точности предлагаемого решения относительно способа с использованием RESOLVE и GAP.

**Ключевые слова:** разработка месторождений, концептуальная разработка, интегрированное моделирование, Network tNavigator, актуализация расчетов, расчет температур

**Благодарности:** работа выполнена при поддержке ПАО «Газпромнефть НТЦ».

**Цитирование:** Кулагин А. В., Варавва А. И., Торопов Е. С. 2023. Оптимизация и актуализация алгоритма расчета интегрированных моделей газоконденсатных месторождений // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 3 (35). С. 46–65. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-46-65>

Поступила 22.06.2023; одобрена 13.09.2023; принята 06.10.2023

## Optimization and actualization of the algorithm for calculating integrated gas condensate field models

Artem V. Kulagin<sup>1✉</sup>, Artem I. Varavva<sup>2</sup>, Evgeniy S. Toropov<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Kazan Federal University, Kazan, Russia

<sup>2</sup> Gazpromneft Science & Technology Center, Tyumen, Russia

<sup>3</sup> University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: [k.artem2013@yandex.ru](mailto:k.artem2013@yandex.ru)<sup>✉</sup>

**Abstract.** Simulation using the hydrodynamic simulator tNavigator with Network option currently allows solving many tasks in the field of integrated modeling. However, in the current solution of the integrated modeling problem, there are problems that force either to apply alternative calculation methods or to introduce assumptions. One of these problems at the moment is the impossibility of calculating temperatures in the collection network. The purpose of this article is to determine the relevance of the chosen problem, literary and technical reviews of possible solutions, as well as to propose a specific solution for updating and optimizing temperature calculations on the product collection network. The main solution considered in the article is to write a Python script for tNavigator that calculates current temperatures in connection with the integrated model, which eliminates the risks of reducing the project's profit in existing models. The scientific novelty lies in the use of an effective way to solve this problem, which eliminates the need to use the Network tNavigator — PetEx RESOLVE — PetEx GAP bundle, which greatly slows down model calculations. The conclusion can be a preliminary assessment of the effectiveness and accuracy of the decision regarding the method using RESOLVE and GAP.

**Keywords:** field development, conceptual development, integrated modeling, Network tNavigator, calculation update, temperature calculation

**Acknowledgements:** the research was supported by Gazpromneft Science & Technology Center.



**Citation:** Kulagin, A. V., Varavva, A. I., & Toropov, E. S. (2023). Optimization and actualization of the algorithm for calculating integrated gas condensate field models. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 46–65. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-46-65>

Received June 22, 2023; Reviewed September 13, 2023; Accepted October 6, 2023

## Введение

При проектировании интегрированной модели разработки месторождения на данный момент используется сценарный подход к решению этой задачи. Различные параметры проекта, такие как латеральная и вертикальная проницаемости горных пород, слагающих нефтегазоносные пласты, план разработки месторождения, начальные геологические запасы и т. д., на данный момент ранжируются по вероятностному распределению на варианты P10, P50 и P90 [Апасов и др., 2018].

В целях более полного раскрытия проблемы в производственном контексте, создание интегрированной модели месторождения условно можно разделить на четыре главных этапа.

На первом этапе сценарного подхода выбираются исходя из опыта наиболее реалистичные варианты развития проекта (сценарии), каждый из которых представляет из себя комбинацию вероятностных значений параметров интегрированной модели. Для рассматриваемого в данной работе месторождения количество таких сценариев достигает нескольких десятков, при этом среднее время расчета интегрированной модели для каждого составляет два рабочих дня.

На втором этапе проектирования результаты расчета интегрированных моделей передаются в отдел, занимающийся расчетом обустройства месторождений и экономики проектов, для более детального моделирования инфраструктуры, объема выхода продукта и экономических показателей для каждого сценария развития проекта.

Третьим этапом можно считать отбор нескольких наиболее интересных вариантов разработки месторождения с уточненными параметрами обустройства и экономики и последующую отправку в отдел интегрированного моделирования для детальной проработки сценариев с учетом взаимовлияния сети сбора и пласта. Затем процесс итерируется на более глубоком уровне проработки [Апасов и др., 2018].

В итоге на четвертом этапе формируется основной сценарий, согласно которому в дальнейшем будет разрабатываться месторождение. Следует, однако, принимать во внимание трудоемкость и продолжительность создания финальной интегрированной модели. Так, может потребоваться ввести в расчеты некоторые допущения, чтобы учесть последствия вероятных задержек на дорожную карту проекта, даже если влияние этих допущений изучено недостаточно подробно [Ходаков и др., 2022].

Чтобы локализовать проблему для существующего актива компании, в качестве исходных данных при создании работоспособного и эффективного решения будут



использованы сведения о газоконденсатном месторождении X на полуострове Ямал, которое принадлежит к типу месторождений «гринфилд» (green field), т. е. находится на этапе разведки [Армянинов и др., 2019].

Проблема заключается в следующем: еще на стадии первого этапа температуры на сети сбора газа для всех сценариев в целях оперативного осуществления расчетов используются исключительно по базовому варианту P50. При этом справедливо предположение, что привлечение в расчет дополнительных запасов из сценария P10 либо исключение их из расчета приведет к значительным изменениям в температурном распределении внутри газосборной сети (ГСС) и на входе в установку комплексной подготовки газа (УКПГ) вследствие присутствия в сценарии P10 нижележащих горячих пластов с аномально высоким пластовым давлением (АВПД) [Степаненко и др., 2018].

На данный момент расчет интегрированных моделей производится в следующей связке: Network tNavigator — PetEx RESOLVE — PetEx GAP. Результаты расчета в гидродинамическом симуляторе tNavigator передаются в базу данных RESOLVE, затем записываются в модель сети сбора GAP, в которой рассчитываются динамические параметры системы «пласт — сеть сбора» [Столяров и др., 2018]. Текущий метод расчета позволяет с удовлетворительной степенью точности прогнозировать разработку месторождения и формировать профили добычи. Тем не менее из-за того, что на этапе формирования сценариев разработки месторождения вариативность интегрированных моделей исчисляется десятками единиц, каждую из которых необходимо просчитывать данным методом, длительность расчета всех сценариев может составлять несколько месяцев, что сильно тормозит работу целого блока разработки и снижает его продуктивность.

В качестве решения данной проблемы была разработана система интегрированно-го моделирования с использованием tNavigator, которая позволила сократить время расчетов примерно в два раза. В то же время при использовании опции Network пропадает возможность расчета температур на сети сбора и полноценного учета взаимовлияния системы «пласт — сеть сбора» [Варавва и др., 2022].

По этой причине на данный момент было принято следующее решение данной проблемы: т. к. первоначальный способ расчета является полностью рабочим, но время выполнения работ слишком велико, температура на входе в УКПГ для каждой модели была взята одинаковой в целях исключения необходимости расчета с помощью RESOLVE по каждому варианту и сведения количества расчетов к одному [Зипир и др., 2020].

Вследствие этого допущения при разработке проекта месторождения возникают следующие риски:

1. Недовыработка жидких углеводородов (ЖУВ). При расчете массового состава выходного продукта важно учитывать актуальную входную температуру в сепарационной установке, поскольку выход стабильного газового конденсата (СГК) и сжиженных углеводородных газов (СУГ) напрямую зависит от температуры газа перед сепарацией;

2. Риски гидратообразования в сети сбора для выбранного сценария. Отсутствие актуальных температур для варианта с разработкой более холодных вышележащих пластов может спровоцировать выбор варианта с газовыми гидратами на ГСС, что может стать причиной погрешности в определении NPV проекта;
3. Дополнительные затраты на сдвиг дат ввода лупингов и дожимной компрессорной станции (ДКС). Температурное распределение также влияет на скорости движения газа внутри ГСС, соответственно, при использовании неактуальных температур даты ввода лупингов и ДКС могут оказаться нерелевантными, а значит, при превышении скоростных ограничений раньше запланированного срока провести дисконтирование и добиться экономии при заранее осуществленных проектно-изыскательских работах не представится возможным. Кроме того, снижение добычи вследствие превышения ограничений по скоростному режиму негативно скажется на экономике проекта;
4. Риск отсеивания потенциально благоприятных сценариев развития проекта еще на стадии формирования начальных профилей добычи на первом этапе расчета интегрированных моделей.

Существуют разные способы разработки месторождения для различных концепций запасов. В рассматриваемом в данной работе проекте газоконденсатного месторождения X в концепции P50 разрабатываются верхние и средние по глубине залегания пласты с температурой газа от 20 до 30 °С. В концепции P90 пробуриваются и разрабатываются только верхние пласты; таким образом, температура на ГСС при P90 должна быть ниже, чем при P50. В концепции P10 разрабатываются также и наиболее глубоко залегающие пласты, что должно значительно повысить температуру на ГСС относительно P50. Вследствие этих предположений выдвинута следующая гипотеза: с изменением сценария проекта возможно такое изменение температуры флюида на всей сети сбора газа, которое повлечет за собой изменение массового состава выходных продуктов [Коршак и др., 2021].

Чтобы проверить данную гипотезу, были созданы три упрощенные тестовые модели сепарационной установки с изменяющейся входной температурой газа. Технологические параметры схемы представлены на рис. 1.

На рис. 1 показано, что при использовании различных входных температур газа сильно разнится массовая доля добываемых ЖУВ. Так, при нагревании она растет, а при охлаждении — падает. Предположим, что сценарию P90 входная температура в УКПП соответствует 20 °С, сценарию P50 — 40 °С, а сценарию P10 — 60 °С. Взяв средний дебит СГК и СУГ, мы можем увидеть, что различие в добыче ЖУВ, относительно показателей с температурами P50, для модели P10 будет равно 0,7 г/м<sup>3</sup>, а для P90 — 3,3 г/м<sup>3</sup>.

На рис. 2 представлены профили добычи товарной продукции при 20, 40 и 60 °С на входе в УКПП, соответствующие прогнозным температурам для вариантов P10, P50 и P90. Разница в добыче считается как разница между годовыми значениями добычи СГК и СУГ между вариантами P50 — P90 и P50 — P10.

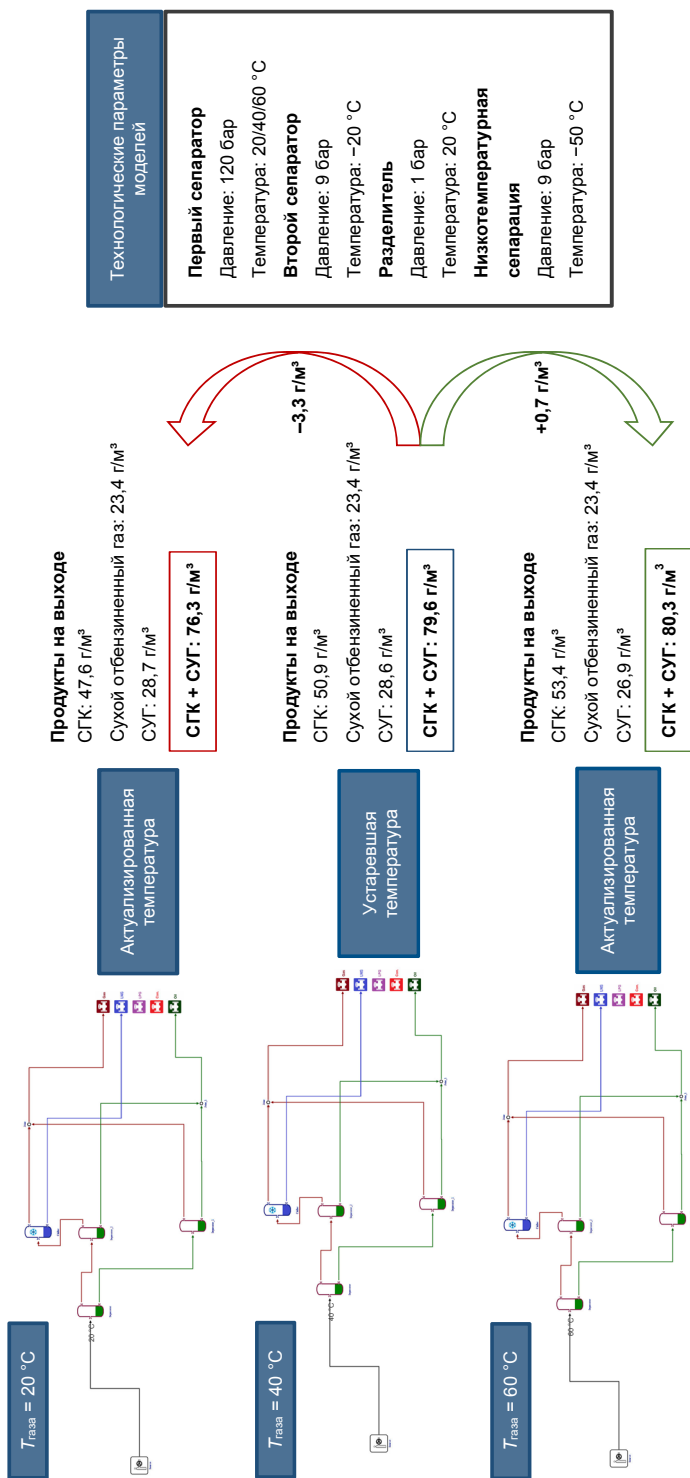
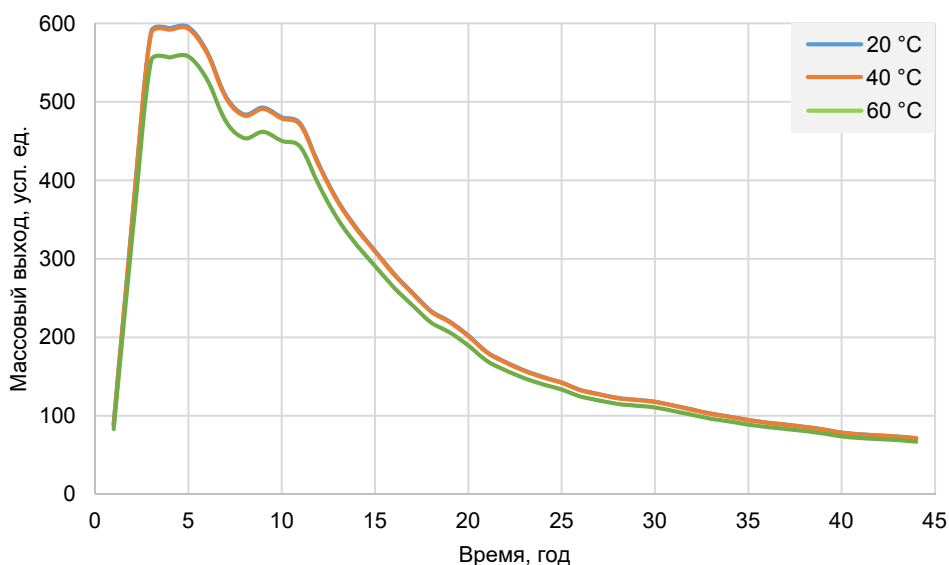
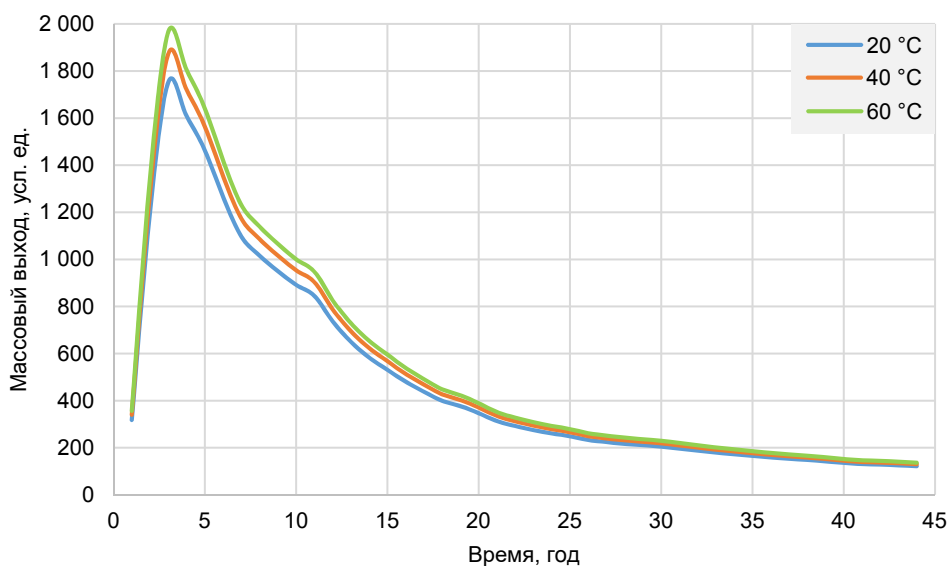


Рис. 1. Тестовые сепарационные установки

Fig. 1. Test separation units



**Рис. 2.** Диаграммы различия в добыче SGK (сверху) и СУГ (снизу) в зависимости от температуры

**Fig. 2.** Diagrams of differences in stable gas condensate (top) and liquified hydrocarbon gases (bottom) production depending on temperature

Разница в накопленной добыче SGK и СУГ за весь период разработки месторождения X представлена в таблице 1.

Изменения по добыче SGK и СУГ требуют детального рассмотрения их влияния на экономику проекта, т. к. относительное изменение добычи для некоторых показателей

достигает 4%. (В данном случае профили для 20 и 60 °С являются актуализированными — ранее они сливались с профилем 40 °С.)

В ходе проработки рисков по недобыработке ЖУВ была проведена поверхностная экономическая оценка влияния проблемы (таблица 2).

**Таблица 1.** Разница в добыче по различным сценариям

**Table 1.** Difference in production under various scenarios

Сценарий	СГК, тыс. тонн	СУГ, тыс. тонн
P10 (60 °С)	+1 100	-600
P90 (20 °С)	-1 500	+30

**Таблица 2.** Влияние вариации температур на экономику проекта

**Table 2.** Impact of temperature variation on project economics

Сценарий	$\Delta NPV$ , млрд руб.
P10 (60 °С)	-9
P90 (20 °С)	+5

В таблице 2 представлены  $\Delta NPV$  проекта: сценарий P10 получает прирост к NPV, что делает вариант более привлекательным для инвестиционного комитета, а сценарий P90 получает снижение NPV, что делает проект менее надежным.

Целью данной работы является актуализация температур на сети сбора газа, оптимизация расчетов интегрированных моделей и сокращение трудозатрат при помощи коррекции алгоритма расчета интегрированных моделей.

В данной работе выдвинута гипотеза о значительном изменении добычи ЖУВ при использовании в расчетах актуальных температур на сети сбора, исследовано влияние изменения температур на добычу ЖУВ (СГК и СУГ) на месторождении X, а также проведена поверхностная оценка влияния разницы температур на экономику проекта.

## Методы

В рамках поиска решения инженерной задачи проведен литературный и технический обзор существующих путей решения данной проблемы, проведена сравнительная оценка каждого из предложенных вариантов и отобрано наиболее оптимальное решение.

Первый путь решения проблемы — произвести расчеты каждой интегрированной модели в связке Network tNavigator — PetEx RESOLVE — PetEx GAP. При помощи данного варианта будут получены актуальные температуры на входе в УКПГ по каждому сценарию [Варавва и др., 2022]. Однако в таком случае усложнится коммуникация между отделами на каждом этапе создания единой интегрированной модели месторождения, а также сильно замедлится работа по проекту (вплоть до нескольких месяцев), поскольку количество вариантов интегрированных моделей может исчисляться десятками, а длительность расчета одного сценария (два рабочих дня) значительно

увеличивает трудозатраты на расчет моделей. Из-за продолжительных расчетов могут быть сдвинуты сроки по дорожной карте проекта, отложены инвестиционные решения и начало бурения. В итоге данный вариант потеряет актуальность к моменту реализации [Облеков и др., 2018].

Второй путь — приобретение лицензий на специализированное ПО, в частности на дополнительный модуль tNavigator — «Дизайнер Сетей». Функционал данной программы позволяет осуществлять расчеты интегрированных моделей без применения интегратора (в данном случае — RESOLVE), при этом, однако, покупка и продление лицензий значительно увеличивает операционные расходы, что может привести к падению прибыльности проекта и свести к минимуму положительное влияние на экономику проекта.

Следующий вероятный вариант решения проблемы — применение «ЭРА: ИСКРА» с интеграцией «Гибр-ИМА». Из преимуществ данного решения можно выделить надежность доступа к лицензиям и независимость от внешнего рынка разработчиков специализированного ПО, т. к. развитием программного комплекса «ЭРА» занимается непосредственно «Газпромнефть НТЦ». Помимо этого, решение хорошо вписывается в политику импортозамещения. При этом наиболее серьезным недостатком является текущее развитие данного программного обеспечения, а также отсутствие действующих лицензий не в сфере тестирования продукта, что накладывает ограничение на возможность реализации решения [Богданов и др., 2019].

Использование проху-модели также может считаться одним из способов решения проблемы, поскольку в практике широко распространено использование данных с месторождений-аналогов для проведения прогнозных расчетов [Баталов, 2019]. Однако сохраняется проблема нехватки или отсутствия необходимых данных для месторождений с нестандартными условиями залегания пластов. К примеру, для газоконденсатного месторождения X с АВПД на нижних пластах практически отсутствуют данные по аналогам в архивной базе «Газпромнефть НТЦ», что ставит перед проху-моделью задачу экстраполяции, в которой по определению проху-модель является неприменимой.

Пятый путь — создание скрипта для tNavigator через APPLYSCRIPT на универсальном и быстро развивающемся языке программирования Python 3.8, на котором представляется возможным реализовать данный проект с большой точностью и гибким функционалом. Из преимуществ можно выделить теоретическую корректность: всю математическую базу расчетов можно реализовать в Python. Ожидаемая стоимость реализации достаточно низкая, поскольку для написания скрипта не требуется опытный специалист [Ходаков и др., 2022]. Помимо всех перечисленных преимуществ стоит также отметить надежность решения вследствие распространенности практики написания Python-скриптов для решения локальных задач в «Газпромнефть НТЦ» [Ходаков и др., 2022]. Именно это решение будет рассмотрено как основное в дальнейшем.

Для проверки гипотезы о реализуемости решения с помощью Python-скрипта созданы три тестовые модели пластов (slave-модели) и одна тестовая интегрированная модель (master-модель), к которым были написаны скрипты по расчету температур на языке Python. Тестовые модели пластов и схема сети сбора представлены на рис. 3 и 4.

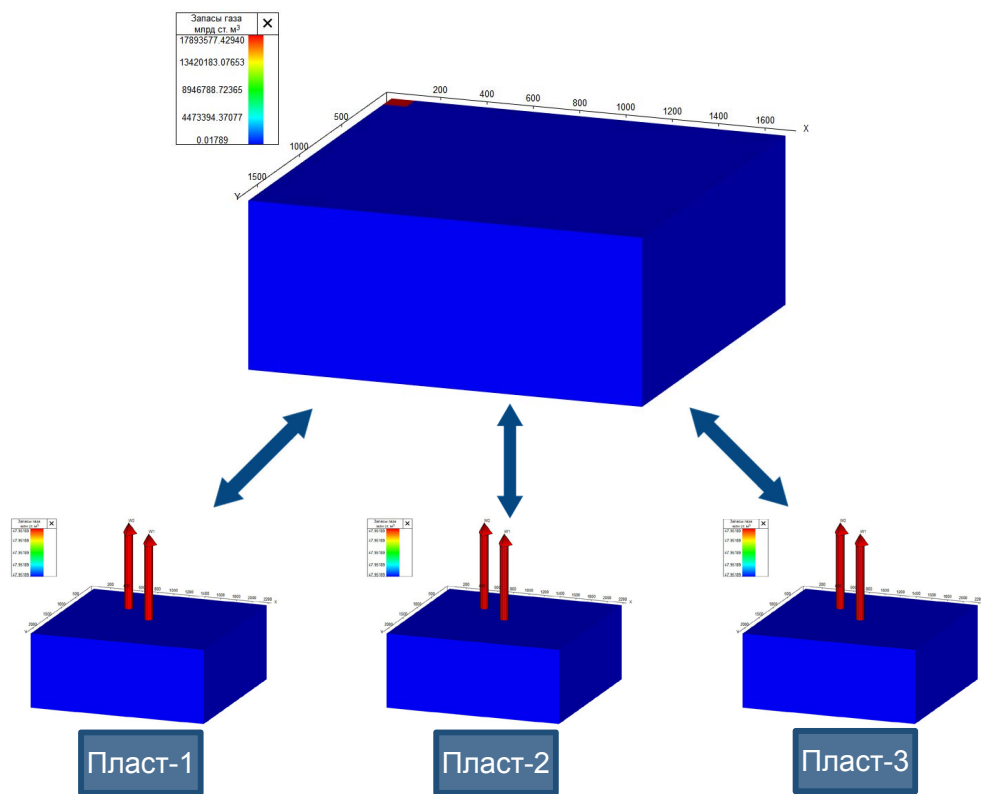


Рис. 3. Тестовые модели пластов

Fig. 3. Test models of reservoirs

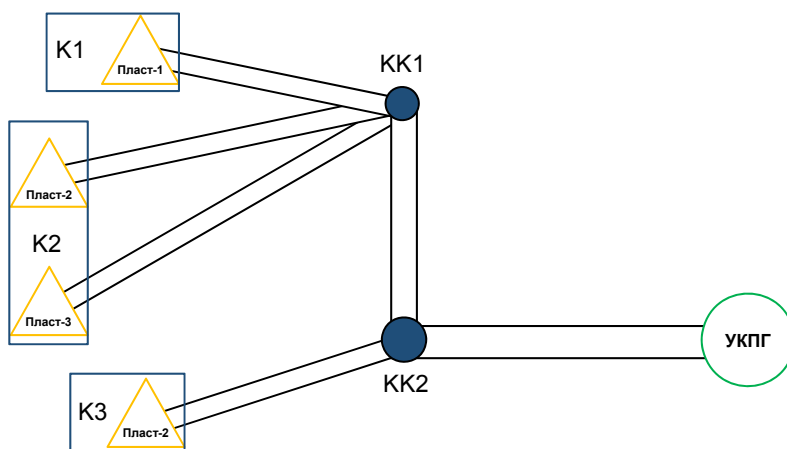


Рис. 4. Схема газосборной сети: К1, К2, К3 — куст скважин № 1, № 2, № 3; КК1, КК2 — точка врезки № 1, № 2; УКПГ — установка комплексной подготовки газа

Fig. 4. Gas-collecting system scheme: K1, K2, K3 — well pad No. 1, No. 2, No. 3; КК1, КК2 — tie-in point No. 1, No. 2; УКПГ — complex gas treatment unit (CGTU)

Скрипт будет интегратором расчетов, поэтому в качестве входных данных должны быть приняты дебит газа, конденсатогазовый фактор, водогазовый фактор, а также устьевые давление и температура. Основная проблема заключается в расчете температуры в линии после штуцера на скважинах [Бортников и др., 2019]. Гидродинамические модели способны предоставить данные по необходимым параметрам вплоть до устья, но поскольку штуцер является частью сети сбора газа, то температура в линии рассчитывается на каждой модели отдельно при помощи корреляции (1):

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 3,57 \frac{P_{pr}^{0,25}}{C_p T_{pr}} \left( 0,005 \cdot 0,001 \ln \frac{P_1}{P_2} \right) + \\ + 0,29 \cdot 10^{-7} ((10 P_1)^2 - (10 P_2)^2) - \\ - 209 \cdot 10^{-7} (10 P_1 - 10 P_2), \quad (1)$$

где  $T_1$  — температура до штуцера, К;  $T_2$  — температура после штуцера, К;  $T_{pr}$  — приведенная температура, д. ед.;  $P_1$  — давление до штуцера, атм;  $P_2$  — давление после штуцера, атм;  $P_{pr}$  — приведенное давление, д. ед.;  $C_p$  — молярная изобарная теплоемкость, Дж/(моль · К), рассчитываемая по формуле Гухмана — Нагаревой (2):

$$C_p = \left( 3,15 + 0,022 \, 03 T - 0,149 \cdot 10^{-4} T^2 + \frac{0,238 MP^{1,124}}{(T/100)^{5,08}} \right), \quad (2)$$

где  $T$  — температура до штуцера, К;  $M$  — молярная масса газа из лабораторных исследований, г/моль.

Температура смешанного газа на точках врезки системы сбора газа рассчитывается по материально-тепловому балансу (3):

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n (C_i Q_i T_{lin_i})}{\sum_{i=1}^n (C_i Q_i)}, \quad (3)$$

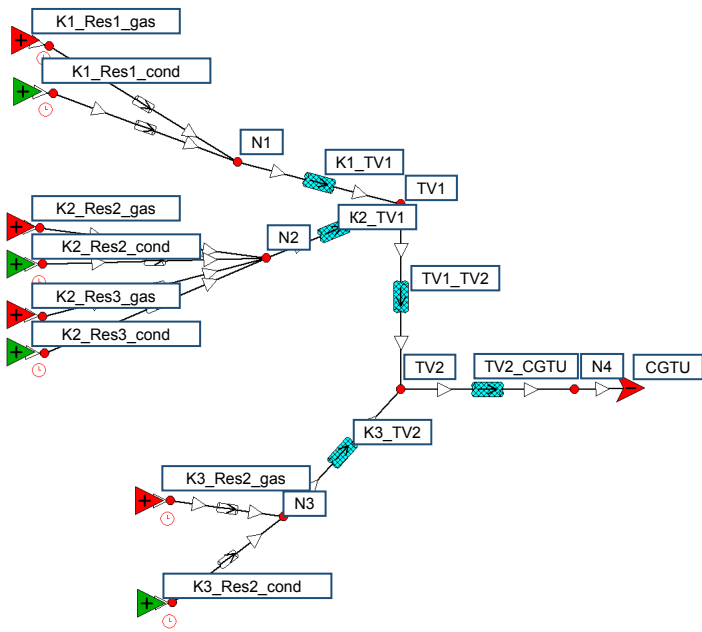
где  $C_i$  — теплоемкость газа, Дж/К;  $Q_i$  — массовый дебит газа, кг/сут;  $T_{lin_i}$  — температура газа в линии, К.

По результатам работы тестового скрипта формируется файл с расширением TXT, содержащий в себе информацию по температурам, дебитам и теплоемкостям для каждого куста и узлов газосборной сети.

Чтобы проверить корректность результатов расчетов при использовании Python-скрипта, была создана релевантная тестовая модель сети сбора в программе для моделирования наземного обустройства Petroleum Experts GAP (рис. 5).

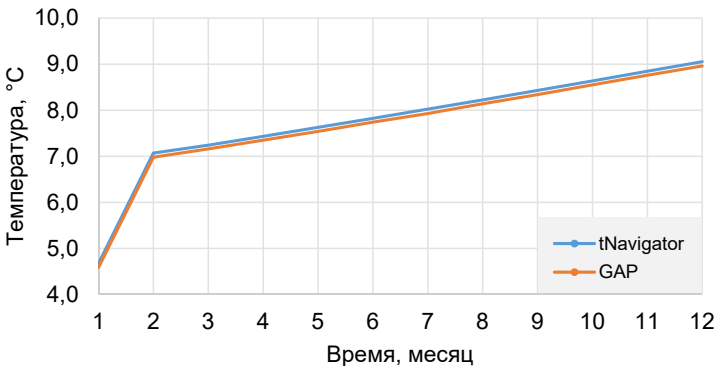
В качестве исходных параметров для кустов использовались данные из тестовой интегрированной модели в гидродинамическом симуляторе. Результаты расчетов представлены на рис. 6 и в таблице 3.





**Рис. 5.** Тестовая модель газосборной сети: K1, K2, K3 — куст скважин № 1, № 2, № 3; Res1, Res2, Res3 — пласт № 1, № 2, № 3; gas, cond — флюид источника (красный подает газ, зеленый подает конденсат); N1, N2, N3, N4 — узел № 1, № 2, № 3, № 4; TV1, TV2 — точка врезки № 1, № 2; CGTU — установка комплексной подготовки газа; K1\_TV1, K2\_TV1, K3\_TV2, TV1\_TV2, TV2\_CGTU — трубы, соединяющие точки K1, K2, K3, TV1, TV2 и TV1, TV2, CGTU на схеме

**Fig. 5.** Test model of gas-collecting system: K1, K2, K3 — well pad No. 1, No. 2, No. 3; Res1, Res2, Res3 — reservoir No. 1, No. 2, No. 3; gas, cond — source fluid (red feeds gas, green feeds condensate); N1, N2, N3, N4 — node No. 1, No. 2, No. 3, No. 4; TV1, TV2 — tie-in point No. 1, No. 2; CGTU — complex gas treatment unity; K1\_TV1, K2\_TV1, K3\_TV2, TV1\_TV2, TV2\_CGTU — pipes connecting points K1, K2, K3, TV1, TV2 and TV1, TV2, CGTU on the diagram



**Рис. 6.** Результаты расчета температур на входе в УКПГ при помощи Python-скрипта

**Fig. 6.** Calculation results of temperatures at the entrance to the CGTU using Python script

**Таблица 3.** Результаты расчетов температур на входе в УКПГ и отклонения от примера GAP**Table 3.** Results of calculations of temperatures at the entrance to the CGTU and deviations from GAP example

Месяц	tNavigator, °C	GAP, °C	Абсолютная ошибка, °C	Относительная ошибка, %
1	4,673	4,59	-0,083	1,82
2	7,069	6,98	-0,089	1,28
3	7,242	7,16	-0,082	1,15
4	7,436	7,35	-0,086	1,17
5	7,626	7,54	-0,086	1,13
6	7,825	7,74	-0,085	1,10
7	8,020	7,93	-0,090	1,14
8	8,225	8,14	-0,085	1,04
9	8,431	8,34	-0,091	1,09
10	8,634	8,55	-0,084	0,99
11	8,846	8,76	-0,086	0,98
12	9,053	8,96	-0,093	1,04

Согласно полученным результатам, решение имеет высокую точность: относительная ошибка не превышает 2%, а абсолютная — 0,1 °C, что говорит о легитимности использования данного решения в дальнейшем.

## Результаты и обсуждение

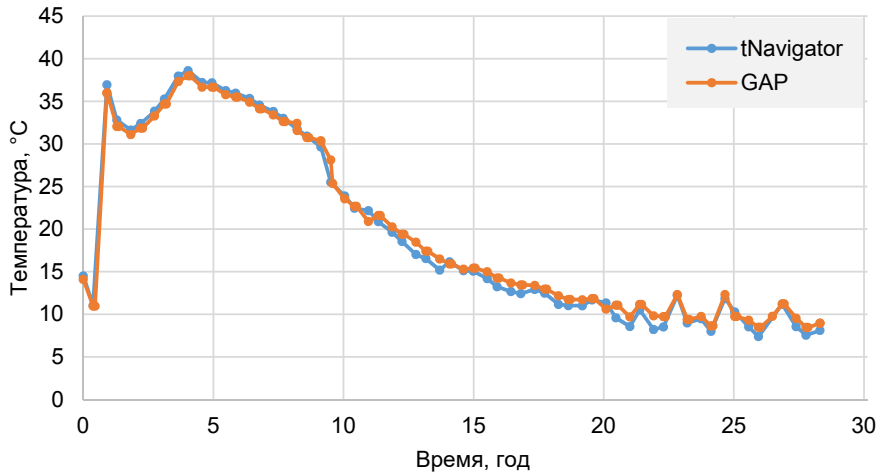
Поскольку расчет тестовой модели является достаточно быстрым процессом, влияние работы скрипта на расчет модели можно оценить суммарно не более чем в 1 мин за 12 итераций расчета, что является удовлетворительным результатом.

Следующим шагом для реализации выбранного пути решения было масштабирование Python-скрипта на полномасштабную интегрированную модель месторождения X. На данном этапе проведена унификация скрипта для любого газового и газоконденсатного месторождения вне зависимости от размеров сети сбора газа. Полученные результаты расчетов для сценария P50 месторождения X показаны на рис. 7 и в таблице 4.

По результатам расчета видно, что абсолютная ошибка не превышает 2 °C, а относительная — 10%. Более высокие значения ошибок по сравнению с тестовой моделью связаны с довольно большим количеством интерполяций TPD-таблиц, сформированных ранее для каждого участка трубопровода с целью учета потерь тепла при движении газа по трубам, что в конечном итоге увеличивает погрешность расчетов.

Время расчета полномасштабной модели без использования скрипта — 10 ч 45 мин 16 с, время расчета модели с использованием скрипта — 10 ч 48 мин 23 с. Работа скрипта инициализировалась каждые 6 месяцев расчета, незначительно повлияв на время расчета модели. Помимо получаемых значений температуры на входе в УКПГ, известно также

распределение температур и давлений на всей сети сбора газа, что дает возможность контролировать гидратообразование по ГСС. Кроме того, скрипт обладает функционалом по накладыванию ограничений на скорость газа в интегрированной модели при помощи использования актуальных температур на кустах на каждом расчетном шаге, что позволит предотвратить нарушение скоростных ограничений на сети сбора газа.



**Рис. 7.** Результаты расчета температур на входе в УКПГ полномасштабной модели месторождения X при помощи Python-скрипта для варианта P50

**Fig. 7.** Results of the calculation of temperature at the entrance to the CGTU of a full-scale field X model using a Python script for case P50

**Таблица 4.** Результаты расчетов и отклонения от примера GAP полномасштабной модели месторождения X на входе в УКПГ для варианта P50

**Table 4.** Results of calculations and deviations from GAP example of a full-scale field X model at the entrance to the CGTU for case P50

Год	tNavigator, °C	GAP, °C	Абсолютная ошибка, °C	Относительная ошибка, %
0	14,494	14,09	-0,404	2,79
5	33,843	33,29	-0,553	1,63
10	36,255	35,78	-0,475	1,31
15	31,744	31,57	-0,174	0,55
20	22,171	20,89	-1,281	5,78
25	15,180	16,50	1,320	-8,70
30	12,667	13,67	1,003	-7,92
35	11,000	11,70	0,700	-6,36
40	9,020	9,81	0,790	-8,76
45	11,846	12,32	0,474	-4,00
50	8,960	9,54	0,580	-6,47

В целях уточнения потерь по массовому выходу ЖУВ, принято решение отказаться от использования в оценке упрощенной модели УКПГ в пользу актуальной установки, использующейся на данный момент в расчетах проекта. При помощи работы Python-скрипта получены актуальные температурные распределения для вариантов P10, P50 и P90 (в данном контексте такая терминология нужна для описания температурного распределения: P10 — температуры выше раннего распределения, P50 — устаревшие температуры, P90 — температуры ниже раннего распределения). На рис. 8 видно, как изменилось температурное распределение для разных вариантов разработки месторождения. В таблице 5 показано изменение добычи для вариантов P10 и P90 при изменении входного профиля температур на УКПГ для каждого варианта в отдельности.

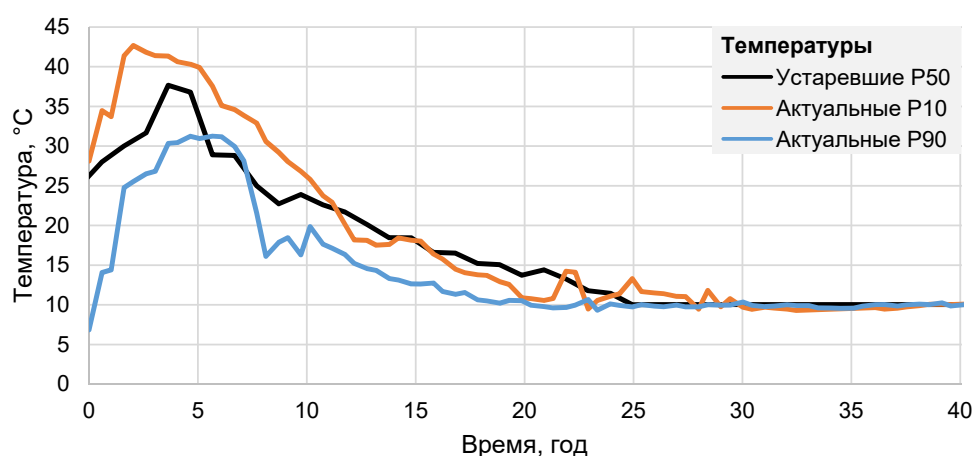


Рис. 8. Актуализированное температурное распределение для вариантов P10 и P90

Fig. 8. Updated temperature distribution for P10 and P90 options

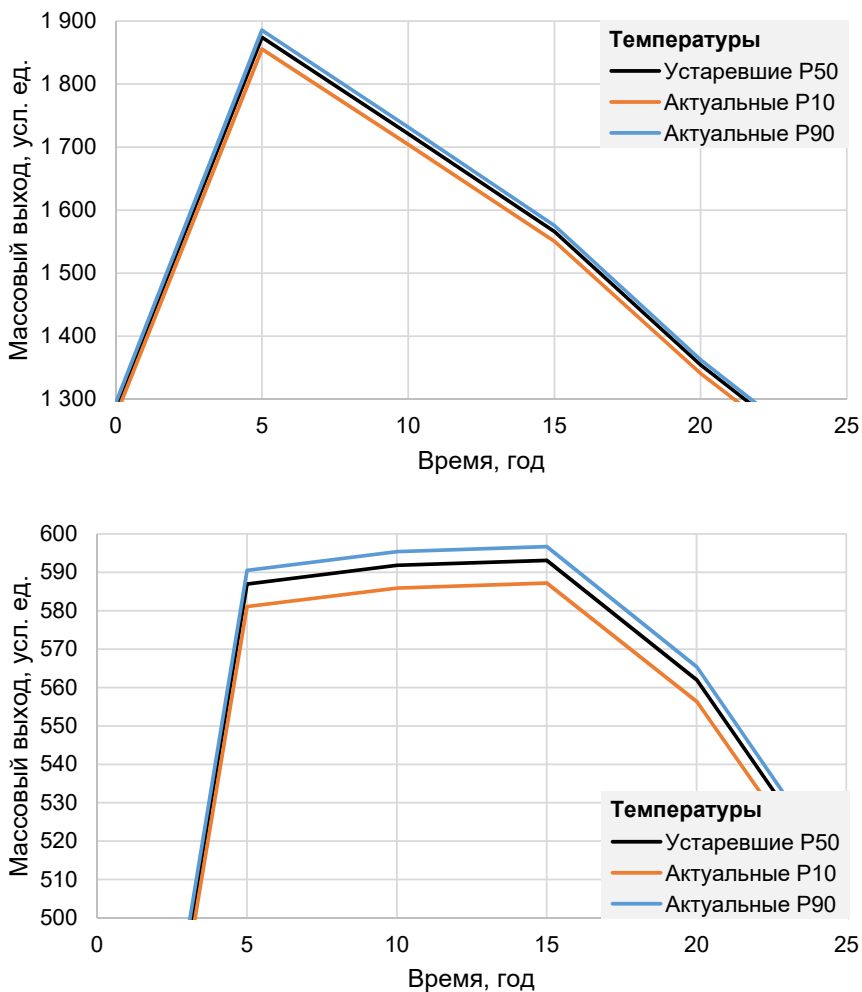
Таблица 5. Разница в накопленной добыче продукции для вариантов P10 и P90

Table 5. Difference in accumulated production for the P10 and P90 cases

Сценарий	СГК, тыс. тонн	СУГ, тыс. тонн
P10	-230	-104
P90	+138	+63

По актуализированным профилям (рис. 9) можно заметить, что при переходе к варианту P90 температурный профиль по абсолютным значениям становится ниже, чем использовавшийся ранее, а для P10, наоборот, выше, что полностью соответствует ожиданиям, выдвинутым в гипотезе, сформулированной в данной работе.

Также в целях актуализации влияния недовыработки ЖУВ в расчетах использована полноценная финансово-экономическая модель проекта и получены результаты, отраженные в таблице 6.



**Рис. 9.** Актуализированное различие в добыче СГК (сверху) и СУГ (снизу) для вариантов P10 и P90

**Fig. 9.** Updated difference in production of stable gas condensate (top) and liquefied hydrocarbon gases (bottom) for the P10 and P90 cases

**Таблица 6.** Актуализированное влияние на экономику для вариантов P10 и P90

**Table 6.** Updated economic impact for options P10 and P90

Входные данные	%
Налог на прибыль	20
Ставка дисконтирования	20
Сценарий	$\Delta NPV$ , млрд руб.
P10	-1,8
P90	+1,2

## Заключение

Таким образом, результатом актуализации и оптимизации может служить Python-скрипт, позволяющий предотвратить целый ряд рисков, вызванных недостатками текущего алгоритма расчета интегрированных моделей.

Без применения связки tNavigator — RESOLVE — GAP время работы сократилось на 60 ч в год, а время сбора и анализа результатов — на 45 ч в год в течение 5 лет. В качестве результирующего показателя решения инженерной проблемы в таблице 7 приведены значения изменения экономических показателей проекта при внедрении интегрированных моделей Python-скрипта в расчете на одного специалиста со среднечасовой оплатой 1 000 руб./ч.

**Таблица 7.** Экономический эффект от внедрения Python-скрипта в расчете на одного специалиста

**Table 7.** Economic effect of Python-script implementation per one specialist

Статьи экономии	Экономический эффект, млн руб.
Трудозатраты	1,575
Лицензия Petroleum Experts RESOLVE	5

Как можно отметить, покупка лицензий Petroleum Experts RESOLVE становится необязательной: роль интегратора выполняет Python-скрипт, потому общая экономия на весь период разработки интегрированной модели месторождения X может составлять до 6,575 млн руб.

## Список источников

- Апасов Р. Т., Чамеев И. Л., Варавва А. И., Верниковская О. С., Ильясов А. Р., Вирт В. И. 2018. Интегрированное моделирование — инструмент повышения качества проектных решений для разработки нефтяных оторочек многопластовых нефтегазоконденсатных месторождений // Нефтяное хозяйство. № 12. С. 46–49. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2018-12-46-49>
- Армянинов Е. В., Кузилов И. О., Грицай И. А., Крюков М. А., Лесной А. Н., Роженцев Д. В., Санников И. Н. 2019. Особенности применения интегрированного подхода на начальных этапах реализации проекта разработки и обустройства на примере месторождения D33 шельфа Балтийского моря // Нефтяное хозяйство. № 8. С. 58–61. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2019-8-58-61>
- Богданов Е. В., Чамеев И. Л., Решетников Д. А., Перевозкин И. В., Ткачук А. В., Шорохов А. Н. 2019. Интегрированное моделирование как инструмент, повышающий эффективность разработки многопластового нефтегазоконденсатного месторождения // Нефтяное хозяйство. № 12. С. 52–55. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2019-12-52-55>
- Бортников А. Е., Кордик К. Е., Мавлетдинов М. Г., Рясный А. Г., Баталов Д. А., Юсупов Р. М., Зыков М. А., Зипир В. Г., Гонтарев Д. П. 2019. Применение интегрированной модели в процессе разработки газоконденсатной части Пякяхинского месторождения

- ТПП «Ямалнефтегаз» ООО «ЛУКОЙЛ — Западная Сибирь» // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. № 3. С. 84–88. <https://doi.org/10.30713/2413-5011-2019-3-84-88>
- Варавва А. И., Апасов Р. Т., Бадгутдинов Р. Р., Ямалетдинов А. Ф., Корякин Ф. А., Сандалова Е. Е., Самоловов Д. А., Бикбулатов С. М., Нехаев С. А. 2022. Иерархия интегрированных моделей. Применение интегрированного моделирования различной степени сложности на всех этапах жизненного цикла газоконденсатных проектов // PRОнефть. Профессионально о нефти. Том 7. № 2. С. 41–51. <https://doi.org/10.51890/2587-7399-2022-7-2-41-51>
- Зипир В. Г., Зипир М. Г., Зыков М. А., Кордик К. Е., Рясный А. Г. 2020. О подходах к долгосрочному планированию разработки газоконденсатной части Пяяхинского месторождения с использованием интегрированной модели // Нефтепромысловое дело. № 5 (617). С. 5–10. [https://doi.org/10.30713/0207-2351-2020-5\(617\)-5-10](https://doi.org/10.30713/0207-2351-2020-5(617)-5-10)
- Коршак А. А., Коршак Ан. А., Пшенин В. В. 2021. К расчету фазовых переходов в конденсационных установках рекуперации паров нефти и нефтепродуктов // Нефтяное хозяйство. № 6. С. 98–101. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2021-6-98-101>
- Облеков Г. И., Копусов С. С., Галиос Д. А., Стрекалов А. В., Попов И. П. 2018. Совершенствование системы мониторинга разработки месторождения природного газа и газового конденсата // Нефтепромысловое дело. № 1. С. 17–22.
- Степаненко А. А. 2018. Практические методики гидродинамического моделирования // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. № 9. С. 41–45. <https://doi.org/10.30713/2413-5011-2018-9-41-45>
- Столяров В. Е., Еремин Н. А. 2018. Оптимизация процессов добычи газа при применении цифровых технологий // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. № 6. С. 54–61. <https://doi.org/10.30713/2413-5011-2018-6-54-61>
- Ходаков И. О., Ахмедшин Т. Р., Белоногов Е. В., Платон Д. Н., Картавцева И. А., Боярский С. В., Афанасьев А. А. 2022. Разработка программных решений для повышения качества и эффективности интегрированного моделирования // PRОнефть. Профессионально о нефти. Том 7. № 1. С. 144–151. <https://doi.org/10.51890/2587-7399-2022-7-1-144-151>

## References

- Apasov, R. T., Chameev, I. L., Varavva, A. I., Vernikovskaya, O. S., Ilyasov, A. R., & Virt, V. I. (2018). Integrated modeling: a tool to improve quality of design solutions in development of oil rims of multi-zone oil-gas-condensate fields. *Oil Industry*, (12), 46–49. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2018-12-46-49> [In Russian]
- Armyaninov, E. V., Kuzilov, I. O., Gritsay, I. A., Kyukov, M. A., Lesnoy, A. N., Rozhentsev, D. V., & Sannikov, I. N. (2019). Features of applying the integrated approach at the initial stages of development project. D33 offshore field development project overview. *Oil Industry*, (8), 58–61. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2019-8-58-61> [In Russian]
- Bogdanov, E. V., Chameev, I. L., Reshetnikov, D. A., Perevozkin, I. V., Tkachuk, A. V., & Shorokhov, A. N. (2019). Integrated modeling as a tool to increase the development efficiency of the multilayer oil-gas-condensate field. *Oil Industry*, (12), 52–55. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2019-12-52-55> [In Russian]

- Bortnikov, A. E., Kordik, K. E., Mavletdinov, M. G., Ryasny, A. G., Batalov, D. A., Yusupov, R. M., Zykov, M. A., Zipir, V. G., & Gontarev, D. P. (2019). An integrated model application when developing a gas-condensate area of Pyakyakhinskoye field of “Yamalneftegas” territorial production company (TPC) of LLC “LUKOIL — Western Siberia”. *Geology, Geophysics and Development of Oil and Gas Fields*, (3), 84–88. <https://doi.org/10.30713/2413-5011-2019-3-84-88> [In Russian]
- Varavva, A. I., Apasov, R. T., Badgutdinov, R. R., Yamaletdinov, A. F., Koryakin, F. A., Sandalova, E. E., Samolovov, D. A., Bikbulatov, S. M., & Nekhaev, S. A. (2022). Hierarchy of integrated models. Applying integrated modeling of varying detail at different stages of gas condensate projects development. *PRoneft. Professionally about Oil*, 7(2), 41–51. <https://doi.org/10.51890/2587-7399-2022-7-2-41-51> [In Russian]
- Zipir, V. G., Zipir, M. G., Zykov, M. A., Kordik, K. E., & Ryasny, A. G. (2020). On approaches to long-term planning of the development of a gas-condensate part of the Pyakyakhinsky deposit applying an integrated model. *Oilfield Engineering*, (5), 5–10. [https://doi.org/10.30713/0207-2351-2020-5\(617\)-5-10](https://doi.org/10.30713/0207-2351-2020-5(617)-5-10) [In Russian]
- Korshak, A. A., Korshak, An. A., & Pshenin, V. V. (2021). Calculation of phase transitions in condensation units for recovery of oil and oil products vapors. *Oil Industry*, (6), 98–101. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2021-6-98-101> [In Russian]
- Oblekov, G. I., Kopusov, S. S., Galios, D. A., Strekalov, A. V., & Popov, I. P. (2018). Updating of a monitoring system that is applied when developing a natural gas and a gas-condensate deposit. *Oilfield Engineering*, (1), 17–22. [In Russian]
- Stepanenko, A. A. (2018). Practical methods of hydrodynamic modelling. *Geology, Geophysics and Development of Oil and Gas Fields*, (9), 41–45. <https://doi.org/10.30713/2413-5011-2018-9-41-45> [In Russian]
- Stolyarov, V. E., & Eremin, N. A. (2018). The optimization of the gas production processes by the application of the digital technologies. *Geology, Geophysics and Development of Oil and Gas Fields*, (6), 54–61. <https://doi.org/10.30713/2413-5011-2018-6-54-61> [In Russian]
- Khodakov, I. O., Ahmedshin, T. R., Belonogov, E. V., Platon, D. N., Kartavtseva, I. A., Boyarskiy, S. V., & Afanasiev, A. A. (2022). Development of software solutions to improve the quality and efficiency of integrated modeling. *PRoneft. Professionally about Oil*, 7(1), 144–151. <https://doi.org/10.51890/2587-7399-2022-7-1-144-151> [In Russian]

## Информация об авторах

Артём Владимирович Кулагин, лаборант, НИЦМУ «Рациональное освоение запасов жидких углеводородов планеты», Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

k.artem2013@yandex.ru

Артём Игоревич Варавва, кандидат физико-математических наук, руководитель по разработке продукта, Газпромнефть НТЦ, Тюмень, Россия

varavva\_artem@yandex.ru

Евгений Сергеевич Торопов, кандидат технических наук, руководитель программы «Инжиниринг месторождений нефти и газа», Передовая инженерная школа, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

e.s.toropov@utmn.ru



## Information about the authors

*Artem V. Kulagin*, Laboratory Assistant, World-Class Scientific Center “Rational Development of the Planet’s Liquid Hydrocarbon Reserves”, Kazan Federal University, Kazan, Russia  
k.artem2013@yandex.ru

*Artem I. Varavva*, Cand. Sci. (Phys-Math.), Product Development Manager, Gazpromneft Science & Technology Center, Tyumen, Russia  
varavva\_artem@yandex.ru

*Evgeniy S. Toropov*, Cand. Sci. (Tech.), Head of the Program “Oil and Gas Field Engineering”, Advanced Engineering School, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
e.s.toropov@utmn.ru

## Аналитическое решение уравнения теплопроводности с учетом конвекции с изотермическими граничными условиями

Родион Михайлович Ганопольский ✉

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
Контакт для переписки: [r.m.ganopolskij@utmn.ru](mailto:r.m.ganopolskij@utmn.ru) ✉

**Аннотация.** При добыче углеводородов постоянно возникает задача определения распространения тепла по пласту. Изменение температуры влияет на вязкость нефти, а следовательно, и на скорость ее добычи. С учетом процесса фильтрации в классическом уравнении теплопроводности возникают добавочные члены, в том числе нелинейные. Для решения модифицированных уравнений используются разнообразные численные схемы. Часто возникает вопрос сходимости таких методов. Задача этой работы — получить аналитическое решение уравнения теплопроводности в тех случаях, когда это возможно, чтобы в дальнейшем сравнить с ними численные решения.

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, температурное поле, конвекция, теплоперенос, массоперенос, метод Фурье, интеграл Пуассона, фильтрация

**Цитирование:** Ганопольский Р. М. 2023. Аналитическое решение уравнения теплопроводности с учетом конвекции с изотермическими граничными условиями // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 3 (35). С. 66–82. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-66-82>

Поступила 31.07.2023; одобрена 20.09.2023; принята 06.10.2023

# Analytical solution of heat equation taking into account convection with isothermal boundary conditions

Rodion M. Ganopolskij✉

University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: r.m.ganopolskij@utmn.ru✉

**Abstract.** The problem of determining the distribution of heat through the reservoir constantly arises in the production of hydrocarbons. Changes of temperature affect the viscosity of oil and consequently the rate of its production. Taking into account the filtration process, additional terms appear in the classical heat conduction equation, including nonlinear ones. Various numerical schemes are used to solve the modified equations. The question of the convergence of such methods often arises. The task of this work is to obtain an analytical solution of the heat equation in cases where it is possible, in order to further compare numerical solutions with them.

**Keywords:** heat equation, temperature field, convection, heat transfer, mass transfer, Fourier method, Poisson integral, filtration

**Citation:** Ganopolskij, R. M. (2023). Analytical solution of heat equation taking into account convection with isothermal boundary conditions. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 66–82. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-66-82>

Received July 31, 2023; Reviewed September 20, 2023; Accepted October 6, 2023

## Введение

Одна из актуальных задач нефтяной отрасли — разработка месторождений с трудноизвлекаемыми запасами, в частности с высоковязкой нефтью. Фильтрационные свойства нефти с высокой вязкостью сильно зависят от температуры, поэтому пласт стараются предварительно прогреть. Физические процессы нагревания и фильтрации происходят одновременно. Чтобы полностью смоделировать технологический процесс, необходимо сначала построить математическую модель прогрева пласта с высоковязкой нефтью. Для этого используют уравнение теплопроводности с конвекцией [Чернышов, Пивоварова, 2020; Гильманов, Шевелёв, 2021; Жумаев, Тошева, 2022], в которое добавляется градиент температуры, умноженный на скорость конвекции. Замыкающим (для определения скорости) служит уравнение массопереноса [Дульнев, 2012].

Из-за неоднородностей и нелинейных членов решить такую систему аналитически невозможно. По этой причине используются различные численные методы, например разностные схемы или метод конечных объемов [Чернышов, Пивоварова, 2020]. Многие исследователи проводят работу в этой и смежных областях ([Дорошевич, 2009; Чернышов, Пивоварова, 2020; Гильманов, Шевелёв, 2021; Жумаев, Тошева, 2022; Babayar-Razlighi, 2023] и др.). Для получения более точных прогнозов распределения температуры они предпринимают примерно одинаковые шаги: как можно мельче разбивают расчетную область. Это закономерно увеличивает вычислительную сложность задачи. Также стоит вопрос о точности, сходимости и устойчивости численного моделирования. Один из способов проверки корректности прогноза — сравнение его с аналитическими решениями частных случаев, без неоднородностей и нелинейностей. Некоторые авторы проводят такие оценки [Карпович и др., 2015; Abdulla — Al — Mamun и др., 2018].

Уравнение теплопроводности давно изучено, и существует несколько методов аналитического его решения для разнообразных граничных и начальных условий. Сформулируем задачи, которые, с одной стороны, упрощенно соответствуют реальным условиям, с другой — позволяют проинтегрировать уравнения. Начнем с уравнения теплопроводности без конвекции, затем учтем простейший процесс массопереноса.

## Методы

### Постановка задачи

В пласте можно выделить два направления — от скважины вглубь породы (горизонтально) и снизу вверх (вертикально). В первом случае считаем, что первоначально пласт имеет одну температуру, скважина равномерно нагрета и отдает тепло, не остывая, на каком-то расстоянии температура неизменна и равна первоначальной (выравнивание температуры пласта из-за начального перепада). Во втором случае температура подошвы и кровли пласта не меняется со временем, первоначально пласт нагрет до одной температуры (остывание пласта после начального нагрева). По каждому направлению задачу будем решать отдельно, при этом считая ее одномерной. Каждое из решений будет являться частным случаем решения двумерной задачи.

Учитывая направления, уравнение теплопроводности с перепадом температур будем решать с переменной  $x$ , а в случае остывания — с переменной  $y$ . Для удобства возьмем безразмерную температуру  $u$ : значение 0 будет соответствовать минимальной температуре в задаче, а 1 — максимальной. Уравнение теплопроводности в одномерном случае без конвекции имеет вид [Тихонов, Самарский, 2004]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (1)$$

В задаче с перепадом температур в начале координат будет задана постоянная ненулевая температура, в остальных точках — нулевая. На правой границе задана постоянная температура, равная нулю:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(0, t) = 1, \quad u(l, t) = 0.$$

Во второй задаче на границах постоянная нулевая температура, а в остальных точках температура равна 1:

$$u(y, 0) = 1 \{0 < y < h\}, \quad (3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(h, t) = 0.$$

В случае массопереноса в уравнения в простейшем случае добавится слагаемое с первой производной по координате первой степени [Крайнов, Моисеева, 2017]. Учтем, что скорость конвекции может отличаться в разных направлениях (например, если присутствует изотропность пласта или конвекции пара). Поэтому используем разные буквенные обозначения для коэффициентов перед добавленными слагаемыми:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2v \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + 2q \frac{\partial u}{\partial y} = a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4)$$

### Метод Фурье без конвекции

Если на границах области нулевое значение функции, то общим решением уравнения теплопроводности (1) является сумма (разделения переменной) [Тихонов, Самарский, 2004; Петровский, 2009]:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-at \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right),$$

где коэффициенты  $A_n$  получаются из начальной функции:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \quad (5)$$

Решение уравнения для случая, когда вся область первоначально равномерно нагрета, хорошо известно [Cannon, 1984]:

$$u(y, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi(2m-1)y}{h}\right) \exp\left(-at \left(\frac{(2m-1)\pi}{h}\right)^2\right)}{(2m-1)}. \quad (6)$$

Предельное решение при  $t \rightarrow \infty$ :

$$u(y, t \rightarrow \infty) = 0,$$

т. е. полное остывание до температуры границ.

В случае перепада температур граничные условия (2) не подходят под метод Фурье. Вычтем из неизвестной функции  $u$  линейную функцию от координаты:

$$\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Полученная функция удовлетворяет исходному уравнению теплопроводности, т. к. обе производные от  $(1 - x/l)$  равны нулю. Начальное и граничные условия для  $\tilde{u}$  теперь подходят для того, чтобы применить метод Фурье:

$$\tilde{u}(x, 0) = \tilde{f}(x) = -\left(1 - \frac{x}{l}\right) \{0 < x < l\},$$

$$\tilde{u}(0, t) = 0, \quad \tilde{u}(l, t) = 0.$$

Вспользуемся формулой для общего решения (5) и разложим начальную функцию:

$$A_n = -\frac{2}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = -\frac{2}{\pi n}.$$

С учетом этого решение уравнения теплопроводности в случае граничных условий (2) имеет вид:

$$u(x, t) = 1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \exp\left(-at \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)}{n}. \quad (7)$$

Предельное решение при  $t \rightarrow \infty$ :

$$u(x, t \rightarrow \infty) = 1 - \frac{x}{l},$$

т. е. линейное убывание температуры от одной границы до другой, что физически достоверно.

Известный недостаток метода Фурье — это поведение при малых значениях времени, решение очень медленно сходится. Например, решение второй задачи при  $at = 0,0001$ , когда взяты первые 100 слагаемых, приведено на рис. 1 (все параметры и значения обезразмерены, как и на остальных рис. 2–6). В работе [Карпович и др., 2015] взято несколько тысяч слагаемых и вычисления проведены с большой точностью, но присутствуют такие же колебания. Применить использованный метод зануления граничных условий нельзя для двумерной задачи, т. к. вычитаемая функция (комбинация линейной функции по  $x$  и прямоугольной функции по  $y$ )

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{l}, & 0 < y < h, \\ 0, & y = 0 \text{ или } y = h \end{cases}$$

не удовлетворяет стационарному уравнению (эллиптического вида)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

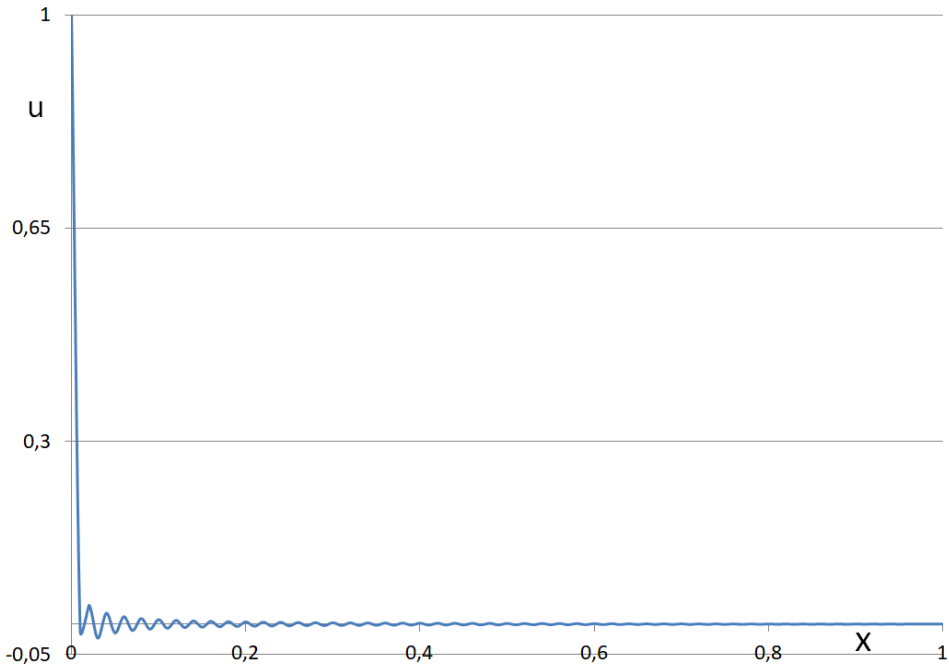


Рис. 1. Сумма первых 100 слагаемых решения Фурье при малом времени

Fig. 1. Sum of the first 100 terms of the Fourier solution for short time

### Метод Фурье для уравнения теплопроводности с конвекцией

Теперь решим уравнение теплопроводности с учетом конвекции (4). В методе Фурье разложение идет по синусам. Будем искать решение уравнения в виде суммы таких функций:

$$p(x, t) = e^{\alpha x} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) e^{-\beta t}. \quad (8)$$

Подставим (8) в уравнение (4) вместо функции  $u$ :

$$\begin{aligned} & -\beta e^{\alpha x} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) e^{-\beta t} + 2v e^{\alpha x} \left[ \alpha \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \left(\frac{\pi n}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \right] e^{-\beta t} = \\ & = a e^{\alpha x} \left[ \alpha^2 \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + 2\alpha \left(\frac{\pi n}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \right] e^{-\beta t}. \end{aligned}$$

Сократим на экспоненты и приравняем коэффициенты при синусе и косинусе:

$$-\beta + 2v\alpha = a \left( \alpha^2 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \right), \quad 2v \left(\frac{\pi n}{l}\right) = 2a\alpha \left(\frac{\pi n}{l}\right),$$

откуда получаем зависимости показателей экспонент от коэффициента конвекции и от числа  $n$ :

$$\alpha = \frac{v}{a}, \quad \beta = \frac{v^2}{a} + a \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Общее решение уравнения (4):

$$u(x, t) = e^{\frac{vx-tv^2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) e^{-at\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2},$$

где коэффициенты  $A_n$  находятся из начального условия:

$$u(x, 0) = f(x) = e^{\frac{vx}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) = f(x) e^{-\frac{vx}{a}}.$$

По аналогии с решением без конвекции нужно вычлесть из  $u$  такую функцию  $\varphi(x)$ , которая удовлетворяет уравнению и одновременно делает граничные условия нулевыми. Из первого условия получаем:

$$2v \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \varphi(x) = b e^{\frac{2vx}{a}} + c.$$

Из второго условия находим  $b$  и  $c$ :

$$\varphi(0) = 1 \text{ и } \varphi(l) = 0,$$

$$\varphi(x) = \frac{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - \exp\left(\frac{2vx}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - 1}.$$

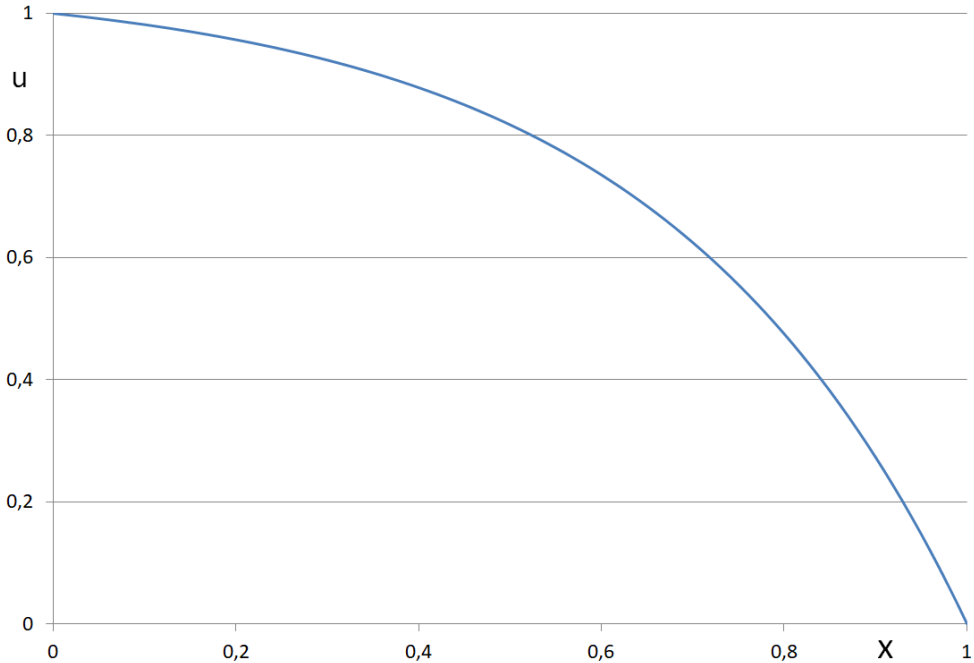
Теперь можно вычислять коэффициенты разложения в ряд Фурье:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) = \frac{\exp\left(\frac{2vx}{a}\right) - \exp\left(\frac{2vl}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - 1} e^{-\frac{vx}{a}}.$$

После интегрирования и подстановки получаем решение уравнения с конвекцией для граничного условия (2):

$$u(x, t) = \frac{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - \exp\left(\frac{2vx}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - 1} - \exp\left(\frac{xv - tv^2}{a}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)}{v^2 l^2 + a^2 \pi^2 n^2} \exp\left(-at\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right).$$





**Рис. 2.** Предельное стационарное распределение температуры с учетом конвекции

**Fig. 2.** Limit stationary temperature distribution with allowance for convection

На рис. 2 показано предельное решение (при  $t \rightarrow \infty$ ):

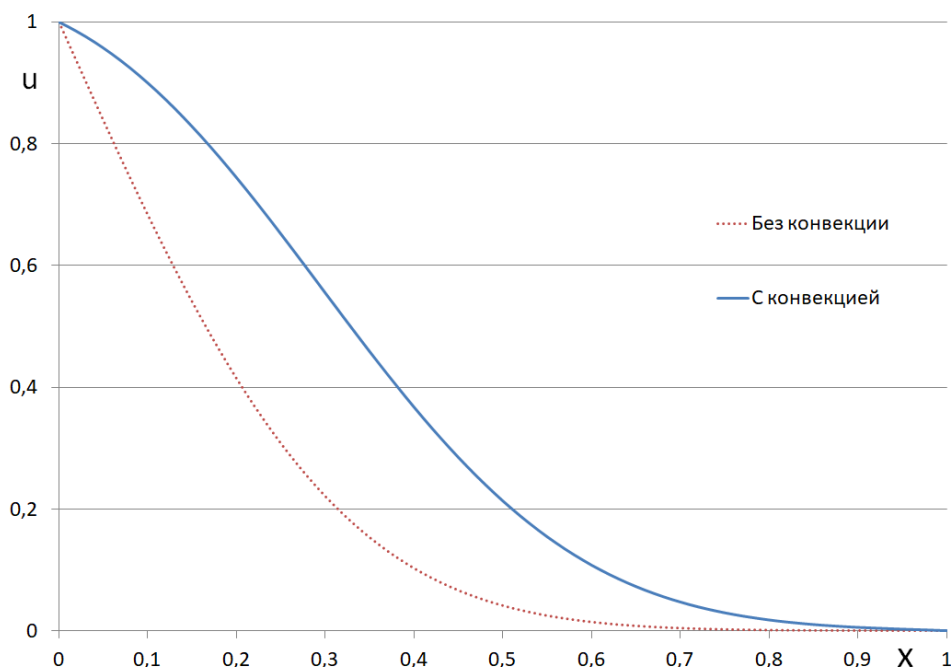
$$u(x, t \rightarrow \infty) = \frac{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - \exp\left(\frac{2vx}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - 1}.$$

То есть перед применением метода Фурье мы вычитали предельное, оно же стационарное, решение. При  $v \rightarrow 0$  получаем решение без конвекции (7):

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - \exp\left(\frac{2vx}{a}\right)}{\exp\left(\frac{2vl}{a}\right) - 1} \rightarrow 1 - \frac{x}{l},$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \exp\left(\frac{xv - tv^2}{a}\right) \frac{2\pi a^2}{v^2 l^2 + a^2 \pi^2 n^2} \rightarrow \frac{2}{\pi n}.$$

При достаточно большой скорости конвекции со временем становится видна разница между процессом прогрева (рис. 3), появляется точка перегиба. Вид кривой качественно совпадает с результатами, полученными численными методами [Попов, Соболева, 2016; Шатров и др., 2018; Жумаев, Тошева, 2022].



**Рис. 3.** Прогрев области с конвекцией и без  
**Fig. 3.** Heating area with and without convection

В случае остывания с конвекцией (3) вычисление дает следующее решение:

$$u(y, t) = \exp\left(\frac{yq - tq^2}{a}\right) \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{\pi my}{h}\right) \exp\left(-at \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right),$$

где  $B_m$  коэффициенты разложения начального состояния:

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{\pi my}{h}\right) = e^{-\frac{yq}{a}},$$

$$B_m = \frac{2m\pi a^2 \left(1 - (-1)^m e^{-\frac{q}{a}}\right)}{q^2 h^2 + a^2 \pi^2 m^2}.$$

Предельное решение (при  $t \rightarrow \infty$ ):

$$u(y, t \rightarrow \infty) = 0,$$

т. е. в любом случае происходит полное остывание области, но со смещением более теплой области в сторону направления конвекции (рис. 4).

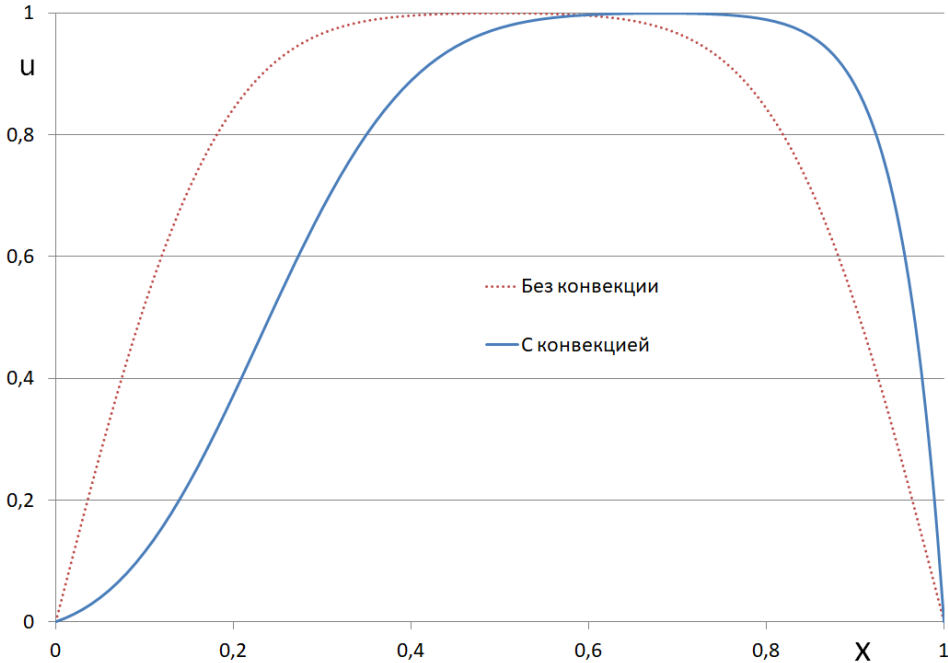


Рис. 4. Смещение максимума температуры из-за конвекции

Fig. 4. Shifting of temperature maximum due to convection

При  $q \rightarrow 0$  получаем решение без конвекции (6) для нечетных  $m$ :

$$\lim_{q \rightarrow 0} \exp\left(\frac{yq - tq^2}{a}\right) \frac{2\pi(2m-1)a^2 \left(e^{-\frac{q}{a}} + 1\right)}{q^2 + a^2\pi^2(2m-1)^2} = \frac{4}{\pi(2m-1)},$$

а для четных  $m$ :

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left(1 - (-1)^{2m} e^{-\frac{q}{a}}\right) = 0.$$

### Метод Пуассона

Если задано начальное распределение температур  $f(x)$  на всей числовой прямой, то общее решение уравнения теплопроводности (1) находится с помощью интеграла Пуассона [Cannon, 1984]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\chi) e^{-\frac{(x-\chi)^2}{4at}} d\chi.$$

В методе Фурье модифицированную функцию в начальный момент мы разложили в ряд (7) на отрезке  $(0, l)$ . Распространим это разложение на всю числовую ось, учитывая, что полученная функция изменяется с периодом  $2l$ :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -\left(2n + 1 - \frac{x}{l}\right), & 2n < \frac{x}{l} < 2(n + 1), \\ 0, & x = 2nl, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к исходному распределению температур, получим

$$f(x) = \tilde{f}(x) + 1 - \frac{x}{l} = \begin{cases} -2n, & \left\{2n < \frac{x}{l} < 2(n + 1)\right\}, \\ -2n + 1, & x = 2nl, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Теперь надо вычислить интеграл Пуассона от этой функции:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2n \int_{2nl}^{2(n+1)l} e^{-\frac{(x-\chi)^2}{4at}} d\chi. \quad (10)$$

Нам понадобится вычислить интеграл типа

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{\chi_1}^{\chi_2} e^{-\frac{(x-\chi)^2}{4at}} d\chi &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\chi_1-x}{2\sqrt{at}}}^{\frac{\chi_2-x}{2\sqrt{at}}} e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{\chi_2-x}{2\sqrt{at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\chi_1-x}{2\sqrt{at}}\right) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где введена переменная  $z = \chi - x$ .

Результат выражается через так называемую функцию ошибок:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\chi^2} d\chi.$$

Функция  $\operatorname{erf}$  равна нулю при  $x = 0$ , является нечетной и при  $x \rightarrow \infty$  стремится к 1. Функция  $\operatorname{erf}(x/k)$  при  $k \rightarrow 0$  стремится к функции Хевисайда:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{k}\right) = 2\theta(x) + 1.$$

В данном случае используется функция Хевисайда со следующим определением:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Вычислим все интегралы в сумме (10):

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \left( \operatorname{erf}\left(\frac{x - 2(n+1)l}{2\sqrt{at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - 2nl}{2\sqrt{at}}\right) \right). \quad (12)$$

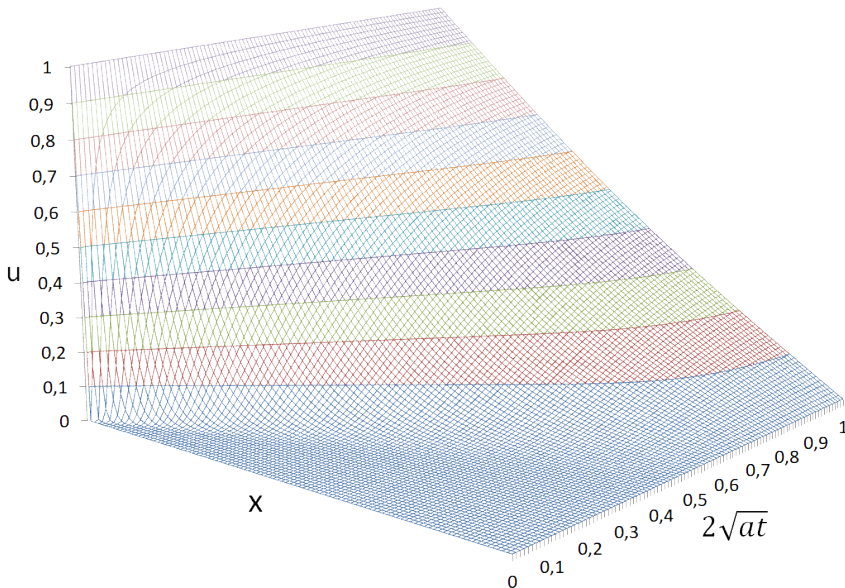
При  $t \rightarrow 0$  каждое слагаемое представляет собой прямоугольную функцию:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{x - 2(n + 1)l}{2\sqrt{at}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x - 2nl}{2\sqrt{at}} \right) \right) = 2\theta(x - 2(n + 1)l) - 2\theta(x - 2nl),$$

которая равна  $-2$  в интервале  $(2nl, 2(n + 1)l)$ , нулю — вне интервала,  $-1$  — на концах отрезка. Таким образом, сумма всех слагаемых соответствует начальному условию (9). Формально, комбинируя по-разному слагаемые в сумме (11), можно получить различный результат. Поскольку нас интересует отрезок  $(0, l)$ , то вычислять (11) необходимо по мере убывания модуля значения слагаемых в этом диапазоне. Например, можно выразить сумму таким образом:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left( \operatorname{erf} \left( \frac{x - 2(n + 1)l}{2\sqrt{at}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x - 2nl}{2\sqrt{at}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x + 2(n - 1)l}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{x + 2nl}{2\sqrt{at}} \right) \right). \quad (13)$$

Подстановка  $x = l$  дает значение функции, тождественное равно 0, при  $x = 0$  сумма первых двух слагаемых близка к 1 при разных значениях  $t$ . Аналогично при произвольных  $x$  и  $t$  для точности достаточно первых нескольких слагаемых суммы (12). Процесс выравнивания температуры показан на трехмерном графике (рис. 5).



**Рис. 5.** Процесс выравнивания температуры. Решение с помощью интеграла Пуассона  
**Fig. 5.** Temperature equalization process. The solution was obtained using Poisson integral

Применим полученный алгоритм для второй задачи (3). Начальным условием является функция:

$$g(y) = \begin{cases} 1, & y \in (2nh, (2n + 1)h), \\ -1, & y \in ((2n + 1)h, (2n + 2)h), \\ 0, & y = mh, \end{cases}$$

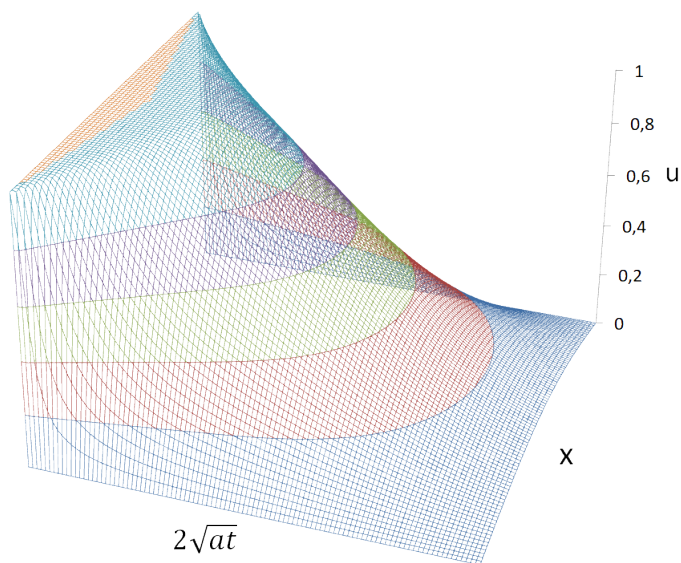
где  $m$  и  $n$  — целые числа. Интеграл Пуассона от этой функции:

$$u(y, t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \int_{2nh}^{(2n+1)h} e^{-\frac{(x-y)^2}{4at}} dx - \int_{(2n+1)h}^{(2n+2)h} e^{-\frac{(x-y)^2}{4at}} dx \right).$$

Воспользуемся (11):

$$u(y, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{y - 2nh}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{y - (2n + 2)h}{2\sqrt{at}} \right) - 2 \operatorname{erf} \left( \frac{y - (2n + 1)h}{2\sqrt{at}} \right) \right).$$

Сумма нескольких слагаемых (при  $n = -2 \dots 2$ ) в точках  $y = 0$  и  $y = h$  близка к нулю для любых  $t$ . Процесс остывания первоначально нагретой области показан на трехмерном графике (рис. 6).



**Рис. 6.** Процесс остывания первоначально нагретой области. Решение с помощью интеграла Пуассона

**Fig. 6.** The process of cooling the initially heated area. The solution was obtained using Poisson integral

## Обсуждение и результаты

В работе получены решения уравнения теплопроводности с изотермическими граничными условиями как с учетом конвекции, так и без нее. В случае уравнения без конвекции решение получено двумя способами: методом Фурье и с помощью интеграла Пуассона, оба в виде рядов. Метод Фурье удовлетворяет граничным условиям при любой точности, но в начальные моменты времени не может воссоздать точное решение даже с помощью тысячи первых слагаемых ряда. С вычислительной точки зрения интеграл Пуассона предпочтительнее: приемлемая точность достигается десятком слагаемых. При любых значениях времени, в том числе малых, это решение полностью воспроизводит процесс теплопередачи.

При проведении исследований выстроился алгоритм, который в дальнейшем можно изменять при помощи модификаций уравнения и граничных условий:

- находим стационарное решение;
- вычитаем его из неизвестной функции, для получившейся функции выводим начальные и граничные условия;
- используя метод Фурье, получаем решение;
- распространяем начальное условие модифицированной функции на всё пространство, получаем решение с помощью интеграла Пуассона.

## Заключение и выводы

На основании полученных результатов и работ других авторов [Крайнов и др., 2009; Карпович и др., 2015; Крайнов, Миньков, 2016; Полянский, 2019] можно сформулировать примерный план дальнейшего исследования:

- получить решение уравнения теплопроводности с учетом конвекции с помощью интеграла Пуассона;
- решить уравнения теплопроводности с изотермическими граничными условиями в цилиндрических координатах;
- получить двумерное решение уравнения теплопроводности как без конвекции, так и с учетом конвекции;
- сравнить все полученные решения с численными методами (явная и неявная схемы) и компьютерными симуляторами (метод конечных объемов);
- найти решения уравнения теплопроводности с неизотермическими граничными условиями и нестационарной фильтрацией (учесть изменение скорости).

Представляет интерес поведение найденных решений на бесконечности [Гладков, 1996].

## Список источников

- Гильманов А. Я., Шевелёв А. П. 2021. Моделирование пароциклического воздействия на нефтяные пласты с учетом конвективных потоков // Экспериментальные методы исследования пластовых систем: проблемы и решения. С. 82.

- Гладков А. Л. 1996. О неограниченных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с сильной конвекцией на бесконечности // Журнал вычислительной математики и математической физики. Том 36. № 10. С. 73–86.
- Дорошевич Е. А. 2009. Решения уравнения теплопроводности для расчета температурных режимов в помещениях // Наука — образованию, производству, экономике: материалы 7-й Междунар. науч.-техн. конф.: в 3 т. Минск: Белорус. нац. техн. ун-т. Том 2. С. 381.
- Дульнев Г. Н. 2012. Теория тепло- и массообмена. СПб.: НИУ ИТМО. 195 с.
- Жумаев Ж., Тошева М. М. 2022. Моделирование стационарной теплопроводности при свободной конвекции в ограниченном объеме // Universum: технические науки. № 4–3 (97). С. 34–37.
- Карпович Д. С., Суша О. Н., Коровкина Н. П., Кобринец В. П. 2015. Аналитический и численный методы решения уравнения теплопроводности // Труды БГТУ. Серия 3: Физико-математические науки и информатика. № 6 (179). С. 122–127.
- Крайнов А. Ю., Рыжих Ю. Н., Тимохин А. М. 2009. Численные методы в задачах теплопереноса: учеб.-метод. пос. Томск: Томский гос. ун-т. 114 с.
- Крайнов А. Ю., Миньков Л. А. 2016. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса: учеб. пос. Томск: STT. 92 с.
- Крайнов А. Ю., Моисеева К. М. 2017. Конвективный теплоперенос и теплообмен: учеб. пос. Томск: STT. 80 с.
- Петровский И. Г. 2009. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Физматлит. 207 с.
- Полянский С. Д. 2019. Решение двумерных уравнений в частных производных численными методами // Новые информационные технологии в научных исследованиях: материалы 24-й Всерос. науч.-техн. конф. студентов, молодых ученых и специалистов. Рязань: Рязанский гос. радиотехн. ун-т им. В. Ф. Уткина. С. 68–70.
- Попов М. И., Соболева Е. А. 2016. Приближенное аналитическое решение внутренней задачи кондуктивно-ламинарной свободной конвекции // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. № 4 (70). С. 78–84. <https://doi.org/10.20914/2310-1202-2016-4-78-84>
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. 2004. Уравнения математической физики: учеб. для студентов физ.-мат. спец. ун-тов. 7-е изд. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, Наука. 798 с.
- Чернышов В. Е., Пивоварова И. И. 2020. Численное решение уравнения теплопроводности на примере расчета потерь количества тепла при нагнетании горячей воды в скважину // Студент года 2020: сб. ст. 15-го Междунар. науч.-исслед. конкурса. Пенза: Наука и Просвещение. С. 8–13.
- Шатров О. А., Щерица О. В., Мажорова О. С. 2018. Параллельный алгоритм для решения уравнений термогравитационной конвекции // Препринты Института прикладной математики им. М. В. Келдыша. № 239. С. 1–21. <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-239>
- Abdulla — Al — Mamun, Md. Shajib Ali, Md. Munnu Miah. 2018. A study on an analytic solution 1D heat equation of a parabolic partial differential equation and implement in computer programming // International Journal of Scientific & Engineering Research. Vol. 9. No. 9. Pp. 913–921.
- Babayar-Razlighi B. 2023. Numerical solution of heat equation with specification of heat flux on the boundary by the Legendre Wavelets // Iranian Conference on Mathematical Physics.
- Cannon J. R. 1984. The One-Dimensional Heat Equation. Cambridge University Press. 512 p.



## References

- Gilmanov, A. Ya., & Shevelev, A. P. (2021). Modeling of steam-cyclic impact on oil reservoirs taking into account convective flows. *Experimental methods for studying reservoir systems: Problems and solutions* (p. 82). [In Russian]
- Gladkov, A. L. (1996). Unbounded solutions of the nonlinear heat-conduction equation with strong convection at infinity. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 36(10), 73–86. [In Russian]
- Doroshevich, E. A. (2009). Solutions of the heat equation for calculating temperature conditions in rooms. *Science to education, production, economics: Proceedings of the 7<sup>th</sup> International scientific and technical conference in 3 vols.: Vol. 2* (p. 381). Belarusian National Technical University. [In Russian]
- Dulnev, G. N. (2012). *Theory of heat and mass transfer*. NRU ITMO. [In Russian]
- Jumayev, Ju., & Tosheva, M. M. (2022). Simulation of stationary thermal conductivity under free convection in a limited volume. *Universum: Engineering Sciences*, (4–3), 34–37. [In Russian]
- Karpovich, D. S., Susha, O. N., Korovkina, N. P., & Kobrinets, V. P. (2015). Analytical and numerical methods for solving the heat equation. *Proceedings of BSTU. Series 3: Physical and Mathematical Sciences and Informatics*, (6), 122–127. [In Russian]
- Krainov, A. Yu., Ryzhykh, Yu. N., & Timokhin, A. M. (2009). *Numerical methods in heat transfer problems*. Tomsk State University. [In Russian]
- Krainov, A. Yu., & Minkov, L. L. (2016). *Numerical methods for solving problems of heat and mass transfer*. STI. [In Russian]
- Krainov, A. Yu., & Moiseeva, K. M. (2017). *Convective heat transfer and heat transfer*. STI. [In Russian]
- Petrovsky, I. G. (2009). *Lectures on the theory of ordinary differential equations*. Fizmatlit. [In Russian]
- Polyansky, S. D. (2019). Solving two-dimensional partial differential equations by numerical methods. *New information technologies in scientific research: Proceedings of the 24<sup>th</sup> All-Russian scientific and technical conference* (pp. 68–70). Ryazan State Radio Engineering University named after V. F. Utkin. [In Russian]
- Popov, M. I., & Soboleva, E. A. (2016). The approximate analytical solution of the internal problem of conductive and laminar free convection. *Proceedings of the Voronezh State University of Engineering Technologies*, (4), 78–84. <https://doi.org/10.20914/2310-1202-2016-4-78-84> [In Russian]
- Tikhonov, A. N., & Samarsky, A. A. (2004). *Equation of mathematical physics* (7<sup>th</sup> ed.). Moscow State University, Nauka. [In Russian]
- Chernyshov, V. E., & Pivovarova, I. I. (2020). Numerical solution of the thermal conductivity equation on the example of calculating the loss of the heat amount when injecting of hot water into the well. *Student of the year 2020: Collection of articles of the 15<sup>th</sup> International research competition* (pp. 8–13). Nauka i Prosveshchenie. [In Russian]
- Shatrov, O. A., Shcheritsa, O. V., & Mazhorova, O. S. (2018). Parallel algorithm for solving the equations of thermogravitational convection. *Keldysh Institute Preprints*, (239), 1–21. <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-239> [In Russian]
- Abdulla — Al — Mamun, Md. Shajib Ali, & Md. Munnu Miah. (2018). A study on an analytic solution 1D heat equation of a parabolic partial differential equation and implement in computer programming. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 9(9), 913–921.

Babayar-Razlighi, B. (2023). Numerical solution of heat equation with specification of heat flux on the boundary by the Legendre Wavelets. *Iranian Conference on Mathematical Physics*.

Cannon, J. R. (1984). *The one-dimensional heat equation*. Cambridge University Press.

## Информация об авторе

*Родион Михайлович Ганопольский*, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой моделирования физических процессов и систем, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
r.m.ganopolskij@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7682-9830>

## Information about the author

*Rodion M. Ganopolskij*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
r.m.ganopolskij@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7682-9830>

## Численное исследование процесса добычи газа из газогидратной залежи при наличии термического и депрессионного воздействия

Наиль Габсалямич Мусакаев, Денис Сергеевич Бельских ✉

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, Россия  
Контакт для переписки: [denisbelskikh@gmail.com](mailto:denisbelskikh@gmail.com) ✉

**Аннотация.** В настоящее время до сих пор остро стоит вопрос технологии добычи газа из имеющихся газогидратных залежей, которые были обнаружены на шельфе Мирового океана и в районах залегания многолетнемерзлых пород. Это связано с тем, что запасы метана в свободном состоянии существенным образом уступают его запасам в газогидратном состоянии. Одной из задач для возможной добычи газа из гидратосодержащей пористой среды является изучение процесса разложения газогидрата в случае теплового и депрессионного воздействий как наиболее часто применяемых. Необходимо провести теоретическое исследование, которое несет в себе разработку математической модели, ее алгоритмизацию, создание вычислительной программы и проведение численных экспериментов.

В работе представлена одномерная осесимметричная задача о нагреве и/или снижении давления на забое скважины, проходящей через всю толщину пористого пласта, поры которого изначально заполнены метаном и его гидратом. Привлекаемая математическая модель состоит из уравнений неразрывности для метана, его гидрата и воды, уравнения движения газовой фазы в пористой среде в виде закона фильтрации Дарси, уравнения состояния для метана и воды, уравнения сохранения энергии, в котором произведен учет эффектов Джоуля — Томсона и адиабатического охлаждения для газа, скрытой теплоты фазового перехода «газогидрат  $\leftrightarrow$  метан + вода». Произведена численная реализация предложенной математической модели и осуществлено численное исследование теплового (термического) и/или депрессионного воздействия на изучаемую гидратосодержащую залежь.

**Ключевые слова:** разложение газового гидрата, тепловое воздействие, депрессионное воздействие, математическая модель, алгоритм решения, пористая среда

**Благодарности:** работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (№ 121030500156-6).

**Цитирование:** Мусакаев Н. Г., Бельских Д. С. 2023. Численное исследование процесса добычи газа из газогидратной залежи при наличии термического и депрессионного воздействия // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 3 (35). С. 83–99. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-83-99>

Поступила 13.09.2023; одобрена 20.09.2023; принята 06.10.2023

## Numerical study of the gas production process from a gas hydrate deposit in the presence of thermal and depression effects

Nail G. Musakaev, Denis S. Belskikh 

Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia  
Corresponding author: [denisbelskikh@gmail.com](mailto:denisbelskikh@gmail.com) 

**Abstract.** Today the issue of gas production technology from existing gas hydrate deposits discovered on the shelf of the World Ocean and in permafrost areas is still very significant since the methane reserves in the free state are significantly inferior to its reserves in the form of its gas hydrates. One of the tasks for possible gas production from a hydrate-containing porous medium is to study the process of gas hydrate decomposition under thermal and depression effects since they are most commonly used ones. It is necessary to conduct a theoretical study including the development of a mathematical mode and its algorithmization, the creation of a computational program and the conduct of numerical experiments.

The paper presents one-dimensional axisymmetric problem of heating and/or pressure reduction at the bottom of a well passing through the entire thickness of a porous formation when its pores are initially filled with methane and its hydrate. The utilized mathematical model includes the continuity equations for methane, its hydrate and water; the equation of the gas phase motion in a porous medium as the Darcy filtration law; the state equation of methane and water, the energy conservation equation considering the Joule–Thomson effects and adiabatic cooling for gas,

the latent heat of the “gas hydrate  $\leftrightarrow$  methane + water” phase transition. A numerical implementation of the proposed mathematical model and a numerical study of the thermal and/or depression impact on the studied hydrate-bearing deposit are carried out.

The results of calculations show that the size of a zone containing only the gas hydrate decomposition products (gas and water) slightly increases with a smaller length of a porous layer. They also show that the thermal effect (increasing the temperature at the bottomhole of production well) on the hydrate-saturated reservoir simultaneously with the depression effect is not efficient enough due to the intensive flow of cold gas (with a temperature equal to the initial temperature of the reservoir) from the hydrate-containing deposit to the well.

**Keywords:** gas hydrate dissociation, thermal impact, depression impact, mathematical model, algorithm of solution, porous medium

**Acknowledgements:** the research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 121030500156-6).

**Citation:** Musakaev, N. G., & Belskikh, D. S. (2023). Numerical study of the gas production process from a gas hydrate deposit in the presence of thermal and depression effects. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 83–99. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-83-99>

Received September 13, 2023; Reviewed September 20, 2023; Accepted October 6, 2023

## Введение

Газовые гидраты — это кристаллические твердые вещества, в состав которых входят молекулы воды, объединенные водородными связями и образующие полости, а также молекулы других веществ в этих полостях [Истомин, Якушев, 1992; Sloan, Koh, 2007]. Одним из таких веществ может быть природный газ, состоящий главным образом из метана, который образует большое количество природных газогидратных залежей, особенно в местах наличия многолетнемерзлых пород на материковой части [Макогон и др., 2007; Бородин, Бельских, 2018]. Однако в настоящее время до сих пор остро стоит вопрос эффективной и экономически выгодной добычи газа из имеющихся газогидратных залежей. Основными на данный момент способами добычи являются депрессионный (снижение давления) и термический (повышение температуры) [Бородин, Бельских, 2018]. Эти подходы позволяют создавать такие условия, при которых начинается процесс разложения газогидрата. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки, а их совместное использование позволяет улучшить процесс добычи газа из газогидратных месторождений [Hancock и др., 2005; Moridis и др., 2005; Liang и др., 2023].

Такие мероприятия, связанные с добычей газа из гидратосодержащих залежей, должны опираться на теоретическую проработку данной проблемы. Для изучения процесса необходимо построение математической модели, проведение ее алгоритмизации и программной реализации. Результаты вычислительных экспериментов позволят установить особенности диссоциации природных газогидратов в случае депрессионного и теплового воздействия [Шагапов, Мусакаев, 2016; Лобковский, Рамазанов, 2017; Liang и др., 2023].

В ряде работ [Ху, Ruppel, 1999; Ahmadi и др., 2004; Liu и др., 2009; Шагапов и др., 2016; Davletshina и др., 2019; Мусакаев, Бельских, 2021; Musakaev и др., 2021] было представлено теоретическое изучение процесса диссоциации газогидрата при снижении давления на забое скважины или тепловом (термическом) воздействии на пористый коллектор, насыщенный газогидратом. В настоящей работе рассмотрена одномерная задача о добыче газа из пласта, изначально содержащего в порах метан и его гидрат, в случае одновременно теплового и депрессионного воздействия или циклического подхода, когда имеет место только тепловое, а затем только депрессионное воздействие. Для математического описания изучаемых процессов привлекаются уравнения механики многофазных сред, записанные в осесимметричном приближении [Нигматулин, 1987].

## Постановка задачи

Будем рассматривать случай добычи газа из гидратосодержащей залежи в одномерном осесимметричном приближении (рис. 1). На скважине, проходящей через всю толщину пласта, в момент времени  $t > 0$  имеет место либо одновременное повышение температуры до постоянной  $T_e$  и добычи газа при постоянном давлении  $p_e$  на забое скважины, либо смена воздействия на пласт с теплового на депрессионный [Мусакаев и др., 2018]. При этом  $T_e$  выше исходной температуры пласта  $T_0$  и равновесной температуры разложения газогидрата  $T_s(p_0)$ , а  $p_e$  ниже исходного пластового давления  $p_0$  и равновесного давления разложения газогидрата  $p_s(p_0)$ . В задаче вода считается неподвижной фазой, поскольку рассматриваются случаи относительно небольших значений (до 0,3) исходной гидратонасыщенности (а соответственно, и водонасыщенности).

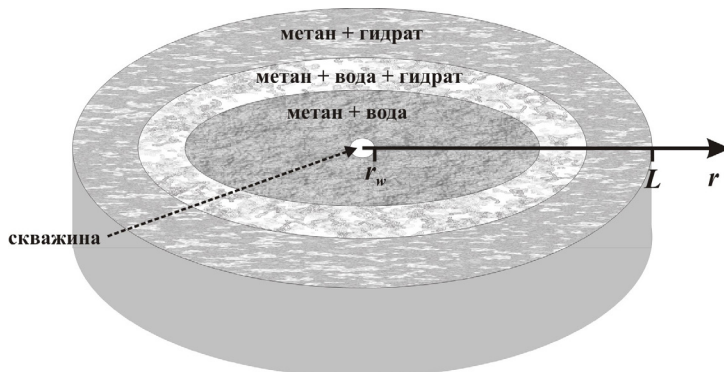


Рис. 1. Схема задачи

Fig. 1. The problem's scheme

Пусть изначально (при  $t = 0$ ) рассматриваемая область пористой среды содержит в порах только метан и его гидрат (рис. 1). Внешняя граница этой области радиуса  $L$  принимается непроницаемой. Также примем следующие упрощающие предположения: газовый гидрат состоит из воды и газа с постоянной массовой концентрацией  $G$ ; скелет пористой среды и гидрат метана считаются неподвижными и несжимаемыми; капиллярные эффекты в модели не учитываются; рассматривается однотемпературная модель, когда в некотором бесконечно малом объеме пористой системы температура всех фаз имеет одинаковое значение; значения пористости пласта  $m$  и плотности воды не изменяются.

С учетом обозначенных выше упрощающих предположений запишем в одномерном осесимметричном приближении основные уравнения, описывающие неизотермическую фильтрацию газа и воды. Так, уравнения сохранения масс будут иметь следующий вид [Нигматулин, 1987; Xu, Ruppel, 1999; Мусакаев и др., 2018]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(mS_g\rho_g + GmS_h\rho_h) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho_g u_g) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_w\rho_w + (1 - G)S_h\rho_h) = 0, \quad (2)$$

$$S_g + S_w + S_h = 1. \quad (3)$$

Здесь и далее нижние индексы  $j = g, w, h$  и  $sk$  означают, что связанные с ними параметры относятся к газу, воде, газогидрату и скелету пористой среды соответственно;  $t$  — время;  $r$  — радиальная координата;  $S_j$  — насыщенности  $j$ -м веществом;  $\rho_j$  — плотность  $j$ -й фазы;  $u_g$  — радиальная составляющая вектора скорости фильтрации газа.

Уравнение движения газа в виде закона Дарси запишем следующим образом [Истомин, Якушев, 1992; Басниев и др., 1993]:

$$u_g = -\frac{k_0 k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4)$$

где  $k_0$  — абсолютная проницаемость пласта;  $k_g$  и  $\mu_g$  — относительная фазовая проницаемость и динамическая вязкость для газа;  $p$  — давление.

Относительная фазовая проницаемость газа рассчитывается с помощью данной эмпирической зависимости [Басниев и др., 1993]:

$$k_g = \begin{cases} 0, & 0 \leq S_g \leq 0,1, \\ \left(\frac{S_g - 0,1}{0,9}\right)^{3,5} (4 - 3S_g), & 0,1 < S_g \leq 1. \end{cases}$$

Уравнение состояния реального газа используется в следующем виде [Бондарев и др., 2015]:

$$p = X_g \rho_g R_g T, \quad (5)$$

$$X_g = \left(0,4 \cdot \lg\left(\frac{T}{T_c}\right) + 0,73\right)^{\frac{p}{p_c}} + 0,1 \frac{p}{p_c}, \quad (6)$$

где  $X_g$  — коэффициент сжимаемости газа;  $R_g$  — удельная газовая постоянная;  $T$  — температура.



Уравнение сохранения энергии (уравнение притока тепла) в одномерном осесимметричном приближении можно представить в следующем виде [Нигматулин, 1987; Шарафутдинов, Давлетшин, 2021а, 2021б; Musakaev и др., 2021]:

$$\begin{aligned} & \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_g c_g \left( u_g \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\ & + \rho_g c_g \varepsilon_g \left( u_g \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \rho_g c_g m S_g \eta_g \frac{\partial p}{\partial t} = \\ & = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + m \rho_h L_h \frac{\partial S_h}{\partial t}, \quad (7) \\ \rho c & = (1 - m) \rho_{sk} c_{sk} + \sum_{j=g,w,h} m S_j \rho_j c_j, \\ \lambda & = (1 - m) \lambda_{sk} + \sum_{j=g,w,h} m S_j \lambda_j. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho c$  и  $\lambda$  — объемная теплоемкость и теплопроводность системы «пористая среда — насыщающий флюид»;  $\rho_{sk}$  — плотность вещества, образующего скелет пористой среды;  $c_j$  и  $\lambda_j$  — изобарная теплоемкость и теплопроводность  $j$ -й фазы;  $L_h$  — теплота диссоциации гидрата метана;  $\varepsilon_g$  и  $\eta_g$  — коэффициенты Джоуля — Томсона и адиабатического охлаждения.

Начальные и граничные условия для принятой постановки задачи можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad r_w \leq r \leq L: & \quad p = p_0, \quad T = T_0, \\ & \quad S_h = S_{h0}, \quad S_w = 0, \quad S_g = 1 - S_{h0}, \\ t > 0: & \quad \left\{ \begin{array}{l} r = r_w: p = p_e = \text{const}, \quad T = T_e = \text{const}, \\ r = L: \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \end{array} \right. \end{aligned}$$

где  $S_{h0}$  — исходная насыщенность пористой среды гидратом метана.

С учетом закона Дарси для газа (4) условие на скважине, вскрывающей весь пласт, можно переписать в следующем виде:

$$t > 0, \quad r = r_w: r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q_e \mu_g}{2\pi \rho_g k_0 k_g}, \quad T = T_e,$$

где  $Q_e$  — массовый расход добываемого газа.

Произведя преобразования уравнений (1)–(7), запишем соотношения, позволяющие рассчитать значения давления  $p$ , температуры  $T$  и водонасыщенности  $S_w$ :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p}{X_g} \frac{\partial X_g}{\partial t} + \frac{p}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{p}{S_g} \frac{\partial S_g}{\partial t} - \frac{p}{S_g} \frac{\rho_h}{\rho_g} G \frac{\partial S_h}{\partial t} + \frac{X_g R T}{m S_g} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\rho_g k_0 k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial r} \right], \quad (8)$$



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\rho_g c_g}{\rho c} \frac{k_0 k_g}{\mu_g} \left[ \frac{\partial p}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon_g \frac{\partial p}{\partial r} \right) + m S_g \eta_g \frac{\partial p}{\partial t} \right] + \frac{m \rho_h L_h}{\rho c} \frac{\partial S_h}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = - \frac{\rho_h}{\rho_w} (1 - G) \frac{\partial S_h}{\partial t}. \quad (10)$$

Система уравнений (8)–(10) дискретизируется с помощью неявной разностной схемы и решается с помощью метода простых итераций.

После дискретизации значения искоемых параметров системы рассчитываются в узлах сетки по следующему алгоритму решения [Musakaev и др., 2021]:

1. Распределения давления и температуры по координате  $r$  на новом временном шаге находятся решением дискретных аналогов уравнений (8) и (9) соответственно с помощью метода прогонки.
2. Значения коэффициента сверхсжимаемости газа рассчитываются с помощью дискретного аналога уравнения (6). Стоит отметить, что при расчете здесь и далее привлекаются или значения параметров, определенные в предыдущих пунктах алгоритма, или их итерационные (iter) значения.
3. Распределения значений гидратонасыщенности по координате  $r$  на новом временном шаге рассчитываются способом, описанным в предыдущих работах авторов статьи [Мусакаев, Бельских, 2021; Musakaev и др., 2021]. Вначале рассчитываются значения равновесной температуры  $T_h$  и давления  $p_h$  фазового перехода с использованием корреляции из статьи [Musakaev, Borodin, 2017]. При выполнении условий, допускающих диссоциацию гидрата метана ( $T_j^{k+1} > T_h, p_j^{k+1} < p_h, (S_h)_j^{iter} > 0$ ), определяем количество газогидрата, которое может разложиться:

$$\Delta S_h = \min \left\{ \Delta S_h^T = \frac{(\rho c)_j^{k+1}}{m \rho_h L_h} |T_j^{k+1} - T_h|; \right. \\ \left. \Delta S_h^p = \frac{(S_g)_j^{iter} (\rho g)_j^{k+1}}{G \rho_h p_j^{k+1}} |p_h - p_j^{k+1}|; (S_h)_j^{iter} \right\}.$$

Тогда на новом временном шаге можно найти значение гидратонасыщенности:

$$(S_h)_j^{k+1} = (S_h)_j^{iter} - \Delta S_h.$$

В случае возможного образования газогидрата ограничивающим условием также является наличие свободной воды в пористой среде.

4. Параметры  $S_w$  и  $S_g$  можно определить из соотношений, представляющих собой дискретные аналоги уравнений (10) и (3) соответственно.
5. Определяется относительная погрешность  $\delta$  текущей итерации:

$$\max_{\forall i, j} \left\{ \left| \frac{p_j^{iter} - p_j^{k+1}}{p_j^{k+1}} \right|; \left| \frac{(X_g)_j^{iter} - (X_g)_j^{k+1}}{(X_g)_j^{k+1}} \right|; \left| \frac{T_j^{iter} - T_j^{k+1}}{T_j^{k+1}} \right|; \left| \frac{(S_g)_j^{iter} - (S_g)_j^{k+1}}{(S_g)_j^{k+1}} \right| \right\}.$$

Если значение относительной погрешности текущей итерации больше некоторой заданной величины точности  $\varepsilon$  (т. е.  $\delta > \varepsilon$ ), то итерационные значения параметров системы переопределяются, и итерации на текущем временном шаге продолжают-ся при переходе к пункту 1. Иначе (если  $\delta < \varepsilon$ ) в пункте 1 осуществляется переход на новый временной шаг.

## Вычислительный эксперимент

Для решения задачи изложенным выше алгоритмом была разработана вычислительная программа и проведено численное исследование процесса одновременного снижения давления и повышения температуры на скважине, а также очередной реализации этих воздействий на рассматриваемую область пористого пласта. В данном исследовании были использованы следующие исходные значения параметров [Hancock и др., 2005; Мусакаев и др., 2018; Мусакаев, Бельских, 2021; Misyura и др., 2021]:  $T_e = 325$  К;  $p_e = 1$  МПа;  $r_w = 0,1$  м;  $L = 100$  м;  $T_0 = 281$  К;  $p_0 = 7$  МПа;  $S_{h0} = 0,3$ ;  $k = 10^{-15}$  м<sup>2</sup>;  $m = 0,35$ ;  $\rho_{sk} = 2\,000$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_w = 1\,000$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_h = 910$  кг/м<sup>3</sup>;  $c_{sk} = 1\,000$  Дж/(кг · К);  $c_w = 4\,200$  Дж/(кг · К);  $c_h = 2\,500$  Дж/(кг · К);  $\lambda_{sk} = 2$  Вт/(м · К);  $\lambda_w = 0,56$  Вт/(м · К);  $\lambda_h = 0,45$  Вт/(м · К);  $\mu_w = 10^{-3}$  Па · с;  $L_h = 4,37 \cdot 10^5$  Дж/кг;  $G = 0,12$ . Интерполяция известных табличных данных с учетом полученных распределений температуры и давления позволяет получить необходимые значения используемых параметров для метана.

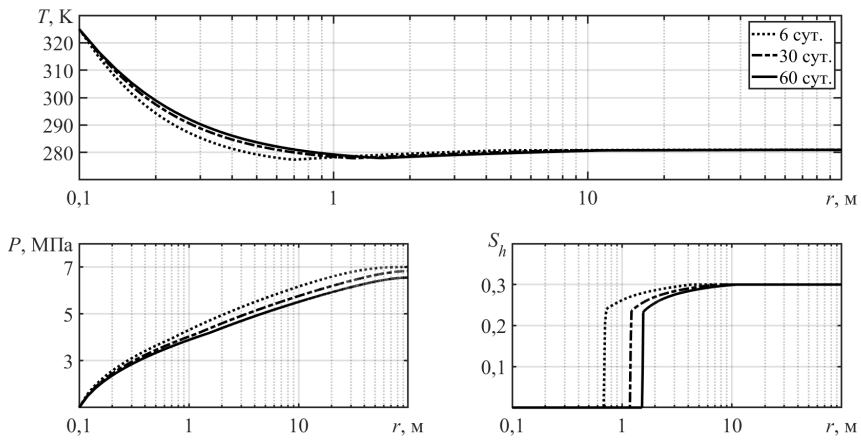
На рис. 2 представлена эволюция во времени полей давления, температуры и гидратонасыщенности; рассмотрен случай одновременного теплового и депрессионного воздействия на гидратонасыщенный пласт. На рис. 3 приведено изменение во времени протяженности зоны в пласте, содержащей только продукты разложения газового гидрата — газ и воду.

Из рис. 2 и 3 видно, что с течением времени протяженность зоны пласта, в которой содержатся газ и вода, растет, при этом температура снижается со значения  $T_e$  до величины  $T_0$  (и ниже) в небольшой зоне, примыкающей к скважине (рис. 2). Связано это в основном, на наш взгляд, с интенсивным притоком к скважине холодного (с температурой  $T_0$ ) газа из пласта; нагретый газ также откачивается. Таким образом, анализ рис. 2 позволяет заметить, что оказываемое на гидратонасыщенный пласт тепловое воздействие (повышение температуры на забое добывающей скважины), реализованное одновременно с депрессионным воздействием, является малоэффективным. Такое повышение температуры может быть применено, как мы считаем, для целей поддержания в зоне, в которой разложился газогидрат, температуры выше 0 °С, т. к. при определенных параметрах депрессионного воздействия на пласт температура в некоторой его области может опуститься ниже 0 °С (следовательно, возможно образование льда) за счет поглощения тепла, выделяемого при разложении газогидрата, и действия эффекта Джоуля — Томсона. Данный эффект понижения температуры ниже  $T_0$  также можно наблюдать на рис. 2.

Также из рис. 2 видно, что реализуется режим диссоциации газогидрата с протяженной зоной фазовых переходов. Таким образом, в пласте можно выделить три характерные зоны (рис. 1): ближнюю (примыкающую к скважине), где поры заполнены газом и водой,

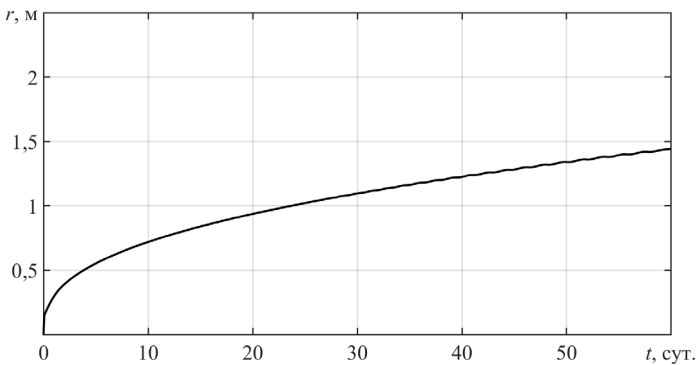
промежующую, в которой газ, вода и газогидрат находятся в состоянии термодинамического равновесия, и дальнюю, насыщенную метаном и его гидратом. Причем с течением времени увеличивается доля газогидрата, разложившегося в промежуточной зоне (по сравнению с диссоциацией газогидрата на фронтальной поверхности, разделяющей ближнюю и промежуточные зоны).

Рассмотрим случай, когда в первый месяц на скважине имело место только тепловое воздействие на гидратонасыщенный пласт без отбора газа, а на второй месяц — только депрессионное воздействие, т. е. происходил отбор газа без нагрева при поддержании постоянного давления на скважине (рис. 4).



**Рис. 2.** Распределение по координате  $r$  температуры, давления и гидратонасыщенности в различные моменты времени после начала эксплуатации скважины ( $L = 100$  м)

**Fig. 2.** Distributions of temperature, pressure and hydrate saturation along the  $r$ -coordinate at different times after the start of well exploitation ( $L = 100$  m)

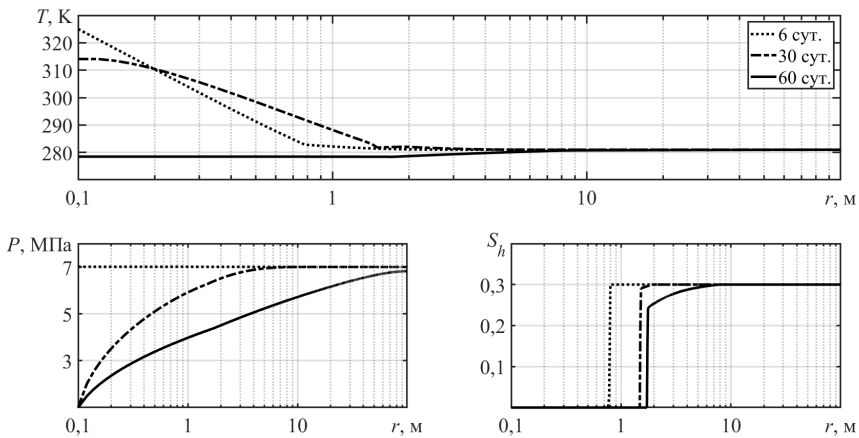


**Рис. 3.** Изменение во времени протяженности ближней зоны (в метрах), содержащей только продукты разложения газогидрата ( $L = 100$  м)

**Fig. 3.** The change of length (in meters) of the close area containing only gas hydrate decomposition products over time ( $L = 100$  m)

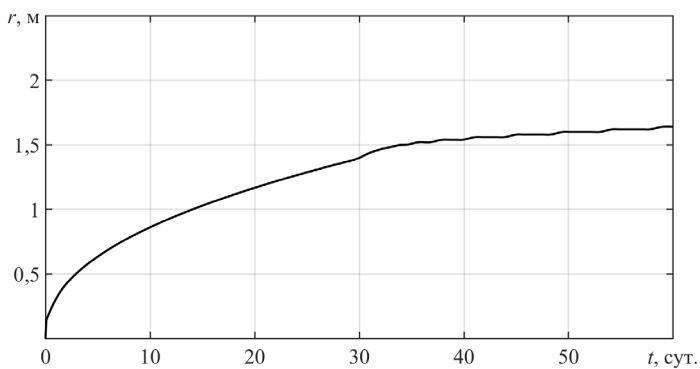
Из рис. 4 можно видеть, что при выбранных параметрах воздействия и пласта разложение газогидрата в пористом пласте имеет фронтальный режим в первый месяц при наличии только теплового воздействия. После начала реализации депрессионного воздействия температура во всем пласте становится равной исходной, а затем понижается до более низких значений, что обусловлено притоком к скважине газа из пласта и учетом эффекта Джоуля — Томсона.

После смены вида воздействия с теплового на депрессионное во второй месяц отмечается некоторое снижение темпов роста протяженности ближней зоны, содержащей только продукты разложения газогидрата (рис. 5).



**Рис. 4.** Распределение по координате  $r$  температуры, давления и гидратонасыщенности в различные моменты времени после начала эксплуатации скважины ( $L = 100$  м)

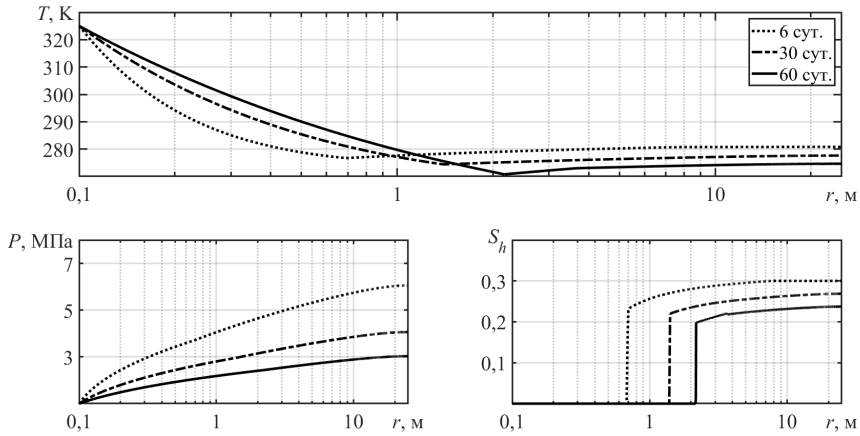
**Fig. 4.** Distributions of temperature, pressure and hydrate saturation along the  $r$ -coordinate at different times after the start of well exploitation ( $L = 100$  m)



**Рис. 5.** Изменение во времени протяженности ближней зоны (в метрах), содержащей только продукты разложения газогидрата ( $L = 100$  м)

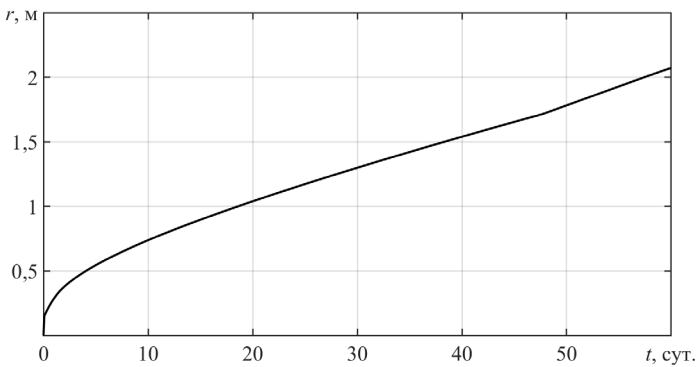
**Fig. 5.** The change of length (in meters) of the close area containing only gas hydrate decomposition products over time ( $L = 100$  m)

Поскольку в задаче представлен случай замкнутого и непроницаемого внешнего контура пласта, то были произведены расчеты с меньшей протяженностью пласта — 25 м. Для одновременного теплового и депрессионного воздействия на гидратонасыщенный пласт по итогу заметно более значительное снижение давления внутри пласта и, как следствие, общее уменьшение гидратонасыщенности вдоль всей длины пласта (рис. 6). Также на рис. 6 видно общее снижение температуры пласта ниже начального значения  $T_0 = 281 \text{ K}$  ( $\sim 8^\circ\text{C}$ ), а на некотором отдалении от скважины температура в пласте опускается ниже  $0^\circ\text{C}$ . На рис. 7 можно отметить большую протяженность зоны, содержащей только продукты разложения газогидрата — газ и воду, однако разница с пластом длиной 100 м невелика.



**Рис. 6.** Распределение по координате  $r$  температуры, давления и гидратонасыщенности в различные моменты времени после начала эксплуатации скважины ( $L = 25 \text{ м}$ )

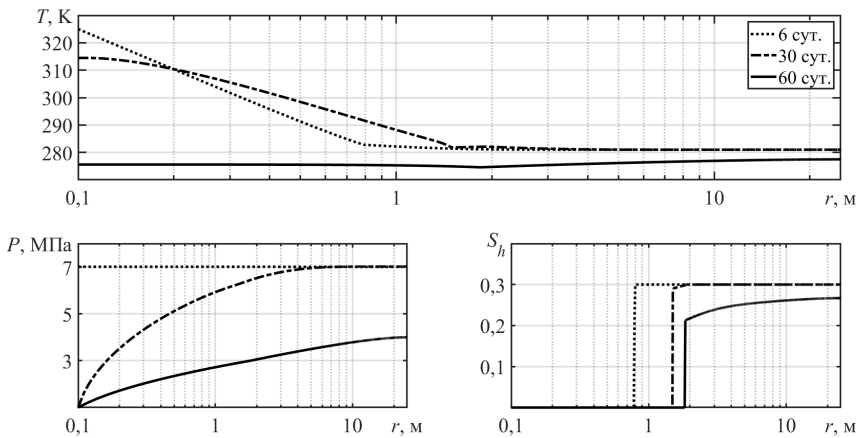
**Fig. 6.** Distributions of temperature, pressure and hydrate saturation along the  $r$ -coordinate at different times after the start of well exploitation ( $L = 25 \text{ m}$ )



**Рис. 7.** Изменение во времени протяженности ближней зоны (в метрах), содержащей только продукты разложения газогидрата ( $L = 25 \text{ м}$ )

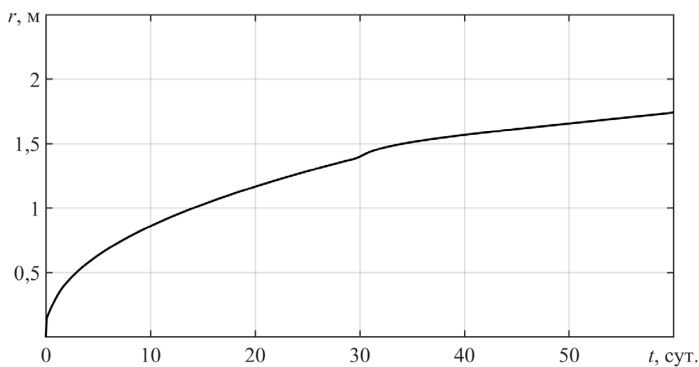
**Fig. 7.** The change of length (in meters) of the close area containing only gas hydrate decomposition products over time ( $L = 25 \text{ m}$ )

Аналогичная картина наблюдается и при очередной реализации воздействий на рассматриваемую область пористого пласта, а именно: в первый месяц реализуется только тепловое воздействие на гидратонасыщенный пласт, а на второй месяц — только депрессионное (рис. 8 и 9). Из данных, показанных на рис. 8, видно, что для 60 сут. имеет место как фронтальная, так и протяженная зона разложения газового гидрата (аналогично рис. 4). После смены вида воздействия с теплового на депрессионное также отмечается снижение темпов роста протяженности ближней зоны, содержащей только продукты разложения газогидрата (рис. 9), как ранее было отмечено для пласта длиной 100 м (рис. 5).



**Рис. 8.** Распределение по координате  $r$  температуры, давления и гидратонасыщенности в различные моменты времени после начала эксплуатации скважины ( $L = 25$  м)

**Fig. 8.** Distributions of temperature, pressure and hydrate saturation along the  $r$ -coordinate at different times after the start of well exploitation ( $L = 25$  m)



**Рис. 9.** Изменение во времени протяженности ближней зоны (в метрах), содержащей только продукты разложения газогидрата ( $L = 25$  м)

**Fig. 9.** The change of length (in meters) of the close area containing only gas hydrate decomposition products over time ( $L = 25$  m)

## Заключение

В работе рассматривается в одномерном осесимметричном приближении задача о тепловом и/или депрессионном воздействии на область пористой среды, изначально содержащей метан и его газогидрат. Система основных уравнений, описывающих изучаемый процесс, состоит из уравнения сохранения масс, уравнения Дарси для движения газовой фазы, уравнения притока тепла, в котором учтены фазовые превращения, эффекты Джоуля — Томсона и адиабатического охлаждения. Построен алгоритм решения и разработан программный продукт для расчета основных параметров и установления особенностей изучаемого процесса разложения газогидрата в пористой среде.

Показано, что размеры зоны, содержащей только продукты разложения газового гидрата (газ и вода), несколько увеличиваются при меньшей протяженности пористого пласта. Расчетным путем показано, что тепловое воздействие (повышение температуры на забое добывающей скважины) на гидратонасыщенный пласт, реализованное одновременно с депрессионным воздействием, не обладает достаточной эффективностью из-за интенсивного притока к скважине холодного (с температурой, равной исходной температуре пласта) газа из гидратосодержащей залежи.

## Список источников

- Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. 1993. Подземная гидромеханика. М.: Недра. 416 с.
- Бондарев Э. А., Рожин И. И., Попов В. В., Аргунова К. К. 2015. Оценка возможности подземного хранения гидратов природного газа в зоне многолетней мерзлоты // Криосфера Земли. Том 19. № 4. С. 64–74.
- Бородин С. Л., Бельских Д. С. 2018. Современное состояние исследований, связанных с извлечением метана из гидратосодержащей пористой среды // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 4. № 4. С. 131–147. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2018-4-4-131-147>
- Истомин В. А., Якушев В. С. 1992. Газовые гидраты в природных условиях. М.: Недра. 236 с.
- Лобковский Л. И., Рамазанов М. М. 2017. Математическая модель осесимметричного квазистационарного теплопереноса в газогидратном пласте // Известия РАН. Механика жидкости и газа. № 4. С. 85–96. <https://doi.org/10.7868/S0568528117040089>
- Мусакаев Н. Г., Хасанов М. К., Бородин С. Л., Бельских Д. С. 2018. Численное исследование процесса разложения гидрата метана при закачке теплого газа в гидратонасыщенную залежь // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 56. С. 88–101. <https://doi.org/10.17223/19988621/56/8>
- Мусакаев Н. Г., Бельских Д. С. 2021. Численное исследование процесса разложения газового гидрата при тепловом воздействии на гидратосодержащую область пористого пласта // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. Том 163. № 2. С. 153–166. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2021.2.153-166>
- Нигматулин Р. И. 1987. Динамика многофазных сред: в 2 ч. Часть 1. М.: Наука. 464 с.
- Шагапов В. Ш., Мусакаев Н. Г. 2016. Динамика образования и разложения гидратов в системах добычи, транспортировки и хранения газа. М.: Наука. 238 с.



- Шагапов В. Ш., Чиглинцева А. С., Русинов А. А. 2016. Теоретическое моделирование процесса извлечения газа из пористого газогидратного пласта, частично насыщенного газом, с учетом теплового взаимодействия с окружающими породами // Теоретические основы химической технологии. Том 50. № 4. С. 452–462. <https://doi.org/10.7868/S004035711604014X>
- Шарафутдинов Р. Ф., Давлетшин Ф. Ф. 2021а. Аналитическая модель нестационарного температурного поля в пласте с трещиной гидроразрыва // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 7. № 2 (26). С. 75–94. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2021-7-2-75-94>
- Шарафутдинов Р. Ф., Давлетшин Ф. Ф. 2021б. Численное исследование неизотермической фильтрации сжимаемого флюида в низкопроницаемом пласте с трещиной гидроразрыва // Прикладная механика и техническая физика. Том 62. № 2. С. 160–173. <https://doi.org/10.15372/PMTF20210216>
- Ahmedi G., Ji Ch., Smith H. D. 2004. Numerical solution for natural gas production from methane hydrate dissociation // Journal of Petroleum Science and Engineering. Vol. 41. No. 4. Pp. 269–285. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2003.09.004>
- Davletshina M. R., Stolpovskii M. V., Solovov D. B. 2019. Decomposition of methane hydrate with heat exposure // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Vol. 272. No. 3. Article 032239. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/272/3/032239>
- Hancock S. H., Collett T. S., Dallimore S. R., Satoh T., Inoue T., Huenges E., Hennings J., Weatherill B. 2005. Overview of thermal-stimulation production-test results for the JAPEX/JNOC/GSC et al. Mallik 5L-38 gas hydrate production research well // Scientific Results from the Mallik 2002 Gas Hydrate Production Research Well Program, Mackenzie Delta, Northwest Territories, Canada. Geological Survey of Canada / S. R. Dallimore, T. S. Collett (eds.). Bulletin 585.
- Liang D., Lin D., Lu J., Liu J., Li D., Jin G., Xia Zh., Li X.-S. 2023. Numerical study on natural gas hydrate production by hot water injection combined with depressurization // SSRN. 46 p. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4417014>
- Liu Y., Strumendo M., Arastoopour H. 2009. Simulation of methane production from hydrates by depressurization and thermal stimulation // Industrial & Engineering Chemistry Research. Vol. 48. No. 5. Pp. 2451–2464. <https://doi.org/10.1021/ie8005275>
- Makogon Y. F., Holditch S. A., Makogon T. Y. 2007. Natural gas-hydrates — A potential energy source for the 21<sup>st</sup> Century // Journal of Petroleum Science and Engineering. Vol. 56. No. 1–3. Pp. 14–31. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2005.10.009>
- Misyura S. Y., Donskoy I. G., Manakov A. Y., Morozova V. S., Strizhak P. A., Skiba S. S., Sagidullin A. K. 2021. Studying the influence of key parameters on the methane hydrate dissociation in order to improve the storage efficiency // Journal of Energy Storage. Vol. 44. Article 103288. <https://doi.org/10.1016/j.est.2021.103288>
- Moridis G. J., Collett T. S., Dallimore S. R., Inoue T., Mroz T. 2005. Analysis and interpretation of the thermal test of gas hydrate dissociation in the JAPEX/JNOC/GSC et al. Mallik 5L-38 gas hydrate production research well // Scientific Results from the Mallik 2002 Gas Hydrate Production Research Well Program, Mackenzie Delta, Northwest Territories, Canada. Geological Survey of Canada / S. R. Dallimore, T. S. Collett (eds.). Bulletin 585.
- Musakaev N. G., Borodin S. L. 2017. To the question of the interpolation of the phase equilibrium curves for the hydrates of methane and carbon dioxide // MATEC Web of Conferences. Vol. 115. Article 05002. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201711505002>



- Musakaev N. G., Belskikh D. S., Borodin S. L. 2021. Mathematical model and method for solving the problem of non-isothermal gas and liquid filtration flow during dissociation of gas hydrates // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. Vol. 42. No. 9. Pp. 2198–2204. <https://doi.org/10.1134/S1995080221090225>
- Sloan E. D., Koh C. A. 2007. *Clathrate Hydrates of Natural Gases*. 3<sup>rd</sup> ed. Boca Raton: CRC Press. 752 p. <https://doi.org/10.1201/9781420008494>
- Xu W., Ruppel C. 1999. Predicting the occurrence, distribution, and evolution of methane gas hydrate in porous marine sediments // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. Vol. 104. No. B3. Pp. 5081–5095. <https://doi.org/10.1029/1998JB900092>

## References

- Basniev, K. S., Kochina, I. N., & Maksimov, V. M. (1993). *Underground fluid mechanics*. Nedra. [In Russian]
- Bondarev, E. A., Rozhin, I. I., Popov, V. V., & Argunova, K. K. (2015). Assessment of possibility of natural gas hydrates underground storage in permafrost regions. *Earth's Cryosphere*, 19(4), 64–74. [In Russian]
- Borodin, S. L., & Belskikh, D. S. (2018). The current state of researches related to the extraction of methane from a porous medium containing hydrate. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 4(4), 131–147. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2018-4-4-131-147> [In Russian]
- Istomin, V. A., & Yakushev, V. S. (1992). *Gas hydrates in nature*. Nedra. [In Russian]
- Lobkovskii, L. I., & Ramazanov, M. M. (2017). Mathematical model of axisymmetric quasi-steady-state heat and mass transfer in a gas hydrate reservoir. *Fluid Dynamics*, 52(4), 536–546. <https://doi.org/10.1134/S0015462817040081>
- Musakaev, N. G., Khasanov, M. K., Borodin, S. L., & Belskikh, D. S. (2018). Numerical investigation of the methane hydrate decomposition in the process of warm gas injection into a hydrate-saturated reservoir. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, (56), 88–101. <https://doi.org/10.17223/19988621/56/8> [In Russian]
- Musakaev, N. G., & Belskikh, D. S. (2021). Numerical study of the process of gas hydrate decomposition under the thermal impact on the hydrate-containing region of a porous formation. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*, 163(2), 153–166. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2021.2.153-166> [In Russian]
- Nigmatulin, R. I. (1987). *Dynamics of multiphase media: in 2 parts. Part 1*. Nauka. [In Russian]
- Shagapov, V. S., & Musakaev, N. G. (2016). *Dynamics of hydrate formation and decomposition in gas production, transportation and storage systems*. Nauka. [In Russian]
- Shagapov, V. S., Chiglintseva, A. S., & Rusinov, A. A. (2016). Theoretical modeling of gas extraction from a partially gas-saturated porous gas-hydrate reservoir with respect to thermal interactions with surrounding rocks. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 50(4), 449–458. <https://doi.org/10.1134/S004057951604045X>
- Sharafutdinov, R. F., & Davletshin, F. F. (2021a). An analytical model of a non-stationary temperature field in a reservoir with a hydraulic fracturing. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 7(2), 75–94. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2021-7-2-75-94> [In Russian]

- Sharafutdinov, R. F., & Davletshin, F. F. (2021b). Numerical study of non-isothermal filtration of compressible fluid in a low-permeability reservoir with a hydraulic fracture. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 62(2), 317–328. <https://doi.org/10.1134/S0021894421020164>
- Ahmadi, G., Ji, Ch., & Smith, H. D. (2004). Numerical solution for natural gas production from methane hydrate dissociation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 41(4), 269–285. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2003.09.004>
- Davletshina, M. R., Stolpovskii, M. V., & Solovev, D. B. (2019). Decomposition of methane hydrate with heat exposure. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 272(3), Article 032239. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/272/3/032239>
- Hancock, S. H., Collett, T. S., Dallimore, S. R., Satoh, T., Inoue, T., Huenges, E., Hennings, J., & Weatherill, B. (2005). Overview of thermal-stimulation production-test results for the JAPEX/JNOC/GSC et al. Mallik 5L-38 gas hydrate production research well. In S. R. Dallimore & T. S. Collett (Eds.), *Scientific Results from the Mallik 2002 Gas Hydrate Production Research Well Program, Mackenzie Delta, Northwest Territories, Canada*. Geological Survey of Canada, Bulletin 585.
- Liang, D., Lin, D., Lu, J., Liu, J., Li, D., Jin, G., Xia, Zh., & Li, X.-S. (2023). Numerical study on natural gas hydrate production by hot water injection combined with depressurization. SSRN. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4417014>
- Liu, Y., Strumendo, M., & Arastoopour, H. (2009). Simulation of methane production from hydrates by depressurization and thermal stimulation. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 48(5), 2451–2464. <https://doi.org/10.1021/ie8005275>
- Makogon, Y. F., Holditch, S. A., & Makogon, T. Y. (2007). Natural gas-hydrates — A potential energy source for the 21<sup>st</sup> Century. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 56(1–3), 14–31. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2005.10.009>
- Misyura, S. Y., Donskoy, I. G., Manakov, A. Y., Morozova, V. S., Strizhak, P. A., Skiba, S. S., & Sagidullin, A. K. (2021). Studying the influence of key parameters on the methane hydrate dissociation in order to improve the storage efficiency. *Journal of Energy Storage*, 44, Article 103288. <https://doi.org/10.1016/j.est.2021.103288>
- Moridis, G. J., Collett, T. S., Dallimore, S. R., Inoue, T., & Mroz, T. (2005). Analysis and interpretation of the thermal test of gas hydrate dissociation in the JAPEX/JNOC/GSC et al. Mallik 5L-38 gas hydrate production research well. In S. R. Dallimore & T. S. Collett (Eds.), *Scientific Results from the Mallik 2002 Gas Hydrate Production Research Well Program, Mackenzie Delta, Northwest Territories, Canada*. Geological Survey of Canada, Bulletin 585.
- Musakaev, N. G., & Borodin, S. L. (2017). To the question of the interpolation of the phase equilibrium curves for the hydrates of methane and carbon dioxide. *MATEC Web of Conferences*, 115, Article 05002. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201711505002>
- Musakaev, N. G., Belskikh, D. S., & Borodin, S. L. (2021). Mathematical model and method for solving the problem of non-isothermal gas and liquid filtration flow during dissociation of gas hydrates. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(9), 2198–2204. <https://doi.org/10.1134/S1995080221090225>
- Sloan, E. D., & Koh, C. A. (2007). *Clathrate hydrates of natural gases* (3<sup>rd</sup> ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781420008494>
- Xu, W., & Ruppel, C. (1999). Predicting the occurrence, distribution, and evolution of methane gas hydrate in porous marine sediments. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 104(B3), 5081–5095. <https://doi.org/10.1029/1998JB900092>

## Информация об авторах

*Наиль Габсалимович Мусакаев*, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, Россия  
musakaev@ikz.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8589-9793>

*Денис Сергеевич Бельских*, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, Россия  
denisbelskikh@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-0813-5765>

## Information about the authors

*Nail G. Musakaev*, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher, Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia  
musakaev@ikz.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8589-9793>

*Denis S. Belskikh*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Researcher, Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia  
denisbelskikh@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-0813-5765>

## Параметрический анализ модели многозабойной скважины в пласте с двойной пористостью

Дмитрий Николаевич Майков<sup>1</sup>✉, Сергей Сергеевич Макаров<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сиама Мастер, Ижевск, Россия

<sup>2</sup> Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, Ижевск, Россия  
Контакт для переписки: [dimaMS2@mail.ru](mailto:dimaMS2@mail.ru)✉

**Аннотация.** Получено новое аналитическое решение уравнения пьезопроводности для многозабойной скважины, вскрывающей пласт с двойной пористостью вертикально по всей толщине. Решение уравнения пьезопроводности приведено в лапласовом пространстве. Вывод решения уравнения пьезопроводности приведен при условии постоянного дебита скважины и отсутствии потерь давления на трение в стволах скважины. Аналитическое решение уравнения пьезопроводности, записанное с учетом наличия системы трещин и поровых матриц, содержит модифицированную функцию Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, а само решение представлено в виде матричного уравнения. Реализация матричного уравнения производится при помощи LU-разложения, а перевод безразмерного давления из лапласова пространства в декартову систему координат осуществляется при помощи алгоритма Стефеста. На основе разработанного численного алгоритма проведен параметрический анализ модели многозабойной скважины в пласте с двойной пористостью. Варьируются фильтрационно-емкостные параметры пласта, параметры ответвлений многозабойной скважины, параметры модели двойной пористости, такие как доля трещинно-кавернозной емкости и удельный коэффициент проводимости. Показано отличие расчетных параметров модели многозабойной скважины в однородном пласте и пласте с двойной пористостью. Установлено влияние коэффициентов доли трещинно-кавернозной емкости и удельного коэффициента проводимости на изменение давления и производную изменения давления в скважине. Показано, что при уменьшении удельного коэффициента проводимости в 10 раз время начала переходного режима увеличивается также в 10 раз. Понижение значения доли трещинно-кавернозной емкости

с 0,01 до 0,005 приводит к увеличению изменения давления в начале работы скважины на 14,3% и уменьшению минимального значения производной изменения давления переходного режима в 1,92 раза. При понижении доли трещинно-кавернозной емкости до 0,001 значение изменения давления увеличивается на 48,2%, а минимальное значение производной изменения давления переходного режима снижается в 7,5 раз.

**Ключевые слова:** многозабойная скважина, аналитическое решение, уравнение пьезопроводности, трещиновато-порový пласт, двойная пористость, полное вскрытие пласта, вертикальная траектория вскрытия, гидродинамические исследования скважин

**Цитирование:** Майков Д. Н., Макаров С. С. 2023. Параметрический анализ модели многозабойной скважины в пласте с двойной пористостью // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 3 (35). С. 100–116. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-100-116>

Поступила 14.03.2023; одобрена 19.09.2023; принята 06.10.2023

## The multilateral well model with complete vertical opening of naturally fractured reservoir

Dmitriy N. Maykov<sup>1</sup>✉, Sergey S. Makarov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Siam Master, Izhevsk, Russia

<sup>2</sup> Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Russia

Corresponding author: [dimaMS2@mail.ru](mailto:dimaMS2@mail.ru) ✉

**Abstract.** A new analytical solution of the diffusivity equation for a mathematical model of a multilateral which penetrates a double-porosity reservoir vertically along the entire thickness has been obtained. The solution of the diffusivity equations is given in the Laplace space and was derived with the assumption of a well constant flow rate and the absence of friction pressure losses in the channels. The analytical solution of the diffusivity equation, written taking into account the presence of a fracture system and pore matrices, contains a modified Bessel function of the first and second kind of zero order and is presented in the form of a matrix equation. The matrix equation is solved using the LU decomposition, and the transfer of the dimensionless pressure from the Laplace space to the Cartesian coordinate system

is performed using the Stehfest algorithm. On the basis of the developed numerical algorithm, a parametric analysis of the multilateral well model in a formation with double porosity was carried out. The reservoir flow properties, the parameters of the multilateral well branches, the double porosity model parameters, such as the storativity ratio and the transmissivity ratio, vary. The difference between the calculated parameters of the multilateral well model in a homogeneous formation and in a formation with double porosity is shown. The influence of the storativity ratio and the transmissivity ratio on the pressure drop and the derivative of the pressure drop in the well has been established. It is shown that when the transmissivity ratio decreases by a factor of 10, the start time of the transient regime also increases by a factor of 10. A decrease in the storativity ratio value from 0.01 to 0.005 leads to an increase in the pressure drop at the beginning of the well operation by 14.3% and the pressure drop derivative minimum value of the transient regime reduces by 1.92 times. When the storativity ratio decreases to 0.001, the value of the pressure drop increases by 48.2% and the pressure drop derivative minimum value of the transient regime decreases by 7.5 times.

**Keywords:** multilateral well, analytic solution, diffusivity equation, naturally fractured reservoir, dual-porosity, full reservoir opening, vertical opening trajectory, hydrodynamic studies of wells

**Citation:** Майков, Д. Н., & Макаров, С. С. (2023). The multilateral well model with complete vertical opening of naturally fractured reservoir. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 100–116. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-100-116>

Received March 14, 2023; Reviewed September 19, 2023; Accepted October 6, 2023

## Введение

Успешная разработка месторождений во многом связана с моделированием процессов, происходящих в скважинах и эксплуатируемом пласте. Методами гидродинамических исследований скважин (ГДИС) определяются фильтрационные параметры пласта. При интерпретации ГДИС часто используют модели, основанные на решении дифференциального уравнения пьезопроводности, для получения которых вводятся такие упрощения, как однородный пласт, изотермический процесс, идеальная геометрия скважины, пласт геометрической формы, постоянный дебит скважины и т. д. Так, в работах [Ozkan, Raghavan, 1991a, 1991b; Рое и др., 1994] приведены аналитические модели вертикальной скважины, вертикальной скважины с трещиной, горизонтальной скважины. Модели многозабойных скважин приведены в работах [Salas и др., 1996; Ozkan и др., 1998; Майков, Борхович, 2020]. Переход от моделирования процесса добычи с постоянным дебитом к моделированию с изменяющимися дебитами осуществляется с помощью принципа суперпозиции (наложения) по времени [Walker, 1968;



Cinco-Ley, Samaniego V., 1989; Майков и др., 2021]. В целом, благодаря аналитическим решениям, сложность вычислений кратно сокращается, но не всегда полученные результаты могут быть пригодны для инженерной практики, т. к. время расчета сложной модели «скважина — пласт — граница» при многообразии режимов работы скважины может значительно увеличиться, особенно при решении обратной коэффициентной задачи [Майков, Макаров, 2022].

Традиционными методами ГДИС анализируется лишь прискважинная зона. Более детальную информацию о межскважинном пространстве можно получить, применяя методы, связанные с потерей добычи нефти или гидропрослушиванием [Earlougher, Ramey, 1973; Fokker и др., 2012; Майков и др., 2018; Майков, Борхович, 2019], что не всегда экономически оправдано.

В данной работе для построения расчетной модели, основанной на аналитическом решении уравнения пьезопроводности многозабойной скважины, вскрывающей пласт с двойной пористостью вертикально по всей толщине, используются положения, изложенные в работе [Майков, Борхович, 2020].

Цель работы — проведение параметрического анализа модели многозабойной скважины в пласте с двойной пористостью с применением нового аналитического решения уравнения пьезопроводности.

При построении математической модели пьезопроводности для трещиновато-порового коллектора выделяются следующие этапы: 1) течение в матрице, 2) течение в трещинах, 3) переток между трещиной и матрицей.

Описание процесса перетока между трещинами и матрицами может отличаться в зависимости от масштаба рассматриваемой среды [Блонский и др., 2017]. В настоящей работе для описания течения флюида в трещиновато-поровом коллекторе используется модель двойной пористости [Warren, Root, 1963], представляющая пласт в виде идеализированных геометрических фигур (рис. 1). Помимо этого, использована простая псевдостационарная модель потока PSS (pseudosteady state) от матрицы к трещине [Satter, Iqbal, 2016]. Особенность модели двойной пористости заключается в том, что трещиновато-поровый пласт рассматривается как система из двух сред: трещиноватой, характеризующейся эффективной пористостью, и пористой, соответствующей проницаемой матрице. Также делается допущение об одинаковом составе матрицы с определенной идеализированной геометрической формой.

Фильтрационно-емкостные свойства трещиновато-порового коллектора описываются средневзвешенными параметрами: пористостью  $\phi_{mb}$  и проницаемостью  $k_{mb}$ , которые находятся через определяемые по керну пористость матрицы  $\phi_{mi}$  и проницаемость матрицы  $k_{mi}$ . Связь между параметрами матрицы и средневзвешенными параметрами матрицы приведена в следующих соотношениях [Stewart, 2011]:

$$\phi_{mb} = \frac{V_m}{V_{m+f}} \phi_{mi}, \quad k_{mb} = \frac{V_m}{V_{m+f}} k_{mi}, \quad (1)$$

где  $V_m$  — объем матрицы;  $V_{m+f}$  — общий объем (матрица + трещины).

На практике в трещиновато-поровых пластах часто объем трещин очень мал, поэтому соотношение  $V_m/V_{m+f}$  близко к единице.

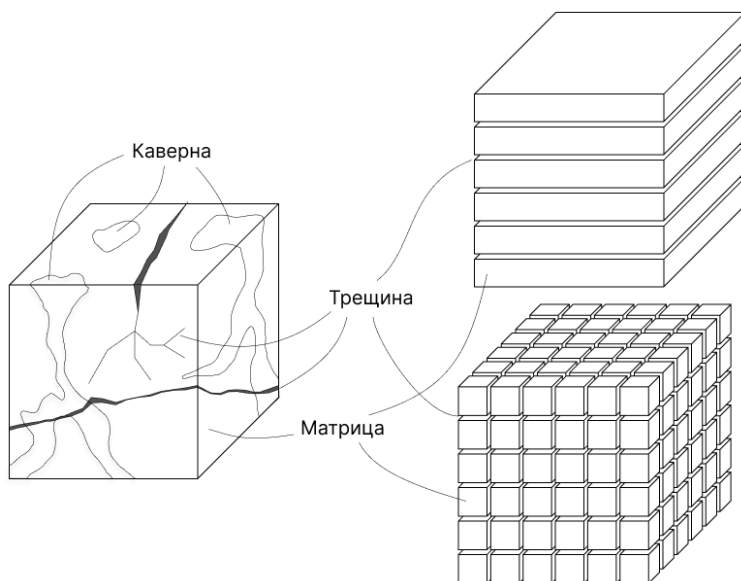


Рис. 1. Упрощение сложного трещиновато-порового пласта идеализированными геометрическими фигурами

Fig. 1. Simplifying a complex fractured reservoir idealized by geometric shapes

## Методы

### Система трещин

Рассмотрим математическую модель вертикальной скважины, полностью вскрывающей пласт с двойной пористостью. Дифференциальное уравнение пьезопроводности для системы трещин в радиальной системе координат имеет вид [Nie и др., 2012]:

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_f}{\partial r} = \frac{\phi_{fb} c_f \mu}{k_{fb}} \frac{\partial p_f}{\partial t} - \frac{\mu}{k_{fb}} \sigma_{mf}, \quad (2)$$

где  $p_f$  — давление в трещине;  $\phi_{fb}$  — объемная средняя пористость системы трещин;  $k_{fb}$  — объемная средняя проницаемость системы трещин;  $c_f$  — сжимаемость трещины;  $\mu$  — вязкость флюида;  $r$  — радиальное направление;  $\sigma_{mf}$  — источник притока от матрицы на единицу объема рассматриваемой системы;  $t$  — время.

### Система матриц

В моделях двойной пористости, основанных на потоке PSS между матрицей и трещинами, предполагается, что элементы матрицы имеют среднее давление  $p_m$ , которое изменяется со временем. При любом значении радиального направления  $r$  материальный баланс при истощении матрицы будет иметь следующий вид [Mohammed и др., 2021]:

$$\phi_{mi} c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = -\sigma_m, \quad (3)$$



где  $c_m$  — сжимаемость матрицы;  $p_m$  — давление в матрице;  $\sigma_m$  — источник переноса флюида из матрицы в трещину на единицу объема матрицы, который находится из соотношения [Stewart, 2011]:

$$V_m \sigma_m = V_{m+f} \sigma_{mf}. \quad (4)$$

Величина  $\sigma_{mf}$ , определенная в уравнении (2), связана с  $\sigma_m$  уравнением (4).

Исходя из уравнений (1) и (4), уравнение (3) запишем следующим образом:

$$\phi_{mb} c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = -\sigma_{mf}. \quad (5)$$

Используя модель двойной пористости, имеем:

$$\sigma_m = \alpha \frac{k_{mi}}{\mu} (p_m - p_f), \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{4n(n+2)}{h_m^2}, \quad (7)$$

$$\sigma_{mf} = \sigma_m \frac{V_m}{V_{m+f}} = \alpha \frac{k_{mb}}{\mu} (p_m - p_f), \quad (8)$$

где  $\alpha$  — геометрический коэффициент;  $h_m$  — характеристический размер блока матрицы;  $n$  — параметр, определяющий, в каких пространственных направлениях возможен обмен флюида между матрицей и трещинами.

Приняв во внимание дифференциальное уравнение пьезопроводности системы трещин (2) и выражение (5), а также сделав допущение, что между матрицами нет перетоков, дифференциальное уравнение пьезопроводности модели двойной пористости запишем так:

$$\begin{cases} \frac{k_{fb}}{\mu} \nabla^2 p_f = \phi_{fb} c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - \alpha \frac{k_{mb}}{\mu} (p_m - p_f), \\ 0 = \phi_{mb} c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} + \alpha \frac{k_{mb}}{\mu} (p_m - p_f). \end{cases} \quad (9)$$

Приведем систему уравнений (9) в безразмерный вид:

$$\begin{cases} \nabla^2 p_{fd} = \omega \frac{\partial p_{fd}}{\partial t_d} - \lambda (p_{md} - p_{fd}), \\ 0 = (1 - \omega) \frac{\partial p_{md}}{\partial t_d} + \lambda (p_{md} - p_{fd}). \end{cases} \quad (10)$$

Безразмерные переменные приведены ниже:

$$\sigma_{mfd} = \frac{2\pi r_w^2 h}{qB} \sigma_{mf}, \quad (11)$$

$$\omega = \frac{\phi_{fb} c_f}{\phi_{fb} c_f + \phi_{mb} c_m}, \quad (12)$$

$$\lambda = \frac{\alpha k_{mb} r_w^2}{k_{fb}}, \quad (13)$$

$$r_d = \frac{r}{r_w}, \quad (14)$$

$$t_d = \frac{k_{fb} t}{(\phi c_t)_{m+f} \mu r_w^2}, \quad (15)$$

$$(\phi c_t)_{m+f} = \phi_{mb} c_m + \phi_{fb} c_f, \quad (16)$$

$$p_d = \frac{2\pi k_{fb} h}{qB\mu} (p_i - p). \quad (17)$$

Здесь  $\sigma_{mfd}$  — безразмерный приток матрицы;  $\omega$  — доля трещинно-кавернозной емкости;  $r_d$  — безразмерный радиус;  $r_w$  — радиус скважины;  $h$  — толщина пласта;  $q$  — дебит скважины;  $B$  — объемный коэффициент флюида;  $t_d$  — безразмерное время;  $\lambda$  — удельный коэффициент проводимости;  $p_d$  — безразмерное давление;  $p_{md}$  — безразмерное давление в матрице;  $p_{fd}$  — безразмерное давление в трещине;  $p_i$  — начальное давление;  $p$  — давление.

Применив преобразование Лапласа к системе (10), получим:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{p}_{fd}}{dr_d^2} + \frac{1}{r_d} \frac{d\bar{p}_{fd}}{dr_d} = \omega s \bar{p}_{fd} - \lambda (\bar{p}_{md} - \bar{p}_{fd}), \\ 0 = (1 - \omega) s \bar{p}_{md} + \lambda (\bar{p}_{md} - \bar{p}_{fd}), \end{cases} \quad (18)$$

где  $s$  — переменная лапласового пространства.

Выразим из второго уравнения системы (18) безразмерное давление матрицы  $\bar{p}_{md}$  в лапласовом пространстве:

$$\bar{p}_{md} = \frac{\lambda}{(1 - \omega)s + \lambda} \bar{p}_{fd}. \quad (19)$$

Подставим уравнение (19) в первое уравнение системы (18), и тогда система уравнений (18) преобразуется в одно уравнение вида:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{fd}}{dr_d^2} + \frac{1}{r_d} \frac{d\bar{p}_{fd}}{dr_d} = f(s) s \bar{p}_{fd}, \quad (20)$$

где  $f(s)$  — учитывающая геометрический фактор функция, соответствующая модели PSS:

$$f(s) = \frac{\omega(1 - \omega)s + \lambda}{(1 - \omega)s + \lambda}. \quad (21)$$

## Результаты и обсуждение

### Аналитическое решение дифференциального уравнения модели двойной пористости

Получим аналитическое решение дифференциального уравнения пьезопроводности (20) для вертикальной скважины в трещиновато-поровом коллекторе по модели двойной пористости.

Примем следующие начальные и граничные условия:

$$p_{fd}(t_d = 0, r_d) = 0, \quad \lim [p_{fd}(r_d, t_d)]_{r_d \rightarrow \infty, t_d} = 0, \quad \lim \left( r_d \frac{dp_{fd}}{dr_d} \right)_{r_d \rightarrow 0, t_d} = -1. \quad (22)$$

Уравнение (20) запишем аналогично модифицированному уравнению Бесселя [Lee и др., 2003; Permadi, 2009]:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \eta y = 0, \quad (23)$$

которое имеет общее решение:

$$y = AK_0(\sqrt{\eta}x) + BI_0(\sqrt{\eta}x), \quad (24)$$

где  $K_0$  — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка;  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

С учетом начальных и граничных условий (22) имеем:

$$A = \frac{1}{s}, \quad B = 0. \quad (25)$$

Исходя из общего решения (24) и условий (25), уравнение (20) представим в виде (26):

$$\bar{p}_{fd} = \frac{1}{s} K_0(\sqrt{f(s)}sr_d). \quad (26)$$

Задавая изменение давления относительно вертикальной скважины в трещиновато-поровом коллекторе согласно модели двойной пористости, выведем решение модели многозабойной скважины в трещиновато-поровом коллекторе. Используя положения, изложенные в работе [Майков, Борхович, 2020], окончательно получим запись:

$$\begin{bmatrix} s\bar{p}_{fd1,1} & s\bar{p}_{fd1,2} & \dots & s\bar{p}_{fd1,n} & -1 \\ s\bar{p}_{fd2,1} & s\bar{p}_{fd2,2} & \dots & s\bar{p}_{fd2,n} & -1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ s\bar{p}_{fdn,1} & s\bar{p}_{fdn,2} & \vdots & s\bar{p}_{fdn,n} & -1 \\ s & s & \dots & s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_{d1} \\ \bar{q}_{d2} \\ \vdots \\ \bar{q}_{dn} \\ \bar{p}_{wd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

где элементы, находящиеся на диагонали матрицы коэффициентов ( $\bar{p}_{fd1,1}$ ,  $\bar{p}_{fd2,2}$  и т. д.), соответствуют аналитическому решению модели вертикальной скважины в пласте с двойной пористостью (17) в стволе скважины, а недиагональные элементы ( $\bar{p}_{fd1,2}$ ,  $\bar{p}_{fd2,1}$  и т. д.) соответствуют аналитическому решению модели в точке, удаленной на расстояние, равное дистанции между рассматриваемыми стволами скважины;  $\bar{q}_{di}$  — безразмерный дебит  $i$ -го ствола;  $\bar{p}_{wd}$  — безразмерное давление в общем стволе многозабойной скважины.

Основываясь на положениях, изложенных в работе [Майков, Борхович, 2020], параметр  $\bar{p}_{fdi,j}$  определим так:

$$\bar{p}_{fdi,j} = \begin{cases} \frac{1}{s} K_0 \left( \sqrt{f(s)} s r_{di} \right) & \text{при } i = j, \\ \frac{1}{s} K_0 \left( \sqrt{f(s)} s R_{dij} \right) & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (28)$$

Здесь  $r_{di}$  — безразмерный радиус  $i$ -го ствола;  $R_{dij}$  — безразмерное расстояние между стволами  $i$  и  $j$ . Безразмерное расстояние между стволами определяется по следующей формуле:

$$R_{dij} = \frac{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}{r_w}, \quad (29)$$

где  $x$  — расположение  $i$ - и  $j$ -го ствола на оси  $x$ ;  $y$  — расположение  $i$ - и  $j$ -го ствола на оси  $y$ .

Поскольку в многозабойной скважине несколько стволов, то в качестве радиуса скважины  $r_w$  в расчетах безразмерных переменных принимается радиус одного из стволов.

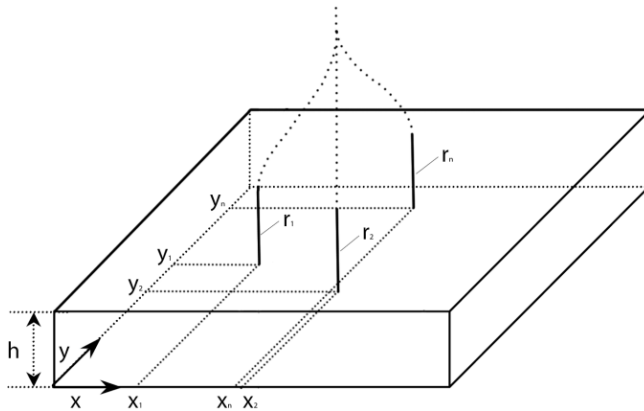
Перевод безразмерного давления из лапласова пространства в декартову систему координат производился при помощи алгоритма Стефеста [Stehfest, 1970].

Полученное аналитическое решение уравнения пьезопроводности в виде выражения (27) дает возможность определять параметры многозабойной скважины в пласте с двойной пористостью, полностью вскрывающей пласт по вертикальной траектории, и производить при этом учет таких параметров, как удельный коэффициент проводимости и доля трещинно-кавернозной емкости.

### Численный анализ параметров модели многозабойной скважины в пласте с двойной пористостью

Проведем численный анализ изменения параметров многозабойной скважины, вскрывающей каждым отдельным ответвлением трещиновато-поровый бесконечный пласт полностью по толщине пласта и по вертикальной траектории. Для этого решим матричное уравнение (27) при помощи LU-разложения [Mittal, Al-Kurdi, 2002]. Схема модели для расчета, взятая из работы [Майков, Борхович, 2020], приведена на рис. 2. Предполагается, что происходит фильтрация однофазной жидкости с постоянными значениями вязкости и объемного коэффициента. Значение общего коэффициента сжимаемости  $\zeta$  [Ozkan и др., 1998] считается неизменным.

В таблице 1 и 2 приведены исходные данные, используемые для расчета по предлагаемой модели.



**Рис. 2.** Расчетная схема многозабойной скважины с вертикальным вскрытием пласта с двойной пористостью

**Fig. 2.** Calculation scheme of a multilateral well with vertical opening of a double-porosity reservoir

**Таблица 1.** Основные параметры модели (сопоставление моделей)

**Table 1.** Main parameters of the model (model comparison)

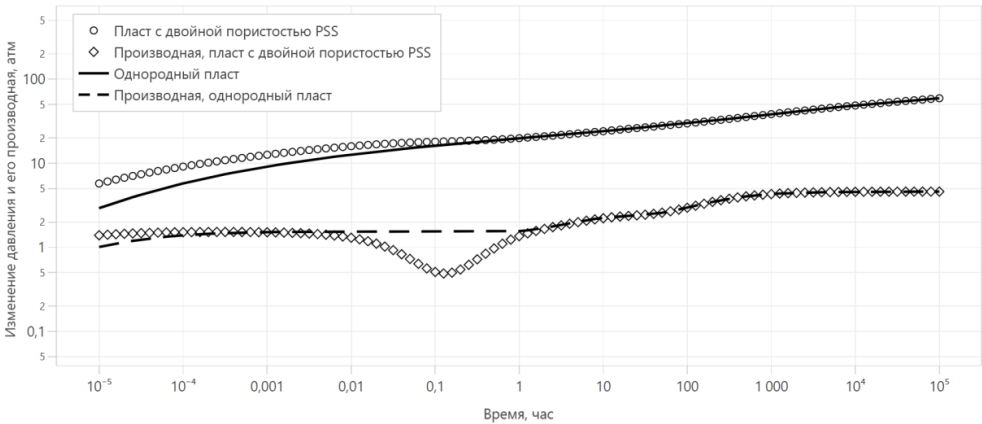
Параметр	Значение
Толщина пласта, $h$	10 м
Объемная средняя проницаемость системы трещин, $k_{fb}$	100 мД
Общая сжимаемость, $c_t$	0,000 05 атм <sup>-1</sup>
Пористость, $\phi$	0,2
Объемный коэффициент флюида, $B$	1 м <sup>3</sup> /ст. м <sup>3</sup>
Вязкость флюида, $\mu$	5 сПз
Общий дебит, $q$	100 м <sup>3</sup> /сут
Доля трещинно-кавернозной емкости, $\omega$	0,1
Удельный коэффициент проводимости, $\lambda$	0,000 01

**Таблица 2.** Параметры ответвлений (сопоставление моделей)

**Table 2.** Wellbores parameters (model comparison)

№ ствола	X, м	Y, м	Радиус, м
1	0	0	0,065
2	75	75	0,090
3	500	500	0,045

На рис. 3 приведено сопоставление результата расчета изменения давления в скважине без учета потерь на трение по модели многозабойной скважины в однородном пласте [Майков, Борхович, 2020] и результата, полученного по предлагаемой модели с двойной пористостью, на диагностическом графике Бурде [Bourdet и др., 1983].



**Рис. 3.** Изменение давления по модели многозабойной скважины в однородном пласте и пласте с двойной пористостью

**Fig. 3.** Pressure gradient of a multilateral well in a homogeneous reservoir and in a dual porosity reservoir

Ввиду того, что модель с двойной пористостью, в отличие от модели с однородным пластом, учитывает параметры трещиновато-порового пласта (удельный коэффициент проводимости и долю трещинно-кавернозной емкости), на временных интервалах проявляются характерные отклонения кривых давления  $x$ . Так, видно, что до 0,01 ч присутствует радиальный режим в системе трещин. На интервале от 0,01 до 2 ч имеет место переходный период (приток от матрицы к трещине). От 1 000 ч и далее по времени для всей системы сохраняется радиальный режим. Помимо этого, на рис. 3 для двух моделей наблюдается интерференция между стволами многозабойной скважины в интервале времени от 1 до 1 000 ч, а начиная с 2 ч результаты, полученные по обеим моделям, идентичны.

Проведем численный анализ для определения зависимости давления в многозабойной скважине от удельного коэффициента проводимости  $\lambda$  и доли трещинно-кавернозной емкости  $\omega$ . Параметры, использованные в расчетах, приведены в таблице 3 и 4. Результаты расчетов приведены на диагностических графиках Бурде (рис. 4 и 5).

На рис. 4 и 5 для рассмотренных трех случаев группа кривых, описывающих изменение давления, отображена выше группы кривых, описывающих трансформацию производной изменения давления.

На рис. 4 видно, что с уменьшением удельного коэффициента проводимости  $\lambda$  происходит смещение начала переходного режима на более поздний момент времени: при уменьшении удельного коэффициента проводимости в 10 раз увеличивается время начала переходного режима в 10 раз. Физически это обусловлено снижением интенсивности фильтрации поровой матрицы трещиновато-поровой системы. Смещение начала переходного режима отчетливо видно на кривой производной изменения давления (нижняя группа кривых). После 80 ч зависимость изменения давления по времени для расчетных случаев становится одинаковой. Также отчетливо виден эффект интерференции стволов в интервале времени от 40 до 1 400 ч, благодаря чему происходит увеличение изменения давления и его производной.

**Таблица 3.** Основные параметры модели (определение зависимости давления от  $\lambda$  и  $\omega$ )

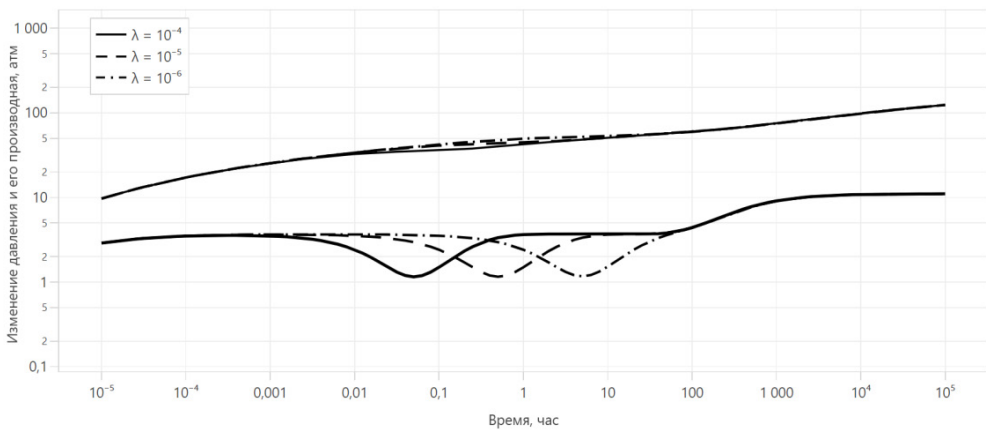
**Table 3.** Main parameters of the model (determination of pressure dependence on  $\lambda$  and  $\omega$ )

Параметр	Значение
Толщина пласта, $h$	15 м
Объемная средняя проницаемость системы трещин, $k_{fb}$	20 мД
Общая сжимаемость, $c_t$	0,000 01 атм <sup>-1</sup>
Пористость, $\phi$	0,3
Объемный коэффициент флюида, $V$	1,2 м <sup>3</sup> /ст. м <sup>3</sup>
Вязкость флюида, $\mu$	15 сПз
Общий дебит, $q$	20 м <sup>3</sup> /сут
Доля трещинно-кавернозной емкости, $\omega$	0,1
Удельный коэффициент проводимости, $\lambda$	0,000 01

**Таблица 4.** Параметры ответвлений (определение зависимости давления от  $\lambda$  и  $\omega$ )

**Table 4.** Wellbores parameters (determination of pressure dependence on  $\lambda$  and  $\omega$ )

Ствол №	X, м	Y, м	Радиус, м
1	0	0	0,06
2	250	200	0,07
3	-300	300	0,05



**Рис. 4.** Влияние удельного коэффициента проводимости  $\lambda$

**Fig. 4.** Influence of the transmissivity ratio  $\lambda$

На рис. 5 видно, что с уменьшением значения доли трещинно-кавернозной емкости  $\omega$  наблюдается увеличение изменения давления в начале работы скважины; происходит уменьшение минимального значения производной изменения давления переходного режима: при уменьшении значения доли трещинно-кавернозной емкости в 2 раза — с 0,01 до 0,005 — увеличивается изменение давления в начале работы скважины на 14,3%

и уменьшается минимальное значение производной изменения давления переходного режима в 1,92 раза; при уменьшении коэффициента в 10 раз — с 0,01 до 0,001 — увеличивается значение изменения давления на 48,2% и уменьшается минимальное значение производной изменения давления переходного режима в 7,5 раз. Это обусловлено тем, что с уменьшением данного коэффициента увеличивается доля матричной емкости в пласте. Чем больше значение коэффициента доли трещинно-кавернозной емкости  $\omega$ , тем позже начинается переходный период. После 0,19 ч производные изменения давления для расчетных случаев имеют идентичный характер. В том случае, если доля трещинно-кавернозной емкости равна единице, модель пласта с двойной пористостью будет полностью соответствовать модели однородного пласта.

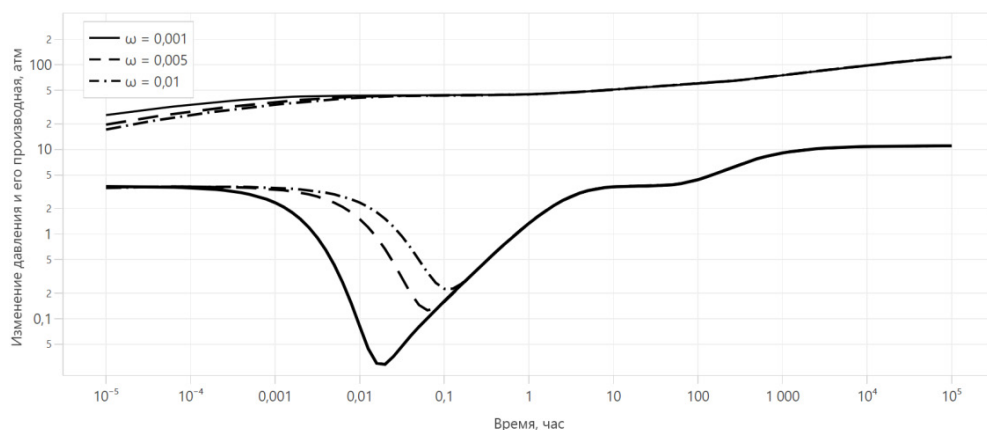


Рис. 5. Влияние доли трещинно-кавернозной емкости  $\omega$

Fig. 5. Influence of the storativity ratio  $\omega$

## Заключение

В статье приведены результаты параметрического анализа модели многозабойной скважины в пласте с двойной пористостью при интерпретации результатов ГДИС с применением нового аналитического решения уравнения пьезопроводности. Данное решение, основанное на предлагаемой для рассматриваемого случая математической модели скважины, вскрывающей пласт вертикально по всей толщине, позволит достоверно интерпретировать результаты ГДИС с учетом изменяющихся параметров пласта с двойной пористостью, таких как удельная проводимость и емкостной коэффициент.

Проведены численные исследования модели многозабойной скважины с полным вертикальным вскрытием однородного пласта с двойной пористостью. Показано влияние коэффициентов доли трещинно-кавернозной емкости и удельного коэффициента проводимости на изменение давления и производную изменения давления в скважине. Установлено, что при уменьшении удельного коэффициента проводимости в 10 раз время начала переходного режима увеличивается также в 10 раз. Уменьшение значения доли трещинно-кавернозной емкости с 0,01 до 0,005 приводит к увеличению изменения



давления в начале работы скважины на 14,3%, а минимальное значение производной изменения давления переходного режима снижается в 1,92 раза. При понижении доли трещинно-кавернозной емкости до 0,001 значение изменения давления увеличивается на 48,2%, а минимальное значение производной изменения давления переходного режима снижается в 7,5 раз.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- Блонский А. В., Митрушкин Д. А., Савенков Е. Б. 2017. Моделирование течений в дискретной системе трещин: физико-математическая модель // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. № 65. <https://doi.org/10.20948/prepr-2017-65>
- Майков Д. Н., Васильев Р. С., Васильев Д. М. 2018. Методика выявления отклика при гидропрослушивании в условиях зашумления забойного давления и наличия трендов давления // Нефтяное хозяйство. № 9. С. 98–101. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2018-9-98-101>
- Майков Д. Н., Борхович С. Ю. 2019. Исследование взаимодействия скважин методом гидропрослушивания // Нефть. Газ. Новации. № 2. С. 30–31.
- Майков Д. Н., Борхович С. Ю. 2020. Аналитическая модель многозабойной скважины с полным вертикальным вскрытием пласта // Нефть. Газ. Новации. № 11 (240). С. 61–65.
- Майков Д. Н., Исупов С. В., Макаров С. С., Аниканов А. С. 2021. Метод ускорения расчета давления при изменяющихся дебитах по истории эксплуатации скважины // Нефтяное хозяйство. № 9. С. 105–107. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2021-9-105-107>
- Майков Д. Н., Макаров С. С. 2022. Численное исследование алгоритмов оптимизации при адаптации гидродинамической модели по результатам исследований скважин // Математическое моделирование. Том 34. № 9. С. 71–82. <https://doi.org/10.20948/mm-2022-09-05>
- Bourdet D., Whittle T. M., Douglas A. A., Pirard V. M. 1983. A new set of type curves simplifies well test analysis // World Oil. Vol. 196. Pp. 95–106.
- Cinco-Ley H., Samaniego V. F. 1989. Use and misuse of the superposition time function in well test analysis // SPE Annual Technical Conference and Exhibition (8–11 October 1989, San Antonio, Texas). Paper SPE-19817-MS. <https://doi.org/10.2118/19817-MS>
- Earlougher R. C., Ramey H. J. 1973. Interference analysis in bounded systems // Journal of Canadian Petroleum Technology. Vol. 12. No. 4. Paper PETSOC-73-04-04. <https://doi.org/10.2118/73-04-04>
- Fokker P. A., Renner J., Verga F. 2012. Applications of harmonic pulse testing to field cases // SPE Europe/EAGE Annual Conference (4–7 June 2012, Copenhagen, Denmark). Paper SPE-154048-MS. <https://doi.org/10.2118/154048-MS>
- Lee J., Rollins J. B., Spivey J. P. 2003. Pressure Transient Testing. Richardson, TX: Society of Petroleum Engineers. 376 p. <https://doi.org/10.2118/9781555630997>
- Mittal R. C., Al-Kurdi A. 2002. LU-decomposition and numerical structure for solving large sparse nonsymmetric linear systems // Computers & Mathematics with Applications. Vol. 43. No. 1–2. Pp. 131–155. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(01\)00279-6](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(01)00279-6)
- Mohammed I., Olayiwola T. O., Alkathim M., Awotunde A. A., Alafnan S. F. 2021. A review of pressure transient analysis in reservoirs with natural fractures, vugs and/or caves // Petroleum Science. Vol. 18. No. 1. Pp. 154–172. <https://doi.org/10.1007/s12182-020-00505-2>

- Nie R.-S., Meng Y.-F., Jia Y.-L., Zhang F.-X., Yang X.-T., Niu X.-N. 2012. Dual porosity and dual permeability modeling of horizontal well in naturally fractured reservoir // *Transport in Porous Media*. Vol. 92. No. 1. Pp. 213–235. <https://doi.org/10.1007/s11242-011-9898-3>
- Ozkan E., Raghavan R. 1991a. New solutions for well-test-analysis problems: Part 1 — Analytical considerations // *SPE Formation Evaluation*. Vol. 6. No. 3. Pp. 359–368. <https://doi.org/10.2118/18615-PA>
- Ozkan E., Raghavan R. 1991b. New solutions for well-test-analysis problems: Part 2 — Computational considerations and applications // *SPE Formation Evaluation*. Vol. 6. No. 3. Pp. 369–378. <https://doi.org/10.2118/18616-PA>
- Ozkan E., Yildiz T., Kuchuk F. J. 1998. Transient pressure behavior of dual-lateral wells // *Society of Petroleum Engineers Journal*. Vol. 3. No. 2. Pp. 181–190. <https://doi.org/10.2118/38670-PA>
- Permadi A. K. 2009. Development of solution to the diffusivity equation with prescribed-pressure boundary condition and its applications to reservoirs experiencing strong water influx // *Far East Journal of Applied Mathematics*. Vol. 37. No. 1. Pp. 91–102.
- Poe B. D., Elbel J. L., Blasingame T. A. 1994. Pressure transient behavior of a finite conductivity fracture in infinite-acting and bounded reservoirs // *SPE Annual Technical Conference and Exhibition (25–28 September 1994, New Orleans, Louisiana)*. Paper SPE-28392-MS. <https://doi.org/10.2118/28392-MS>
- Salas J. R., Clifford P. J., Jenkins D. P. 1996. Multilateral well performance prediction // *SPE Western Regional Meeting (22–24 May 1996, Anchorage, Alaska)*. Paper SPE-35711-MS. <https://doi.org/10.2118/35711-MS>
- Satter A., Iqbal Gh. M. 2016. 9 — Fundamentals of fluid flow through porous media // *Reservoir Engineering: The Fundamentals, Simulation, and Management of Conventional and Unconventional Recoveries*. Boston: Gulf Professional Publishing. Pp. 155–169. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-800219-3.00009-7>
- Stehfest H. 1970. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5] // *Communications of the ACM*. Vol. 13. No. 1. Pp. 47–49. <https://doi.org/10.1145/361953.361969>
- Stewart G. 2011. Chapter 9. Dual porosity systems // *Well Test Design and Analysis*. Tulsa: PennWell. Pp. 549–603.
- Walker A. C. 1968. Estimating reservoir pressure using the principle of superposition // *Regional Technical Symposium (27–29 March 1968, Dhahran, Saudi Arabia)*. Paper SPE-2324-MS. <https://doi.org/10.2118/2324-MS>
- Warren J. E., Root P. J. 1963. The behavior of naturally fractured reservoirs // *Society of Petroleum Engineers Journal*. Vol. 3. No. 3. Pp. 245–255. <https://doi.org/10.2118/426-PA>

## References

- Blonsky, A. V., Mitrushkin, D. A., & Savenkov, E. B. (2017). Discrete fracture network modeling: Physical and mathematical model. *Keldysh Institute Preprints*, (65). <https://doi.org/10.20948/prepr-2017-65> [In Russian]
- Maykov, D. N., Vasilyev, R. S., & Vasilyev, D. M. (2018). The technique of revealing the response during well interference test in the conditions of a high noise level of pressure and the presence of pressure trends. *Oil Industry*, (9), 98–101. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2018-9-98-101> [In Russian]

- Maikov, D. N., & Borkhovich, S. Yu. (2019). Interference test research. *Neft. Gaz. Novacii*, (2), 30–31. [In Russian]
- Maikov, D. N., & Borkhovich, S. Yu. (2020). Analytical model of multilateral well with complete vertical opening. *Neft. Gaz. Novacii*, (11), 61–65. [In Russian]
- Maykov, D. N., Isupov, S. V., Makarov, S. S., & Anikanov, A. S. (2021). The efficient method for pressure calculation at variable rate. *Oil Industry*, (9), 105–107. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2021-9-105-107> [In Russian]
- Maykov, D. N., & Makarov, S. S. (2022). Numerical investigation of optimization algorithms for the hydrodynamic model adaptation based on the well test results. *Matematicheskoe modelirovanie*, 34(9), 71–82. <https://doi.org/10.20948/mm-2022-09-05> [In Russian]
- Bourdet, D., Whittle, T. M., Douglas, A. A., & Pirard, V. M. (1983). A new set of type curves simplifies well test analysis. *World Oil*, 196, 95–106.
- Cinco-Ley, H., & Samaniego V, F. (1989, October 8–11). *Use and misuse of the superposition time function in well test analysis* [Conference paper SPE-19817-MS]. SPE Annual Technical Conference and Exhibition, San Antonio, Texas. <https://doi.org/10.2118/19817-MS>
- Earlougher, R. C., & Ramey, H. J. (1973). Interference analysis in bounded systems. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 12(4), PETSOC-73-04-04. <https://doi.org/10.2118/73-04-04>
- Fokker, P. A., Renner, J., & Verga, F. (2012, June 4–7). *Applications of harmonic pulse testing to field cases* [Conference paper SPE-154048-MS]. SPE Europec/EAGE Annual Conference, Copenhagen, Denmark. <https://doi.org/10.2118/154048-MS>
- Lee, J., Rollins, J. B., & Spivey, J. P. (2003). *Pressure transient testing*. Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2118/9781555630997>
- Mittal, R. C., & Al-Kurdi, A. (2002). LU-decomposition and numerical structure for solving large sparse nonsymmetric linear systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 43(1–2), 131–155. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(01\)00279-6](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(01)00279-6)
- Mohammed, I., Olayiwola, T. O., Alkathim, M., Awotunde, A. A., & Alafnan, S. F. (2021). A review of pressure transient analysis in reservoirs with natural fractures, vugs and/or caves. *Petroleum Science*, 18(1), 154–172. <https://doi.org/10.1007/s12182-020-00505-2>
- Nie, R.-S., Meng, Y.-F., Jia, Y.-L., Zhang, F.-X., Yang, X.-T., & Niu, X.-N. (2012). Dual porosity and dual permeability modeling of horizontal well in naturally fractured reservoir. *Transport in Porous Media*, 92(1), 213–235. <https://doi.org/10.1007/s11242-011-9898-3>
- Ozkan, E., & Raghavan, R. (1991a). New solutions for well-test-analysis problems: Part 1 — Analytical considerations. *SPE Formation Evaluation*, 6(3), 359–368. <https://doi.org/10.2118/18615-PA>
- Ozkan, E., & Raghavan, R. (1991b). New solutions for well-test-analysis problems: Part 2 — Computational considerations and applications. *SPE Formation Evaluation*, 6(3), 369–378. <https://doi.org/10.2118/18616-PA>
- Ozkan, E., Yildiz, T., & Kuchuk, F. J. (1998). Transient pressure behavior of dual-lateral wells. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 3(2), 181–190. <https://doi.org/10.2118/38670-PA>
- Permadi, A. K. (2009). Development of solution to the diffusivity equation with prescribed-pressure boundary condition and its applications to reservoirs experiencing strong water influx. *Far East Journal of Applied Mathematics*, 37(1), 91–102.

- Poe, B. D., Elbel, J. L., & Blasingame, T. A. (1994, September 25–28). *Pressure transient behavior of a finite conductivity fracture in infinite-acting and bounded reservoirs* [Conference paper SPE-28392-MS]. SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, Louisiana. <https://doi.org/10.2118/28392-MS>
- Salas, J. R., Clifford, P. J., & Jenkins, D. P. (1996, May 22–24). *Multilateral well performance prediction* [Conference paper SPE-35711-MS]. SPE Western Regional Meeting, Anchorage, Alaska. <https://doi.org/10.2118/35711-MS>
- Satter, A., & Iqbal, Gh. M. (2016). 9 — Fundamentals of fluid flow through porous media. In *Reservoir engineering: The fundamentals, simulation, and management of conventional and unconventional recoveries* (pp. 155–169). Gulf Professional Publishing. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-800219-3.00009-7>
- Stehfest, H. (1970). Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5]. *Communications of the ACM*, 13(1), 47–49. <https://doi.org/10.1145/361953.361969>
- Stewart, G. (2011). Chapter 9. Dual porosity systems. In *Well test design and analysis* (pp. 549–603). PennWell.
- Walker, A. C. (1968, March 27–29). *Estimating reservoir pressure using the principle of superposition* [Conference paper SPE-2324-MS]. Regional Technical Symposium, Dhahran, Saudi Arabia. <https://doi.org/10.2118/2324-MS>
- Warren, J. E., & Root, P. J. (1963). The behavior of naturally fractured reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 3(3), 245–255. <https://doi.org/10.2118/426-PA>

## Информация об авторах

Дмитрий Николаевич Майков, специалист отдела автоматизации, Сиама Мастер, Ижевск, Россия  
[dimaMS2@mail.ru](mailto:dimaMS2@mail.ru)

Сергей Сергеевич Макаров, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, Ижевск, Россия  
[ssmak15@mail.ru](mailto:ssmak15@mail.ru)

## Information about the authors

Dmitriy N. Maykov, Specialist, Automation Department, Siam Master, Izhevsk, Russia  
[dimaMS2@mail.ru](mailto:dimaMS2@mail.ru)

Sergey S. Makarov, Dr. Sci. (Tech.), Leading Researcher, Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Russia  
[ssmak15@mail.ru](mailto:ssmak15@mail.ru)

## Стекание капель воды с текстурированной поверхности металла

Ксения Артуровна Войткова<sup>✉</sup>, Жанна Андреевна Косторева

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия  
Контакт для переписки: [bka1801@mail.ru](mailto:bka1801@mail.ru)<sup>✉</sup>

**Аннотация.** Технологии улавливания жидкости из паровоздушной смеси в виде капель малого объема с помощью расположенных под определенным углом решеток или металлических пластин применяются во многих промышленных установках. Проведение экспериментальных исследований процессов соударения и стекания капель жидкости по поверхностям металла является актуальным для повышения эффективности сбора жидкости из паровоздушной смеси в промышленных установках. Соответственно, цель настоящей работы заключалась в анализе влияния текстуры поверхности металла на характеристики процесса растекания капель воды после их падения.

Эксперименты проводились на установке, основанной на теневой методике. Варьировались высота сброса капель жидкости и угол наклона подложки. Для оценки влияния текстуры на характеристики процесса растекания капель воды на поверхности подложек из латуни шлифовальной машиной были нанесены микроканавки. После дозирования на обработанную шлифовкой поверхность подложки капли вытягивались вдоль канавок. Левый и правый контактные углы, измеренные перпендикулярно канавкам, увеличились на 15% в сравнении с углами, измеренными на полированной поверхности подложки. Выявлено, что после пиннинга капли на наклоненной поверхности разница между левыми контактными углами, измеренными параллельно и перпендикулярно канавкам, составила более 35%.

**Ключевые слова:** капля, растекание, текстура, поверхность металла, контактный угол, угол скатывания, контактный диаметр

**Благодарности:** работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-29-00641, <https://rscf.ru/project/23-29-00641/>).


**Цитирование:** Войткова К. А., Косторева Ж. А. 2023. Стекание капель воды с текстурированной поверхности металла // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 3 (35). С. 117–131. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-117-131>

Поступила 24.03.2023; одобрена 15.08.2023; принята 06.10.2023

# Sliding of water droplets onto a textured metal surface

Kseniya A. Voytkova , Zhanna A. Kostoreva

National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia

Corresponding author: bka1801@mail.ru 

**Abstract.** Technologies for catching fluid from a steam mixture in the form of small droplets using the lattices or metal plates located at a certain angle are used in many industrial installations. Conducting experimental studies of the processes of collision and draining the drops of fluid on the surfaces of the metal is relevant for increasing the efficiency of gathering fluid from the steam-air mixture in industrial plants. Accordingly, the purpose of this work was to analyze the effect of the texture of the metal surface on the characteristics of the process of spreading water drops after their fall.

The experiments were carried out at the setup, which is based on the shadow technique. The height of liquid droplets and the angle of the substrate inclination were varied. To assess the effect of texture on the characteristics of the spreading of water drops on the surface of brass substrates, microgrooves were applied by a grinder. It was found out that after dosing, the drop stretched along the grooves. The left and right contact angles (LCAs and RCAs), measured perpendicular to the grooves, increased by 15% compared to the angles measured on the polished surface of the substrate. It was established that after pinning the drops on the tilted surface, the difference between the LCAs, measured in parallel and perpendicular to the grooves, increased by more than 35%.

**Keywords:** droplet, spreading, texture, metal surface, contact angle, roll-off angle, contact diameter

**Acknowledgements:** the research was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 23-29-00641, <https://rscf.ru/project/23-29-00641/>).

**Citation:** Voytkova, K. A., & Kostoreva, Zh. A. (2023). Sliding of water droplets onto a textured metal surface. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 117–131. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-117-131>

Received March 24, 2023; Reviewed August 15, 2023; Accepted October 6, 2023

## Введение

Технологии улавливания жидкости из паровоздушной смеси в виде капель малого объема (порядка нескольких микролитров) с помощью расположенных под определенным углом решеток или металлических пластин используются во многих промышленных установках [Ну и др., 2021; Chen и др., 2022; Ну и др., 2023], таких как скрубберы [Jingjing и др., 2013],



градирни [Shublaq, Sleiti, 2020; Nugent и др., 2022], ректификационные колонны [Duan, Li, 2022; Yu, Chien, 2023], спреевые системы охлаждения [Fu и др., 2022; Hu, Guo, 2022; Shi и др., 2022] и др. В частности, в теплоэнергетике для сбора воды из воздушно-капельной смеси используют градирни с каплеуловителями [Lucas и др., 2009; Емельяненко и др., 2019]. Жидкость стекает в специальные коллекторы и возвращается обратно в контур. С целью уменьшения валовых выбросов загрязняющих веществ в атмосферный воздух на промышленных предприятиях используются скрубберы для очистки газов. В скрубберах частички пыли смачиваются каплями жидкости и слипаются между собой с увеличением массы [Yilbas и др., 2021]. Относительно крупные капли воды с частичками улавливаются и удаляются дренажной системой [Raman и др., 2015].

Эффективность таких технологий зависит от адгезии, режимов испарения капли, скорости растекания и других характеристик взаимодействия жидкости с поверхностью металла. Исследователи отмечают, что на геометрические характеристики капель жидкости (контактный угол, контактный диаметр) и угол скатывания (угол наклона) по твердой поверхности влияют не только параметры капель (их размер) [Wang и др., 2020], но также и температура [Bernardin и др., 1997; Liang, Mudawar, 2017], шероховатость (текстура) [Bernardin и др., 1997; Cunha и др., 2013; Liang, Mudawar, 2017] и свойства смачиваемости поверхности металла [Cunha и др., 2013; Wörner и др., 2021].

Так, например, в работе [Cai и др., 2022] поверхность подложки обрабатывалась фемтосекундным лазерным излучением. После обработки на поверхности образовалась текстура в виде параллельных линий. Угол скатывания капель воды составил 17 и 27,4° в двух противоположных направлениях соответственно [Cai и др., 2022].

Кроме того, одним из влияющих факторов называют также [Bernardin и др., 1997; Liang, Mudawar, 2017] число Вебера ( $We$ ) (1):

$$We = \frac{\rho D_0 U_0^2}{\sigma}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;  $D_0$  — диаметр капли, м;  $U_0$  — скорость капли, м/с;  $\sigma$  — поверхностное натяжение жидкости, мН/м.

Отсутствие к настоящему времени полномасштабной теории, позволяющей провести прогностическое моделирование процесса взаимодействия капель жидкости с твердой поверхностью, значительно усложняет усовершенствование существующих и создание новых технологий улавливания капель различного назначения. При этом выбор наиболее эффективных технологических режимов без полного понимания физики процессов соударения и стекания капель с твердых поверхностей с различными характеристиками и без надежных прогностических моделей практически невозможен. В связи с этим целью настоящей работы являлся анализ влияния текстуры поверхности металла на характеристики процесса растекания капель воды после их падения.

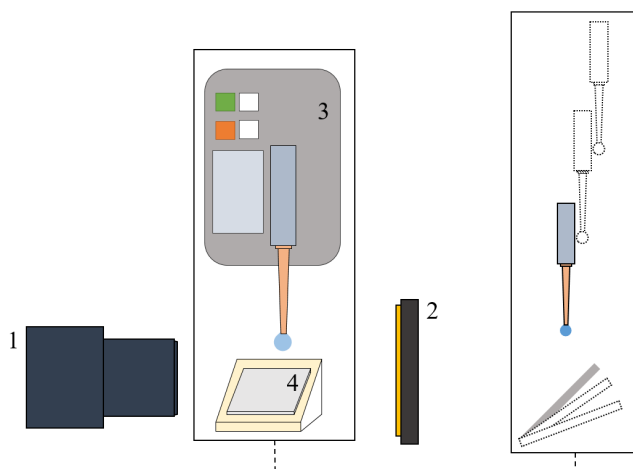
## Методы

Эксперименты проводились на установке (рис. 1), работа которой основана на теневом методе [Zaitsev и др., 2020]. Капли дистиллированной воды объемом  $5 \pm 1$  мкл выдавливались

через тонкую иглу ( $d = 0,3$  мм) с ровным срезом и сбрасывались на поверхность подложки с помощью инфузионного шприцевого насоса Mindray BeneFusion SP3 (Mindray, Китай). Расстояние между концом иглы шприца и поверхностью подложки изменялось от 20 до 200 мм. Числа Вебера ( $We$ ) варьировались от 17 до 66. Угол наклона подложки регулировался поворотным механизмом от 0 до 70°.

Процесс растекания капель воды по поверхности подложки регистрировался с помощью высокоскоростной видеокамеры Evercam 1000-4-M («Промышленная оптика», Россия) с частотой съемки 1 000 кадров в секунду и разрешением  $1\,280 \times 800$  пикселей и объектива Canon EF 200mm f/2.8L II USM (Canon, Япония). Для оценки достоверности полученных экспериментальных данных рассчитывались погрешности измерений регистрируемых физических величин. Каждый эксперимент повторялся не менее 10 раз. Погрешности измерений геометрических характеристик капель воды на поверхностях подложек не превышали 10%.

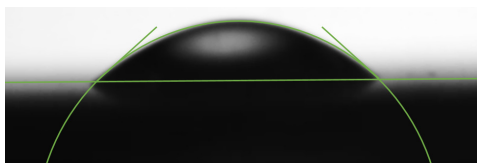
Экспериментальные исследования процесса растекания капель воды проведены на подложках из латуни марки ЛС59-1 (химический состав по [ГОСТ 15527—2004]). На поверхность подложки однонаправленными движениями ленточной шлифовальной машины были нанесены параллельные микроканавки. Шлифовальная лента представляла собой хлопчатобумажную шкурку с абразивными частицами электрокорунда (не более 28 мкм по [ГОСТ 3647—80]) на клеевой основе. Подложки после обработки очищали в ультразвуковой ванне ODA-M07 («ОДА-Сервис», Россия) для удаления частиц абразивных материалов и органических веществ с их поверхностей в течение трех минут. Использовались специальная промывочная жидкость для ультразвуковых ванн Solins FA+ и дистиллированная вода. Характеристики шероховатости были измерены с помощью профилометра Mitutoyo Surftest SJ-210 (Mitutoyo, Япония).



**Рис. 1.** Схема экспериментальной установки: 1 — видеокамера, 2 — источник света, 3 — шприцевой насос, 4 — подложка

**Fig. 1.** Scheme of the experimental setup: 1 — video camera, 2 — light source, 3 — syringe pump, 4 — substrate





**Рис. 2.** Типичное фотоизображение капли на поверхности латуни в программном комплексе Drop Shape Analysis (версия 1.92, 2009 г.)

**Fig. 2.** A typical photo image of a droplet on the brass in the Drop Shape Analysis software (version 1.92, 2009)

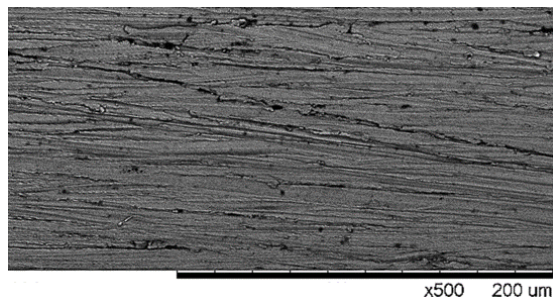
Для определения свойств смачиваемости на полированную и текстурированную поверхность подложек наносились с помощью дозатора «Ленпипет» (Thermo Fisher Scientific) капли воды объемом  $5 \pm 0,01$  мкл. Контактные углы капель воды определялись с помощью программного комплекса Drop Shape Analysis (версия 1.92, 2009 г., Krüss, Германия) методом Tangent Method-1 через 10 сек после дозирования капли (рис. 2). Систематические погрешности метода не превышали 5%. Угол скатывания капли воды регистрировался после наклона подложки с помощью поворотного механизма.

Эксперименты с каплями проведены в воздушной среде при атмосферном давлении. Температура капель воды и поверхности подложки соответствовала температуре воздуха в помещении лаборатории  $298 \pm 1$  К. Относительная влажность воздуха составляла  $35 \pm 5\%$ .

## Результаты и обсуждение

### Характеристика поверхности латуни

После обработки подложки шлифовальным инструментом на ее поверхности образовались параллельные царапины (рис. 3), глубина и ширина которых не превышали 28 мкм (в соответствии с предельным размером абразивных частиц по [ГОСТ 3647—80]). Среднее арифметическое отклонение профиля поверхности и углы скатывания представлены в таблице 1. Перпендикулярно канавкам угол скатывания не зарегистрирован. При наклоне подложки параллельно канавкам угол скатывания составил  $70^\circ$ , что соответствует углу скатывания, зарегистрированному на полированной подложке.



**Рис. 3.** Фотоизображение микроструктуры поверхности латуни

**Fig. 3.** SEM image of the brass surface

**Таблица 1.** Характеристики поверхности подложки  
**Table 1.** Surface characteristics

Поверхность подложки	ПКУ, °	ЛКУ, °	Угол скатывания, °	Ra, $\mu\text{m}$
Полированная	73,9	72,1	70	0,05
С канавками, расположенными параллельно вектору движения капли	76,2	76,1	70	0,25
С канавками, расположенными перпендикулярно вектору движения капли	84,7	84,8	—	0,31

После дозирования на обработанную шлифовкой поверхность подложки капли вытягивались вдоль канавок. Левый и правый контактные углы (ЛКУ и ПКУ), измеренные перпендикулярно канавкам, увеличились на 15% в сравнении с углами, измеренными на полированной поверхности подложки. ЛКУ и ПКУ, измеренные параллельно канавкам, увеличились менее чем на 5% (в пределах погрешности измерений).

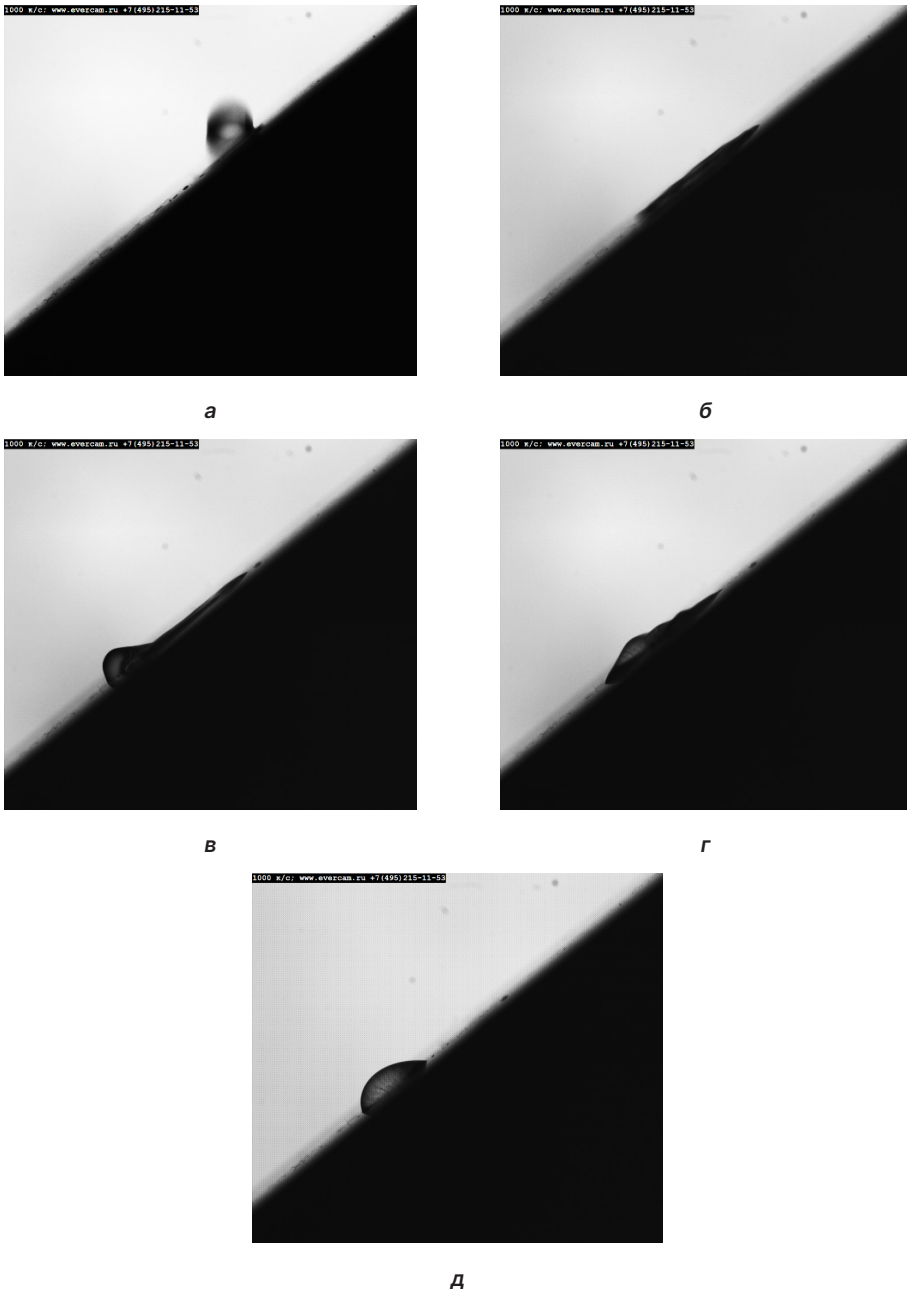
Проведено сравнение угла скатывания капель воды с поверхностями подложек с другим типом шероховатости. Для этого были выбраны результаты экспериментов, полученные на гидрофильных поверхностях подложек из двух металлов: алюминий-магниевого сплава марки АМг6 с текстурой в виде системы кратеров, образованных импульсным лазерным излучением [Kuznetsov и др., 2019], и деформируемого сплава алюминия марки АД1Н с неупорядоченной текстурой [Кошевар и др., 2019]. Установлено, что на данных поверхностях подложек углы скатывания не зарегистрированы, так же как и на поверхности латуни, перпендикулярной канавкам. Кроме того, рассмотрен процесс растекания капли воды по обработанной лазерным излучением гидрофобной поверхности подложки из меди с текстурой в виде параллельных канавок. Выявлено, что угол скатывания капель воды уменьшился с 27,4 до 17° при его измерении перпендикулярно канавкам и параллельно канавкам соответственно [Cai и др., 2022].

### Падение капель воды на наклоненные подложки из латуни

В промышленных аппаратах капли жидкости ударяются о поверхности металлических пластин и стекают под действием силы тяжести, а не наносятся на поверхность с помощью дозирующего устройства. В этом случае на взаимодействие капли с твердой поверхностью существенное влияние оказывает сила инерции. На рис. 4 представлены типичные фотоизображения капли воды, растекающейся по наклоненной на 45° поверхности латуни, в разные моменты времени ( $t$ , с).

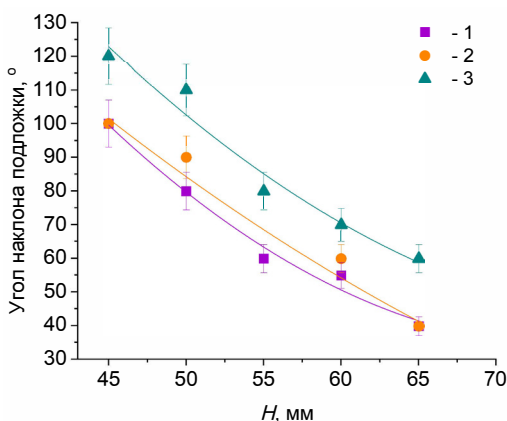
После удара о поверхность подложки жидкость растекалась, образуя пленку до максимального контактного диаметра (рис. 4б). Затем под действием силы тяжести образовывался шаровой снаряд (рис. 4в). При этом под действием силы поверхностного натяжения жидкость собиралась в каплю (рис. 4д). После уравнивания сил, действующих на каплю, регистрировался пиннинг ее контактной линии. В результате изменения расстояний, на которые смещались капли после падения на поверхность латуни, обнаружено, что ось симметрии капли смещается только на величину, равную половине максимального диаметра ее растекания.

Стеkanie капель воды с текстурированной поверхности металла



**Рис. 4.** Типичные фотоизображения капли воды, растекающейся по наклоненной поверхности латуни. Время ( $t$ , с): а — 0; б — 0,003; в — 0,013; г — 0,023; д — 0,1. Высота сброса капли 150 мм, угол наклона подложки  $45^\circ$

**Fig. 4.** Typical photo images of the water droplet on the tilted brass surface. Time ( $t$ , s): а — 0; б — 0,003; в — 0,013; г — 0,023; д — 0,1. The height of falling is 150 mm, the tilt angle of the substrate is  $45^\circ$



**Рис. 5.** Зависимости угла наклона подложки от высоты сброса жидкости, при которых зарегистрирован пиннинг капли на поверхности латуни: 1 — с канавками, расположенными перпендикулярно вектору движения капли; 2 — с канавками, расположенными параллельно вектору движения капли; 3 — полированной

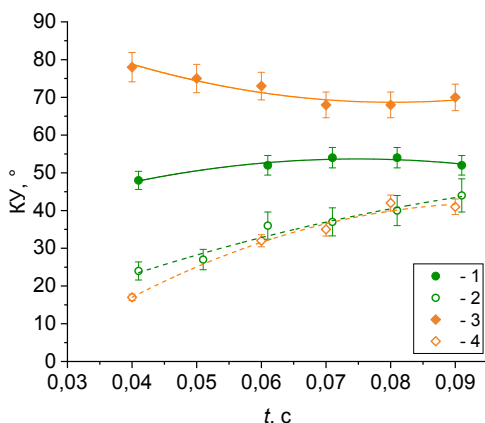
**Fig. 5.** Depending on the tilt angle of the substrate on the height of the fluid discharge in which the pinning of the drops on the surface were registered: 1 — with grooves located perpendicular to the movement vector of the drop; 2 — with grooves located parallel to the movement vector of the drop; 3 — polished

Получены зависимости угла наклона подложки от высоты сброса жидкости, при которых зарегистрирован пиннинг капли на поверхности латуни (рис. 5).

На рис. 5 показано, что обработка поверхности латуни шлифовальной машиной влияет на характеристики (угол наклона подложки и высоту сброса капли), при которых наступает пиннинг контактной линии капли после ее падения. После обработки поверхности вероятность пиннинга контактной линии капли увеличивается на 20% в сравнении с полированной поверхностью подложки. Стоит отметить, что направление канавок не влияет на углы наклона подложки и высоты сброса жидкости, при которых наступает пиннинг контактной линии капли после ее падения. Дело в том, что, в отличие от способов прецизионной обработки поверхностей металлов с образованием текстуры в форме параллельных канавок с заданными глубиной, шириной и расстоянием между соседними линиями (например, литография, 3D-печать, лазерная обработка), после механической обработки латуни шлифовальной машиной размеры канавок могли варьироваться в зависимости от соприкосновения металла с абразивными частицами. Грубые края канавок уменьшали скольжение капли даже в параллельном канавкам направлении.

### Геометрические характеристики капли воды после падения на наклоненную подложку из латуни

Результаты анализа типичных зависимостей ЛКУ и ПКУ от времени растекания капель воды по расположенным под углом  $45^\circ$  поверхностям подложек из латуни показывают (рис. 6), что направление канавок оказывает существенное влияние на ЛКУ.

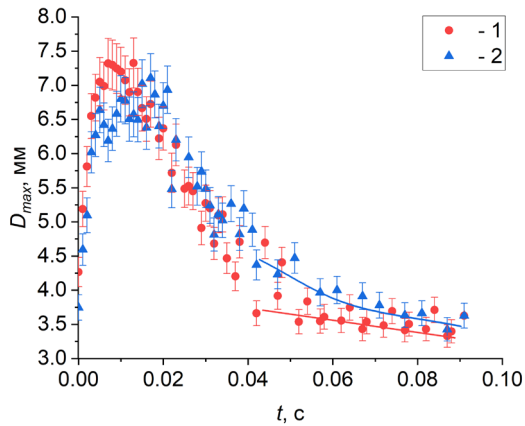


**Рис. 6.** Типичные зависимости контактных углов капли воды от времени растекания по поверхности латуни: с канавками, расположенными параллельно вектору движения капли (1 — ЛКУ, 2 — ПКУ); с канавками, расположенными перпендикулярно вектору движения капли (3 — ЛКУ, 4 — ПКУ). Высота сброса капли 150 мм, угол наклона подложки 45°

**Fig. 6.** Typical dependences of the contact angles of the drop of water from the time of spreading on the surface of the brass: with grooves located parallel to the movement vector of the drop (1 — LCA, 2 — RCA); with grooves located perpendicular to the movement vector of the drop (3 — LCA, 4 — RCA). The height of falling is 150 mm, the tilt angle of the substrate is 45°

После пиннинга капли на наклоненной поверхности разница между ЛКУ, измеренными параллельно и перпендикулярно канавкам, составила более 35%. После падения капли воды на поверхность латуни, наклоненную перпендикулярно канавкам, наличие последних препятствовало растеканию капли, но под действием силы тяжести жидкость перемещалась вниз. ЛКУ увеличивался при постоянном контактном диаметре (рис. 6, линия 2). При растекании капли в параллельном канавкам направлении ЛКУ уменьшался с увеличением контактного диаметра капли (рис. 6, линия 1), жидкость стекала по канавкам. Направление канавок не оказывало такого влияния на ПКУ (рис. 6), как в случае с ЛКУ.

По результатам анализа зависимостей контактного диаметра от времени растекания капель воды по расположенным под углом поверхностям подложек установлено (рис. 7), что направление канавок влияет на контактный диаметр капли. После падения на поверхность подложки капля растекается до максимального диаметра. Максимальный диаметр капли на поверхности подложки с перпендикулярными канавками меньше максимального диаметра капли на поверхности подложки с параллельными канавками на 7%. После достижения максимального контактного диаметра жидкость собиралась в каплю под действием силы поверхностного натяжения. Контактный диаметр, зарегистрированный после уравнивания действующих на каплю сил, на поверхности подложки с перпендикулярными канавками больше контактного диаметра капли на поверхности подложки с параллельными канавками на 5%. Канавки, направленные перпендикулярно наклону подложки, являлись барьерами при движении контактной линии капли и препятствовали собиранию капли.



**Рис. 7.** Типичные зависимости контактного диаметра капли воды от времени растекания по поверхности латуни: 1 — с канавками, расположенными параллельно вектору движения капли; 2 — с канавками, расположенными перпендикулярно вектору движения капли. Высота сброса капли 150 мм, угол наклона подложки  $45^\circ$

**Fig. 7.** Typical dependences of the contact diameter of the drop of water on the time of spreading on the surface of the brass: 1 — with grooves located parallel to the movement vector of the drop; 2 — with grooves located perpendicular to the movement vector of the drop. The height of falling is 150 mm, the tilt angle of the substrate is  $45^\circ$

## Заключение

Проведен анализ влияния текстуры поверхности металла на характеристики процесса растекания капель воды после их падения. Подложки из латуни обрабатывались односторонними движениями шлифовальной машины. После обработки подложки на ее поверхности образовались параллельные канавки, глубина и ширина которых не превышали характерного размера абразивных частиц. Проведенные исследования показали возможность изменения свойств смачиваемости латуни относительно простой механической обработкой шлифовальной машиной.

После обработки поверхности вероятность пиннинга контактной линии капли увеличивается на 20% в сравнении с полированной поверхностью подложки. Обработка латуни влияет на углы скатывания капли в направлении, перпендикулярном канавкам: капли воды не скатывались с поверхности латуни даже при наклоне подложки на  $90^\circ$ . После дозирования на обработанную шлифовкой поверхность подложки капли вытягивались вдоль канавок. ЛКУ и ПКУ, измеренные перпендикулярно канавкам, увеличились на 15% в сравнении с углами, измеренными на полированной поверхности подложки. ЛКУ и ПКУ, измеренные параллельно канавкам, увеличились менее чем на 5%.

Проведены эксперименты по исследованию растекания капли воды после падения с высоты 150 мм на наклоненную под углом  $45^\circ$  поверхность подложки. Результаты показали, что после пиннинга капли на наклоненной поверхности разница между ЛКУ, измеренными параллельно и перпендикулярно канавкам, составила более 35%.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- ГОСТ 3647—80. 2004. Материалы шлифовальные. Классификация. Зернистость и зерновой состав. Методы контроля. М.: Изд-во стандартов. 17 с.
- ГОСТ 15527—2004. 2004. Сплавы медно-цинковые (латуни), обрабатываемые давлением. Марки. М.: Изд-во стандартов. 7 с.
- Емельяненко К. А., Мельников С. Н., Прошин П. И., Домантовский А. Г., Емельяненко А. М., Бойнович Л. Б. 2019. Текстурированные материалы с экстремальным смачиванием для сбора воды из аэрозолей // Доклады Академии наук. Том 489. № 5. С. 478–482. <https://doi.org/10.31857/S0869-56524895478-482>
- Кошевар В. Д., Кажуро И. П., Шкадрцова В. Г., Письменская А. С. 2019. Смачивание изотропных микротекстур, сформированных на поверхности стекла и алюминия // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя хімічных навук. Том 55. № 3. С. 309–317. <https://doi.org/10.29235/1561-8331-2019-55-3-309-317>
- Bernardin J. D., Stebbins C. J., Mudawar I. 1997. Mapping of impact and heat transfer regimes of water drops impinging on a polished surface // International Journal of Heat and Mass Transfer. Vol. 40. No. 2. Pp. 247–267. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(96\)00119-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00119-6)
- Cai Z., Chen F., Tian Y., Zhang D., Lian Z., Cao M. 2022. Programmable droplet transport on multi-bioinspired slippery surface with tridirectionally anisotropic wettability // Chemical Engineering Journal. Vol. 449. Article 137831. <https://doi.org/10.1016/j.cej.2022.137831>
- Chen B., Zhang Y., Dai Z., Wang C., Zhang X. 2022. Experimental research on the dynamics of a train of droplets impacting, from droplets to liquid film, continuity and inheritance // Energy. Vol. 256. Article 124670. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2022.124670>
- Cunha A., Serro A. P., Oliveira V., Almeida A., Vilar R., Durrieu M.-C. 2013. Wetting behaviour of femtosecond laser textured Ti–6Al–4V surfaces // Applied Surface Science. Vol. 265. Pp. 688–696. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2012.11.085>
- Duan C., Li C. 2022. Process improvement for three-column extractive distillation by feed split // Separation and Purification Technology. Vol. 297. Article 121467. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2022.121467>
- Fu H., Zhao R., Long W., Cheng W. 2022. Study on cooling performance of rapid cooling system based on vacuum spray flash evaporation // Applied Thermal Engineering. Vol. 201. Article 117751. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2021.117751>
- Hu B., Guo J. 2022. Effect of cooling water flow on heat transfer performance of horizontal tube spray falling film evaporator in ORC system // Energy Reports. Vol. 8. Pp. 540–545. <https://doi.org/10.1016/j.egyrs.2022.10.185>
- Hu F., Lu Y., Wu F., Ming Y., Xia G., Zhang H. 2021. Breakup and collision of water droplet for mass injection pre-compression cooling // Aerospace Science and Technology. Vol. 116. Article 106866. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.106866>
- Hu P., Meng Q., Fan T., Cao L., Li Q. 2023. Dynamic response of turbine blade considering a droplet-wall interaction in wet steam region // Energy. Vol. 265. Article 126323. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2022.126323>
- Jingjing B., Linjun Y., Jinpei Y., Guilong X., Bin L., Chengyun X. 2013. Experimental study of fine particles removal in the desulfurated scrubbed flue gas // Fuel. Vol. 108. Pp. 73–79. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2010.12.037>



- Kuznetsov G. V., Feoktistov D. V., Orlova E. G., Zykov I. Y., Islamova A. G. 2019. Droplet state and mechanism of contact line movement on laser-textured aluminum alloy surfaces // *Journal of Colloid and Interface Science*. Vol. 553. Pp. 557–566. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2019.06.059>
- Liang G., Mudawar I. 2017. Review of drop impact on heated walls // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Vol. 106. Pp. 103–126. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.10.031>
- Lucas M., Martínez P. J., Viedma A. 2009. Experimental study on the thermal performance of a mechanical cooling tower with different drift eliminators // *Energy Conversion and Management*. Vol. 50. No. 3. Pp. 490–497. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2008.11.008>
- Nugent J., Lux S. M., Martin C., Stillwell A. S. 2022. A water and greenhouse gas inventory for hygroscopic building-scale cooling tower operations // *Building and Environment*. Vol. 218. Article 109086. <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2022.109086>
- Raman K. A., Jaiman R. K., Lee T. S., Low H. T. 2015. On the dynamics of crown structure in simultaneous two droplets impact onto stationary and moving liquid film // *Computers & Fluids*. Vol. 107. Pp. 285–300. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.11.007>
- Shi W., Min Y., Ma X., Chen Y., Yang H. 2022. Dynamic performance evaluation of porous indirect evaporative cooling system with intermittent spraying strategies // *Applied Energy*. Vol. 311. Article 118598. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.118598>
- Shublaq M., Sleiti A. K. 2020. Experimental analysis of water evaporation losses in cooling towers using filters // *Applied Thermal Engineering*. Vol. 175. Article 115418. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2020.115418>
- Wang Y., Yu Z., Li K., Hu J. 2020. Effects of surface properties of titanium alloys modified by grinding, sandblasting and acidizing and nanosecond laser on cell proliferation and cytoskeleton // *Applied Surface Science*. Vol. 501. Article 144279. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2019.144279>
- Wörner M., Samkhaniani N., Cai X., Wu Y., Majumdar A., Marschall H., Frohnapfel B., Deutschmann O. 2021. Spreading and rebound dynamics of sub-millimetre urea-water-solution droplets impinging on substrates of varying wettability // *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 95. Pp. 53–73. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.01.038>
- Yilbas B. S., Hassan G., Al-Qahtani H., Al-Sharafi A., Sahin A. Z. 2021. Dust mitigation by rolling water droplets from hydrophobic surfaces // *Surfaces and Interfaces*. Vol. 22. Article 100825. <https://doi.org/10.1016/j.surfin.2020.100825>
- Yu B.-Y., Chien I.-L. 2023. Novel temperature-control strategy for single column side-stream extractive distillation process with intermediate-boiling entrainer // *Separation and Purification Technology*. Vol. 310. Article 123163. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2023.123163>
- Zaitsev D. V., Batishcheva K. A., Kuznetsov G. V., Orlova E. G. 2020. Prediction of water droplet behavior on aluminum alloy surfaces modified by nanosecond laser pulses // *Surface and Coatings Technology*. Vol. 399. Article 126206. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2020.126206>

## References

- GOST 3647—80. (2004). *Abrasives. Grain sizing. Graininess and fractions. Test methods*. Standards Publishing House. [In Russian]



- GOST 15527—2004. (2004). *Pressure treated copper zinc alloys (brasses). Grades*. Standards Publishing House. [In Russian]
- Emelyanenko, K. A., Melnikov, S. N., Proshin, P. I., Domantovsky, A. G., Emelyanenko, A. M., & Boinovich, L. B. (2019). Extreme-wettability textured materials for water collection from aerosols. *Doklady Physical Chemistry*, 489(2), 169–172. <https://doi.org/10.1134/S0012501619120017>
- Koshevar, V. D., Kazhuro, I. P., Shkadretsova, V. G., & Pismenskaya, A. S. (2019). Wetting of isotropic microtextures formed on the surface of glass and aluminium. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Chemical series*, 55(3), 309–317. <https://doi.org/10.29235/1561-8331-2019-55-3-309-317> [In Russian]
- Bernardin, J. D., Stebbins, C. J., & Mudawar, I. (1997). Mapping of impact and heat transfer regimes of water drops impinging on a polished surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(2), 247–267. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(96\)00119-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00119-6)
- Cai, Z., Chen, F., Tian, Y., Zhang, D., Lian, Z., & Cao, M. (2022). Programmable droplet transport on multi-bioinspired slippery surface with tridirectionally anisotropic wettability. *Chemical Engineering Journal*, 449, Article 137831. <https://doi.org/10.1016/j.cej.2022.137831>
- Chen, B., Zhang, Y., Dai, Z., Wang, C., & Zhang, X. (2022). Experimental research on the dynamics of a train of droplets impacting, from droplets to liquid film, continuity and inheritance. *Energy*, 256, Article 124670. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2022.124670>
- Cunha, A., Serro, A. P., Oliveira, V., Almeida, A., Vilar, R., & Durrieu, M.-C. (2013). Wetting behaviour of femtosecond laser textured Ti–6Al–4V surfaces. *Applied Surface Science*, 265, 688–696. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2012.11.085>
- Duan, C., & Li, C. (2022). Process improvement for three-column extractive distillation by feed split. *Separation and Purification Technology*, 297, Article 121467. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2022.121467>
- Fu, H., Zhao, R., Long, W., & Cheng, W. (2022). Study on cooling performance of rapid cooling system based on vacuum spray flash evaporation. *Applied Thermal Engineering*, 201, Article 117751. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2021.117751>
- Hu, B., & Guo, J. (2022). Effect of cooling water flow on heat transfer performance of horizontal tube spray falling film evaporator in ORC system. *Energy Reports*, 8, 540–545. <https://doi.org/10.1016/j.egy.2022.10.185>
- Hu, F., Lu, Y., Wu, F., Ming, Y., Xia, G., & Zhang, H. (2021). Breakup and collision of water droplet for mass injection pre-compression cooling. *Aerospace Science and Technology*, 116, Article 106866. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.106866>
- Hu, P., Meng, Q., Fan, T., Cao, L., & Li, Q. (2023). Dynamic response of turbine blade considering a droplet-wall interaction in wet steam region. *Energy*, 265, Article 126323. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2022.126323>
- Jingjing, B., Linjun, Y., Jinpei, Y., Guilong, X., Bin, L., & Chengyun, X. (2013). Experimental study of fine particles removal in the desulfurated scrubbed flue gas. *Fuel*, 108, 73–79. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2010.12.037>
- Kuznetsov, G. V., Feoktistov, D. V., Orlova, E. G., Zykov, I. Y., & Islamova, A. G. (2019). Droplet state and mechanism of contact line movement on laser-textured aluminum alloy surfaces. *Journal of Colloid and Interface Science*, 553, 557–566. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2019.06.059>
- Liang, G., & Mudawar, I. (2017). Review of drop impact on heated walls. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 106, 103–126. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.10.031>

- Lucas, M., Martínez, P. J., & Viedma, A. (2009). Experimental study on the thermal performance of a mechanical cooling tower with different drift eliminators. *Energy Conversion and Management*, 50(3), 490–497. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2008.11.008>
- Nugent, J., Lux, S. M., Martin, C., & Stillwell, A. S. (2022). A water and greenhouse gas inventory for hygroscopic building-scale cooling tower operations. *Building and Environment*, 218, Article 109086. <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2022.109086>
- Raman, K. A., Jaiman, R. K., Lee, T. S., & Low, H. T. (2015). On the dynamics of crown structure in simultaneous two droplets impact onto stationary and moving liquid film. *Computers & Fluids*, 107, 285–300. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.11.007>
- Shi, W., Min, Y., Ma, X., Chen, Y., & Yang, H. (2022). Dynamic performance evaluation of porous indirect evaporative cooling system with intermittent spraying strategies. *Applied Energy*, 311, Article 118598. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.118598>
- Shublaq, M., & Sleiti, A. K. (2020). Experimental analysis of water evaporation losses in cooling towers using filters. *Applied Thermal Engineering*, 175, Article 115418. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2020.115418>
- Wang, Y., Yu, Z., Li, K., & Hu, J. (2020). Effects of surface properties of titanium alloys modified by grinding, sandblasting and acidizing and nanosecond laser on cell proliferation and cytoskeleton. *Applied Surface Science*, 501, Article 144279. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2019.144279>
- Wörner, M., Samkhaniani, N., Cai, X., Wu, Y., Majumdar, A., Marschall, H., Frohnäpfel, B., & Deutschmann, O. (2021). Spreading and rebound dynamics of sub-millimetre urea-water-solution droplets impinging on substrates of varying wettability. *Applied Mathematical Modelling*, 95, 53–73. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.01.038>
- Yilbas, B. S., Hassan, G., Al-Qahtani, H., Al-Sharafi, A., & Sahin, A. Z. (2021). Dust mitigation by rolling water droplets from hydrophobic surfaces. *Surfaces and Interfaces*, 22, Article 100825. <https://doi.org/10.1016/j.surfin.2020.100825>
- Yu, B.-Y., & Chien, I.-L. (2023). Novel temperature-control strategy for single column side-stream extractive distillation process with intermediate-boiling entrainer. *Separation and Purification Technology*, 310, Article 123163. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2023.123163>
- Zaitsev, D. V., Batishcheva, K. A., Kuznetsov, G. V., & Orlova, E. G. (2020). Prediction of water droplet behavior on aluminum alloy surfaces modified by nanosecond laser pulses. *Surface and Coatings Technology*, 399, Article 126206. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2020.126206>

## Информация об авторах

Ксения Артуровна Войткова, кандидат физико-математических наук, инженер, Научно-образовательный центр И. Н. Бутакова, Инженерная школа энергетики, Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия  
bka1801@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2810-6769>

Жанна Андреевна Косторева, кандидат технических наук, академический консультант, Научно-образовательный центр И. Н. Бутакова, Инженерная школа энергетики, Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия  
zhanna.kostoreva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0545-9211>

## Information about the authors

*Kseniya A. Voytkova*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Engineer, Butakov Research Center, School of Energy and Power Engineering, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia

bka1801@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2810-6769>

*Zhanna A. Kostoreva*, Cand. Sci. (Tech.), Academic Consultant, Butakov Research Center, School of Energy and Power Engineering, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia

zhanna.kostoreva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0545-9211>

# Применение методов нейросетевого моделирования при решении начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных

Владимир Евгеньевич Вершинин<sup>✉</sup>, Роман Юрьевич Пономарев

Тюменский нефтяной научный центр, Тюмень, Россия  
Контакт для переписки: [ve\\_ershinin2@tnnc.rosneft.ru](mailto:ve_ershinin2@tnnc.rosneft.ru)<sup>✉</sup>

**Аннотация.** Машинное обучение позволяет решать самые различные задачи анализа данных, однако его использование для решения дифференциальных уравнений появилось сравнительно недавно. Аппроксимация решения краевой задачи для дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных) при этом строится с помощью нейросетевых функций. Подбор весовых коэффициентов осуществляется в ходе обучения нейронной сети. Критериями качества обучения при этом выступают невязки по уравнению и гранично-начальным условиям. Данный подход позволяет находить вместо сеточных такие решения, которые заданы на всей области допустимых значений краевой задачи. На конкретных примерах показаны особенности применения физико-информированных нейронных сетей к решению краевых задач для дифференциальных уравнений различных типов. Методы обучения физико-информированных нейронных сетей могут быть использованы в задачах дообучения интеллектуальных управляющих систем на неполных наборах входных данных.


**Ключевые слова:** машинное обучение, физико-информированные нейронные сети, PINN, искусственная нейронная сеть

**Цитирование:** Вершинин В. Е., Пономарев Р. Ю. 2023. Применение методов нейросетевого моделирования при решении начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 3 (35). С. 132–147. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-132-147>

Поступила 25.09.2023; одобрена 28.09.2023; принята 06.10.2023

# Application of neural network modeling methods in solving initial boundary value problems for partial differential equations

Vladimir E. Vershinin , Roman Yu. Ponomarev

Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russia  
Corresponding author: ve\_vershinin2@tnnc.rosneft.ru 

**Abstract.** Machine learning allows you to solve a variety of data analysis problems, but its use for solving differential equations has appeared relatively recently. The approximation of the solution of the boundary value problem for differential equations (ordinary and partial derivatives) is constructed using neural network functions. The selection of weighting coefficients is carried out during the training of the neural network. The criteria for the quality of training in this case are inconsistencies in the equation and boundary-initial conditions. This approach makes it possible, instead of grid solutions, to find solutions defined on the entire feasible region of the boundary value problem. Specific examples show the features of the application of physics-informed neural networks to the solution of boundary value problems for differential equations of various types. Physics-informed neural networks training methods can be used in the tasks of retraining intelligent control systems on incomplete sets of input data.

**Keywords:** machine learning, physics-informed neural networks, PINN, artificial neural network

**Citation:** Vershinin, V. E., & Ponomarev, R. Yu. (2023). Application of neural network modeling methods in solving initial boundary value problems for partial differential equations. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 132–147. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-132-147>

Received September 25, 2023; Reviewed September 28, 2023; Accepted October 6, 2023

## Введение

Широко распространенным подходом при решении краевых задач для дифференциальных уравнений (ДУ) на сегодняшний момент является использование методов конечных разностей. При этом приближенное решение ищется в виде сеточной функции, заданной в узлах сетки. Измельчение шага сетки позволяет достаточно точно смоделировать физические процессы при решении большинства инженерных задач. Однако для этого требуются большие вычислительные мощности и значительное количество машинного

времени. Точность моделирования физических процессов и сходимость численных методов очень сильно зависит от качества построения сеточной области расчета, которая, в свою очередь, существенно зависит от формы области расчета.

Одним из альтернативных методов решения краевых задач и моделирования физических процессов является нейросетевое моделирование. Нейронная сеть в данном случае выполняет роль функции, преобразующей входной вектор в выходной. Обладая высокой гибкостью при параметрической настройке, искусственная нейронная сеть (ИНС) способна выступать в качестве универсального аппроксиматора искомых функций-решений [Хайкин, 2019].

Проблема аппроксимации непрерывных функций с помощью небольшого числа простейших базисных функций имеет давнюю историю. Принципиальная возможность нейросетевой аппроксимации базируется на теореме Арнольда и Колмогорова, в которой доказано, что любую непрерывную функцию переменных  $n$  можно получить с помощью операций сложения, умножения и суперпозиции из непрерывных функций одной переменной [Колмогоров, 1956]. Исследовался вопрос о классах функций, аппроксимируемых с любой степенью точности нейронными сетями разных типов [Тархов, 2014; Васильев и др., 2015; Хайкин, 2019]. В частности, на основании теоремы Стоуна показана пригодность сетей радиально-базисных функций (radial basis function networks, RBF networks) и сетей персептронного типа для решения задач аппроксимации. По сравнению с традиционными методами на основе сеток, машинное обучение представляет собой бессеточный подход к аппроксимации искомого решения. Благодаря гибкости и универсальности своего алгоритма, нейросетевое моделирование вызывает повышенный интерес исследователей при рассмотрении задач приближенного аналитического решения краевых задач для дифференциальных уравнений [Sharan и др., 1997; Lagaris и др., 1998; Коваленко и др., 2017; Raissi и др., 2017; Raissi и др., 2019; Cai и др., 2021]. Изучались также подходы и способы учета начальных и граничных условий в виде особого функционала [Galperin и др., 1993; Galperin, Zheng, 1993].

Ключевой особенностью нейросетевого подхода является процесс самообучения на точно известных значениях и данных или при выполнении заранее определенных условий, записанных в виде систем дифференциальных и алгебраических уравнений. Идея использовать при обучении ИНС уравнения, описывающие физические явления, возникла сравнительно недавно. В последнее время в различных областях физики активно исследуются подходы для корректного решения подобного рода задач [Carleo и др., 2019; Karniadakis и др., 2021; Thuerey и др., 2022]. Модели, описывающие поведение физических систем, называют физико-информированными нейронными сетями (physics-informed neural networks, PINN). Практика применения PINN показывает, что на данный момент нет единого способа аппроксимации решений краевых задач. Выбор типа сети, ее структуры и методов обучения обычно определяется видом уравнения, свойствами аппроксимируемой функции и геометрией рассматриваемой задачи. Можно выделить два наиболее распространенных подхода: 1) аппроксимацию с помощью нейронных RBF-сетей, 2) аппроксимацию с помощью ИНС персептронного типа. В задачах с гладкими функциями успешно применяются RBF-сети. Применение персептронов, как правило,



оказывается оправданным, когда в задаче присутствуют резкие переходы или если есть основания ожидать, что такие переходы присутствуют в решении. Это может происходить, например, в случае разрывных функций, задающих коэффициенты уравнений, краевые, начальные или другие условия. В работах [Kansa, 1990a, 1990b; Kansa, 1999; Rasmussen, Williams, 2005; Васильев и др., 2015] рассмотрены алгоритмы аппроксимации решений краевых задач для уравнения Лапласа на плоскости с помощью RBF-сетей. В исследовании [Зрелова, Ульянов, 2022] описываются алгоритмы применения PINN перцептронного типа при решении задач классической механики. Динамика системы при этом может описываться уравнениями Лагранжа или Гамильтона. Авторы рассматривают применение гамильтоновых нейронных сетей как способ изучения гамильтоновой динамики. Решения уравнений Гамильтона позволяют предсказывать будущее поведение системы по ее текущему состоянию в фазовом пространстве. Обучение ИНС перцептронного типа осуществляется с использованием функции ошибок (функционала), составленной на основе уравнений Гамильтона. В статье [Cai и др., 2021] исследованы подходы к решению задач теплопереноса на основе полносвязной ИНС перцептронного типа. Рассмотрены результаты аппроксимации решений двух задач теплопереноса в различных типах геометрии, а именно: 1) задачи принудительной конвекции в закрытом помещении и 2) задачи обтекания цилиндра. Начальные и граничные условия учитываются в итоговом функционале ошибки обучения. Итоговый функционал обучения состоит из трех, учитывающих выполнимость, слагаемых: 1) уравнения теплопроводности, 2) условий на границе рассчитываемой области и 3) начальных условий. Результаты аппроксимации имеют высокую сходимость с численными решениями.

В данной работе подробно рассмотрена методика применения физико-информированных нейронных сетей перцептронного типа для уравнений произвольного типа и описаны способы обучения ИНС при решении начально-краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. В работе предлагаются авторские модификации функционала обучения нейронной сети для упрощения процедуры аппроксимации решений дифференциальных уравнений параболического типа.

## Методы

### Концепция применения нейронных сетей

Нейросетевое моделирование при решении краевых задач — это нахождение приближенного аналитического решения методами машинного обучения. В концепции применения нейронных сетей искомую неизвестную функцию аппроксимируют с помощью нейросетевой функции, которая определяется архитектурой используемой ИНС, видом функции активации и значениями весовых коэффициентов, соответствующих связям между узлами ИНС. Архитектура ИНС определяет порядок и последовательность действий; весовые коэффициенты связей определяют результат суперпозиции входных значений, поступающих на обработку в нейроны; функция активации определяет результат преобразования сигнала в каждом нейроне. Итоговое аппроксимирующее

значение вычисляется в результате многократного преобразования входного вектора при последовательном нахождении взвешенных значений (линейных суперпозиций) и вычислении функций активаций нейронов. Фактически ИНС реализует сложную функцию с несколькими уровнями вложения, содержащую в себе весовые коэффициенты-параметры. Настраечные весовые коэффициенты модели подбираются в процессе обучения исходя из условия минимизации функционала, характеризующего качество аппроксимации. Таким образом, процесс обучения нейронной сети — это процесс нахождения наилучшей аппроксимации искомого решения сложной нейросетевой функцией. Как показано в работе [Васильев и др., 2015], сложная многоуровневая функция, построенная даже из простейших полиномов первого и второго порядка, способна аппроксимировать решение дифференциальных уравнений на широком интервале аргумента. Одной из простых нейросетевых моделей является модель персептрона. Нейросетевое решение для двухслойного персептрона (с одним скрытым слоем) может быть описано функцией:

$$y = W_y \cdot \text{th}(W_x \cdot x + b_x) + b_y, \quad (1)$$

где  $x$  — входной вектор данных, который подается на вход нейросети;  $\text{th}$  — тангенциальная функция активации нейронов;  $W_x(n, m)$ ,  $W_y(m, 1)$ ,  $b_x(1, m)$ ,  $b_y(1, 1)$  — матрицы настроечных коэффициентов (массивы весов модели);  $n$  — количество входных параметров модели;  $m$  — количество нейронов модели; операция « $\cdot$ » — матричное умножение.

Большинство физических законов формулируется в виде дифференциальных уравнений. Для расчета поведения физических объектов в этом случае требуется решать начально-краевые задачи. Решением начально-краевой задачи для дифференциального уравнения вида

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_m^2}\right) = 0 \quad (2)$$

является функция  $z(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , для которой при подстановке в исходное уравнение выполняется тождественное равенство правой и левой части. Кроме того, эта функция-решение должна удовлетворять граничным и начальным условиям. Тогда функцию (функционал) ошибки обучения для дифференциального уравнения (2) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \text{loss} = & F\left(x_1, x_2, \dots, x_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_m^2}\right)^2 + \\ & + \sum_{\text{НУ и ГУ}} (z_{\text{fact}} - z_{\text{calc}})^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $z_{\text{fact}}$ ,  $z_{\text{calc}}$  — заданные и вычисленные значения искомой функции в точках на граничных и начальных условиях.



Производные функции  $\partial z/\partial x_1$  могут быть найдены в явном виде через функции активации нейронов или с использованием библиотеки автоматического дифференцирования. Нахождение весовых коэффициентов осуществляется с помощью стандартных оптимизационных алгоритмов обучения нейронной сети.

## Результаты и обсуждение

### Решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Применим описанный выше подход для решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения, которая имеет аналитическое решение (4):

$$\frac{dT}{dt} = -T(t) \cdot t, \quad T(-2) = 1, \quad T(t) = e^{\frac{4-t^2}{2}}. \quad (4)$$

Аппроксимацию решения задачи (4) будем искать на промежутке  $t \in [-2; 2]$  с использованием модели двухслойного персептрона. Количество нейронов на промежуточном слое (гиперпараметр, подбираемый эмпирически) равно 20. Для обучения ИНС будем использовать равноотстоящие точки, делящие отрезок  $[-2; 2]$  на равные части. Рассмотрим два случая: 1) обучение на 100 точках и 2) обучение на разреженном множестве из 50 точек. Функция ошибки обучения запишется в виде:

$$L = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dT}{dt} + T(t) \right)^2 + (T_{t=0 \text{ fact}} - T_{t=0 \text{ calc}})^2 \rightarrow 0. \quad (5)$$

Аппроксимация исходной функции  $T(t)$  осуществляется с помощью модели многослойного персептрона с одним промежуточным слоем:

$$T(t) = W_y \cdot \text{th}(W_x \cdot (t) + b_x) + b_y. \quad (6)$$

Производная функции  $T(t)$  запишется в виде:

$$\frac{dT}{dt} = W_y \cdot \text{th}'(W_x \cdot (t) + b_x) \cdot W_x. \quad (7)$$

Тогда, подставив выражение (7) в функционал обучения (5), получим:

$$L = \sum_{i=1}^n \left( W_y \cdot \text{th}'(W_x \cdot (t) + b_x) \cdot W_x + (W_y \cdot \text{th}(W_x \cdot (t) + b_x) + b_y) \cdot t \right)^2 + (T_{t=0 \text{ fact}} - (W_y \cdot \text{th}(W_x \cdot (t) + b_x) + b_y)_{t=0 \text{ calc}})^2 \rightarrow 0. \quad (8)$$

Поиск оптимальных весовых коэффициентов для минимизации функционала (8) производился с помощью итерационного численного оптимизационного алгоритма — модифицированного градиентного спуска Adam. Правило обновления весов алгоритма Adam представлено выражением (9) [Kingma, Ba, 2015; Хайкин, 2019]:

$$W_x(t + 1) = W_x(t) - l_{step} \cdot \frac{\widehat{m}_t}{\sqrt{\widehat{v}_t + \epsilon}}, \quad (9)$$

где

$$\widehat{m}_t = \frac{m_t}{1 - \beta_1^t}, \quad \widehat{v}_t = \frac{v_t}{1 - \beta_2^t}, \quad m_t = \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1 - \beta_1) \cdot \frac{\partial L}{\partial W_x},$$

$$v_t = \beta_2 \cdot v_{t-1} + (1 - \beta_2) \cdot \frac{\partial L^2}{\partial W_x}.$$

Adam является популярным алгоритмом в области глубокого обучения. Практика показывает, что Adam выгодно отличается от других методов стохастической оптимизации за счет реализации в себе двух возможностей: 1) накопления движения градиентов в ходе обучения и 2) более слабого обновления весов для типичных признаков.

Для расчета алгоритма оптимизации Adam требуется найти производные функции  $\partial L / \partial W_x, \partial L / \partial W_y, \partial L / \partial b_x, \partial L / \partial b_y$ . Данные производные можем определить в явном виде, дифференцируя функционал (8):

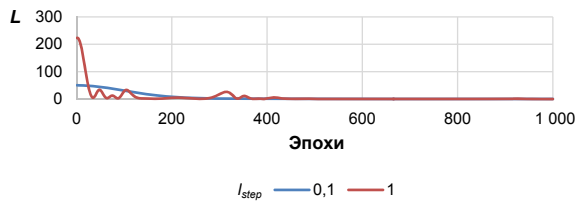
$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial W_y} = & \sum 2 \cdot (\text{th}'(W_x \cdot (t) + b_x) \cdot W_x + (\text{th}(W_x \cdot (t) + b_x) + b_y) \cdot t) - \\ & - 2 \cdot (T_{t=0 \text{ fact}} - (W_y \cdot \text{th}(W_x \cdot (t) + b_x) + b_y)_{t=0 \text{ calc}}) \times \\ & \times \text{th}(W_x \cdot (x, t) + b_x), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial W_x} = & \sum 2 \cdot (W_y \cdot \text{th}'(W_x \cdot (t) + b_x) + W_y \cdot \text{th}''(W_x \cdot (t) + b_x) \cdot W_x \cdot x) - \\ & - 2 \cdot (T_{t=0 \text{ fact}} - (W_y \cdot \text{th}(W_x \cdot (t) + b_x) + b_y)_{t=0 \text{ calc}}) \times \\ & \times W_y \cdot \text{th}'(W_x \cdot (t) + b_x) \cdot x, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial b_x} = & \sum 2 \cdot (W_y \cdot \text{th}''(W_x \cdot (t) + b_x) \cdot W_x) - \\ & - 2 \cdot (T_{t=0 \text{ fact}} - (W_y \cdot \text{th}(W_x \cdot (t) + b_x) + b_y)_{t=0 \text{ calc}}) \times \\ & \times W_y \cdot \text{th}'(W_x \cdot (t) + b_x), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_y} = \sum -2 \cdot (T_{t=0 \text{ fact}} - (W_y \cdot \text{th}(W_x \cdot (t) + b_x) + b_y)_{t=0 \text{ calc}}). \quad (13)$$

Обучение проводилось с длительностью 1 000 эпох (итераций). Важным параметром алгоритма оптимизации Adam является шаг обновления весовых коэффициентов. График поведения функции ошибок  $L$  при двух разных значениях параметра  $l_{step}$  (шаг оптимизационного алгоритма) представлен на рис. 1.

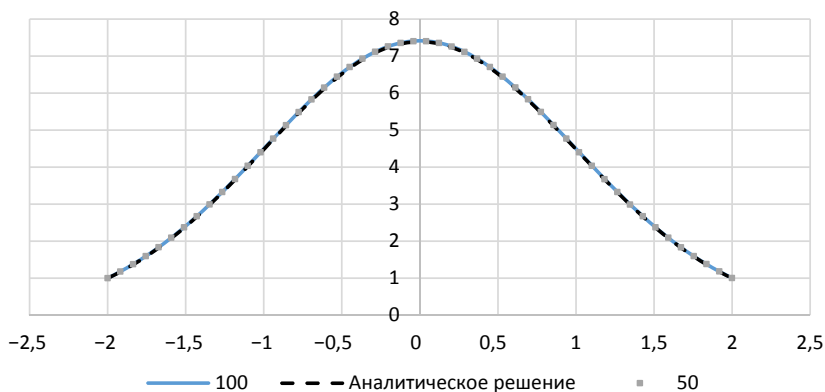


**Рис. 1.** Поведение функции ошибок  $L$  при разных шагах обучения  $l_{step}$  при аппроксимации решения задачи Коши (4) для обыкновенного дифференциального уравнения

**Fig. 1.** The behavior of the error function  $L$  at different learning steps  $l_{step}$  when approximating the solution of the Cauchy problem (4) for an ordinary differential equation

Можно заметить, что при большом шаге оптимизатора ( $l_{step} = 1$ ) поиск решения становится менее стабильным на ранних этапах обучения, но тем не менее сходится к значению, близкому к нулю.

Сопоставление точного аналитического решения и решений, полученных с помощью нейросетевой аппроксимации, представлено на рис. 2.



**Рис. 2.** Графики аналитического и нейросетевых решений (полученных при обучении на 100 и 50 точках) задачи Коши (4) для обыкновенного дифференциального уравнения

**Fig. 2.** Graphs of analytical and neural network solutions (obtained by training at 100 and 50 points) of the Cauchy problem (4) for an ordinary differential equation

Численные значения аппроксимации совпадают с точностью до 0,3%, что говорит о высоком качестве аппроксимации аналитической функции методом ИНС. Также стоит отметить совпадение качества полученной аппроксимации как на редкой сетке точек (50 точек), так и на уплотненной сетке (100 точек). То есть можно предположить, что при использовании нейросетевого моделирования удастся получить достаточно точную аппроксимацию решения без чрезмерного измельчения области допустимых значений (ОДЗ).

### Решение начально-краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа

Рассмотрим более сложную задачу — решение начально-краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (14)$$

где  $a = 1 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $x \in [0; 100]$ ,  $t \in [0; 100]$ .

Начальные и граничные условия с разрывом имеют вид:

$$T_{t=0} = 1, \quad T_{x=0} = 0, \quad T_{x=100} = 1. \quad (15)$$

Алгоритм поиска аппроксимации принципиально не отличается от приведенного выше алгоритма решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения. Отличия проявятся в более сложной форме функционала обучения и, как следствие, более сложном и ресурсоемком процессе обучения нейронной сети.

Рассмотрим аппроксимацию исходной функции  $T(x, t)$  с помощью модели многослойного персептрона с одним промежуточным слоем:

$$T(x, t) = W_y \cdot \text{th}(W_x \cdot (x, t) + b_x) + b_y. \quad (16)$$

Тогда частные производные определяются следующими выражениями:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = W_y \cdot \text{th}'(W_x \cdot (x, t) + b_x) \cdot W_x(2), \quad (17)$$

где (2) — номер строчки матрицы весовых коэффициентов  $W_x$  при координате  $t$ ;

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = W_y \cdot \text{th}''(W_x \cdot (x, t) + b_x) \cdot W_x^2(1), \quad (18)$$

где (1) — номер строчки матрицы весовых коэффициентов  $W_x$  при координате  $x$ .

Подставим выражения (17) и (18) в исходное уравнение (14). Запишем целевой функционал ошибки обучения для аппроксимации уравнения (14):

$$W_y \cdot \text{th}'(W_x \cdot (x, t) + b_x) \cdot W_x(2) - a \cdot W_y \cdot \text{th}''(W_x \cdot (x, t) + b_x) \cdot W_x^2(1) \rightarrow 0. \quad (19)$$

Упростим данное выражение: несложно заметить, что выражение можно сократить на матрицу весовых коэффициентов  $W_y$ . Производные гиперболического тангенса также можно представить в виде выражений:

$$\text{th}'(x) = (1 - \text{th}^2(x)), \quad (20)$$

$$\text{th}''(x) = 2 \cdot (\text{th}^2(x) - 1) \cdot \text{th}(x). \quad (21)$$

С учетом выражений (20) и (21) выражение (19) после сокращения на  $W_y$  примет вид:

$$\begin{aligned} & (1 - \text{th}^2 (W_x \cdot (x, t) + b_x)) \cdot W_x(2) - \\ & - a \cdot 2 \cdot (\text{th}^2 (W_x \cdot (x, t) + b_x) - 1) \times \\ & \times \text{th} (W_x \cdot (x, t) + b_x) \cdot W_x^2(1) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Сократив (22) на выражение  $(1 - \text{th}^2 (W_x \cdot (x, t) + b_x))$ , получим упрощенный функционал обучения для аппроксимации решения дифференциального уравнения:

$$W_x(2) + a \cdot 2 \cdot \text{th} (W_x \cdot (x, t) + b_x) \cdot W_x^2(1) \rightarrow 0. \quad (23)$$

Анализируя выражение (23), можно сделать вывод, что для улучшения точности аппроксимации решения задачи (14) нужно изменять только весовые коэффициенты  $W_x$  первого слоя нейронной сети, т. е. коэффициенты при входном векторе. Коэффициенты второго слоя не влияют на функционал обучения (23), но они используются для настройки итоговой аппроксимации на граничные и начальные условия.

Итоговый функционал обучения (с учетом краевой задачи) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n W_x(2) + a \cdot 2 \cdot \text{th} (W_x \cdot (x, t) + b_x) \cdot W_x^2(1) + \\ & + \sum_x (T(x, 0) - T(x, t))^2 + (T(0, t) - T(x, t))^2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Поиск оптимальных весовых коэффициентов производился с помощью оптимизационного алгоритма Adam, описанного выше. Производные  $L$ -функции  $\partial L / \partial W_x$ ,  $\partial L / \partial W_y$ ,  $\partial L / \partial b_x$ ,  $\partial L / \partial b_y$  определены через упрощенный функционал (24).

Как было показано ранее, коэффициенты второго слоя нейронной сети не влияют на сходимость к решению дифференциального уравнения. Следовательно, производные данных весов будут рассчитываться только для второго слагаемого, описывающего сходимость к начальным и граничным условиям:

$$\frac{\partial L}{\partial W_y} = \sum -2 \cdot (T_{fact} - T(x, t)) \cdot \text{th} (W_x \cdot (x, t) + b_x), \quad (25)$$

$$\frac{\partial loss}{\partial b_y} = \sum -2 \cdot (T_{fact} - T(x, t)). \quad (26)$$

Производные первого слоя нейронной сети зависят от двух слагаемых функционала (24). Следовательно, итоговую производную можно разбить на две составляющие.

1. Производные от функционала дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial L}{\partial W_x(2)} = \sum 2 \cdot loss' \cdot (1 + 2 \cdot a \cdot W_x^2(1) \cdot \text{th}' (W_x \cdot (x, t) + b_x) \cdot t), \quad (27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial W_x(1)} = \sum 2 \cdot \text{loss}' \cdot \left( 2 \cdot a \cdot W_x^2(1) \cdot \text{th}''(W_x \cdot (x, t) + b_x) \cdot x + \right), \quad (28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_x} = \sum 2 \cdot \text{loss}' \cdot (2 \cdot a \cdot W_x^2(1) \cdot \text{th}''(W_x \cdot (x, t) + b_x)). \quad (29)$$

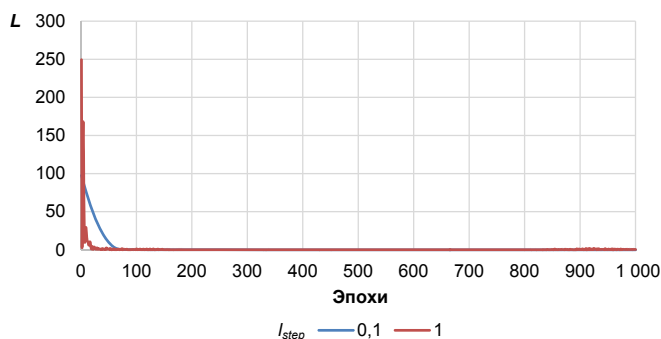
2. Производные от функционала начальных и граничных условий:

$$\frac{\partial L}{\partial W_x} = \sum -2 \cdot (T_{fact} - T(x, t)) \cdot W_y \cdot \text{th}'(W_x \cdot (x, t) + b_x) \cdot (x, t), \quad (30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_x} = \sum -2 \cdot (T_{fact} - T(x, t)) \cdot W_y \cdot \text{th}'(W_x \cdot (x, t) + b_x). \quad (31)$$

Для расчета итогового градиента обновления весов  $W_x$  нужно построчно просуммировать элементы, определенные выражениями (30), (28) и (27). Аналогично для весов  $b_x$  нужно просуммировать выражения (31) и (29).

Обучение нейронной сети проводилось на разреженной сетке  $20 \times 20$  в координатах  $(x, t)$ . График поведения  $L$ -функции при различных шагах обучения приведен на рис. 3.



**Рис. 3.** Поведение функции ошибок  $L$  при разных шагах обучения  $l_{step}$  при аппроксимации решения начально-краевой параболического дифференциального уравнения

**Fig. 3.** Behavior of the error function  $L$  at different learning steps  $l_{step}$  when approximating the solution of the initial-boundary parabolic differential equation

При анализе графиков поведения  $L$ -функции (рис. 3) можно заметить, что стабильный минимум достигается примерно на 40 эпох быстрее при  $l_{step} = 1$ , чем при  $l_{step} = 0,1$ .

Для оценки качества аппроксимации нейросетевой модели было найдено численное решение задачи (5)–(6) конечно-разностным методом по неявной схеме с применением метода Якоби для решения получившейся системы линейных уравнений. Сетка поиска сеточного решения имела 100 равноотстоящих слоев по координате  $x$  и 100 слоев по времени  $t$ . Обучение нейронной сети производилось на разреженной сетке  $20 \times 20$ . Сопоставление полученных решений в различные моменты времени в узлах обучающей сетки  $20 \times 20$  представлено на рис. 4.

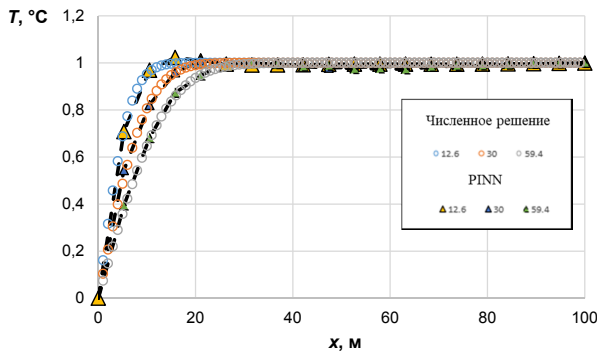


Рис. 4. Сравнение численного и нейросетевого решений уравнения теплопроводности в различные моменты времени  $t$  (12,6, 30 и 60 с)

Fig. 4. Comparison of numerical and neural network solutions of the thermal conductivity equation at different time points  $t$  (12.6, 30 and 60 s)

Также были построены поверхности решений (рис. 5). Для этого в обученную нейронную сеть были поданы координаты точек по уплотненной сетке  $100 \times 100$  и рассчитаны значения температуры  $T$  в узлах новой сетки без переобучения модели.

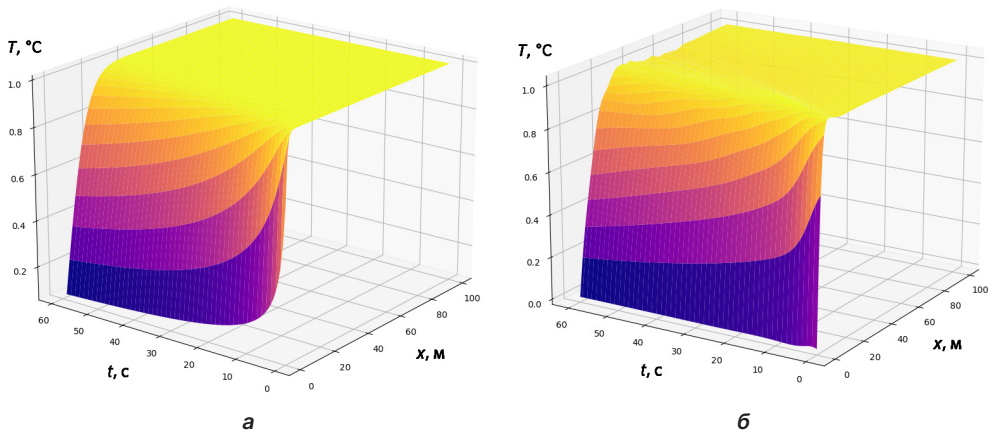
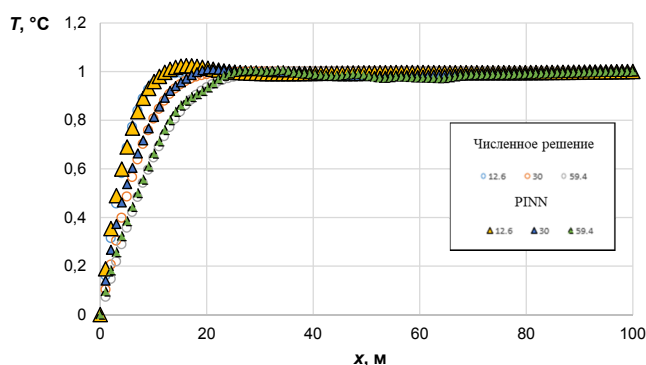


Рис. 5. Сравнение численного (а) и нейросетевого (б) решений уравнения теплопроводности в различные моменты времени  $t$

Fig. 5. Comparison of numerical (а) and neural network (б) solutions of the thermal conductivity equation at different time points  $t$

Сравнение решений, найденных конечно-разностным методом и с использованием обученной ИНС в точках уплотненной сетки, не участвовавших в обучении, в различные моменты времени, представлено на рис. 6.

В среднем рассчитанные значения на уплотненной сетке отличаются не более чем на 1,7 %, что также свидетельствует о высоком качестве аппроксимации исходного решения методом ИНС с применением разреженной сетки точек обучения.



**Рис. 6.** Сравнение решений, найденных конечнo-разностным методом и с использованием обученной ИНС в точках уплотненной сетки в различные моменты времени  $t$  (12,6, 30 и 60 с)

**Fig. 6.** Comparison of solutions found by the finite-difference method and using the trained INS at points of the compacted grid at different time points  $t$  (12.6, 30 and 60 s)

## Заключение

1. Нейросетевое моделирование на основе ИНС персептронного типа с одним скрытым слоем позволяет получать аналитическую аппроксимацию решения начально-краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных параболического типа, в том числе с разрывом на границе.
2. Обучение на разреженной сетке точек показало высокую точность аппроксимации решения рассмотренных краевых задач, что позволяет минимизировать затраты машинного времени на процесс обучения.
3. Рассмотренный подход может быть использован для решения задач с произвольными начальными и граничными условиями. Усложнение формы ОДЗ и вида граничных условий может потребовать использования более сложной архитектуры ИНС.
4. Использование нейросетевого подхода при решении краевых задач для дифференциальных уравнений позволяет расширить класс численно решаемых задач, включив в него задачи поиска решений уравнений с условиями, определенными как на внешней границе, так и в отдельных точках ОДЗ. Этот подход позволит решать задачи адаптации параметрических математических моделей на фактические показатели.

## Список источников

- Васильев А. Н., Тархов Д. А., Шемякина Т. А. 2015. Нейросетевой подход к задачам математической физики. СПб.: Нестор-История. 260 с.
- Зрелова Д. П., Ульянов С. В. 2022. Модели физически информированных / осведомленных классических Лагранжевых / Гамильтоновых нейронных сетей в глубоком обучении //



- Современные информационные технологии и ИТ-образование. Том 18. № 2. С. 310–325. <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325>
- Коваленко А. Н., Черноморец А. А., Петина М. А. 2017. О применении нейронных сетей для решения дифференциальных уравнений в частных производных // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. № 9 (258). С. 103–110.
- Колмогоров А. Н. 1956. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Доклады АН СССР. Том 108. № 2. С. 179–182.
- Тархов Д. А. 2014. Нейросетевые модели и алгоритмы. М.: Радиотехника. 348 с.
- Хайкин С. 2019. Нейронные сети. М.; СПб.: Диалектика. 1103 с.
- Cai S., Wang Z., Wang S., Perdikaris P., Karniadakis G. E. 2021. Physics-informed neural networks for heat transfer problems // Journal of Heat Transfer. Vol. 143. No. 6. Article 060801. <https://doi.org/10.1115/1.4050542>
- Carleo G., Cirac I., Cranmer K., Daudet L., Schuld M., Tishby N., Vogt-Maranto L., Zdeborová L. 2019. Machine learning and the physical sciences // Reviews of Modern Physics. Vol. 91. No. 4. Article 045002. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.91.045002>
- Galperin E. A., Pan Z., Zheng Q. 1993. Application of global optimization to implicit solution of partial differential equations // Computers & Mathematics with Applications. Vol. 25. No. 10–11. Pp. 119–124. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(93\)90287-6](https://doi.org/10.1016/0898-1221(93)90287-6)
- Galperin E. A., Zheng Q. 1993. Solution and control of PDE via global optimization methods // Computers & Mathematics with Applications. Vol. 25. No. 10–11. Pp. 103–118. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(93\)90286-5](https://doi.org/10.1016/0898-1221(93)90286-5)
- Kansa E. J. 1990a. Multiquadrics — A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics — I surface approximations and partial derivative estimates // Computers & Mathematics with Applications. Vol. 19. No. 8. Pp. 127–145. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90270-T](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90270-T)
- Kansa E. J. 1990b. Multiquadrics — A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics — II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations // Computers & Mathematics with Applications. Vol. 19. No. 8. Pp. 147–161. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90271-K](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90271-K)
- Kansa E. J. 1999. Motivation for using radial basis functions to solve PDEs. Lawrence Livermore National Laboratory; Embry-Riddle Aeronautical University.
- Karniadakis G. E., Kevrekidis I. G., Lu L., Perdikaris P., Wang S., Yang L. 2021. Physics-informed machine learning // Nature Reviews Physics. Vol. 3. No. 6. Pp. 422–440. <https://doi.org/10.1038/s42254-021-00314-5>
- Kingma D. P., Ba J. 2015. Adam: A method for stochastic optimization // The 3<sup>rd</sup> International Conference for Learning Representations (7–9 May 2015, San Diego, CA, USA). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980>
- Lagaris I. E., Likas A., Fotiadis D. I. 1998. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations // IEEE Transactions on Neural Networks. Vol. 9. No. 5. Pp. 987–1000. <https://doi.org/10.1109/72.712178>
- Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. 2017. Machine learning of linear differential equations using Gaussian processes // Journal of Computational Physics. Vol. 348. Pp. 683–693. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.07.050>

- Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. 2019. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // *Journal of Computational Physics*. Vol. 378. Pp. 686–707. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
- Rasmussen C. E., Williams C. K. I. 2005. *Gaussian Processes for Machine Learning*. The MIT Press. <https://doi.org/10.7551/mitpress/3206.001.0001>
- Sharan M., Kansa E. J., Gupta S. 1997. Application of the multiquadric method for numerical solution of elliptic partial differential equations // *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 84. No. 2. Pp. 275–302. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(96\)00109-9](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(96)00109-9)
- Thuerey N., Holl Ph., Mueller M., Schnell P., Trost F., Um K. 2022. Physics-based Deep Learning. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.05237>

## References

- Vasiliev, A. N., Tarhov, D. A., & Shemyakina, T. A. (2015). *Neural network approach to problems of mathematical physics*. Nestor-History. [In Russian]
- Zrelova, D. P., & Ulyanov, S. V. (2022). Physics-informed classical Lagrange / Hamilton neural networks in deep learning. *Modern Information Technologies and IT-Education*, 18(2), 310–325. <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325> [In Russian]
- Kovalenko, A. N., Chernomorets, A. A., & Petina, M. A. (2017). On the neural networks application for solving of partial differential equations. *Scientific Bulletin of Belgorod State University. Series: Economics. Informatics*, (9), 103–110. [In Russian]
- Kolmogorov, A. N. (1956). On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of a smaller number of variables. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 108(2), 179–182. [In Russian]
- Tarhov, D. A. (2014). *Neural network models and algorithms*. Radiotekhnika. [In Russian]
- Haykin, S. (2019). *Neural networks*. Dialektika. [In Russian]
- Cai, S., Wang, Z., Wang, S., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2021). Physics-informed neural networks for heat transfer problems. *Journal of Heat Transfer*, 143(6), Article 060801. <https://doi.org/10.1115/1.4050542>
- Carleo, G., Cirac, I., Cranmer, K., Daudet, L., Schuld, M., Tishby, N., Vogt-Maranto, L., & Zdeborová, L. (2019). Machine learning and the physical sciences. *Reviews of Modern Physics*, 91(4), Article 045002. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.91.045002>
- Galperin, E. A., Pan, Z., & Zheng, Q. (1993). Application of global optimization to implicit solution of partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 25(10–11), 119–124. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(93\)90287-6](https://doi.org/10.1016/0898-1221(93)90287-6)
- Galperin, E. A., & Zheng, Q. (1993). Solution and control of PDE via global optimization methods. *Computers & Mathematics with Applications*, 25(10–11), 103–118. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(93\)90286-5](https://doi.org/10.1016/0898-1221(93)90286-5)
- Kansa, E. J. (1990a). Multiquadrics — A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics — I surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & Mathematics with Applications*, 19(8), 127–145. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90270-T](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90270-T)
- Kansa, E. J. (1990b). Multiquadrics — A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics — II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial

- differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 19(8), 147–161. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90271-K](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90271-K)
- Kansa, E. J. (1999). *Motivation for using radial basis functions to solve PDEs*. Lawrence Livermore National Laboratory; Embry-Riddle Aeronautical University.
- Karniadakis, G. E., Kevrekidis, I. G., Lu, L., Perdikaris, P., Wang, S., & Yang, L. (2021). Physics-informed machine learning. *Nature Reviews Physics*, 3(6), 422–440. <https://doi.org/10.1038/s42254-021-00314-5>
- Kingma, D. P., & Ba, J. (2015, May 7–9). *Adam: A method for stochastic optimization* [Conference paper]. The 3<sup>rd</sup> International Conference for Learning Representations, San Diego, CA, USA. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980>
- Lagaris, I. E., Likas, A., & Fotiadis, D. I. (1998). Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9(5), 987–1000. <https://doi.org/10.1109/72.712178>
- Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2017). Machine learning of linear differential equations using Gaussian processes. *Journal of Computational Physics*, 348, 683–693. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.07.050>
- Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686–707. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
- Rasmussen, C. E., & Williams, C. K. I. (2005). *Gaussian processes for machine learning*. The MIT Press. <https://doi.org/10.7551/mitpress/3206.001.0001>
- Sharan, M., Kansa, E. J., & Gupta, S. (1997). Application of the multiquadric method for numerical solution of elliptic partial differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 84(2), 275–302. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(96\)00109-9](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(96)00109-9)
- Thuerey, N., Holl, Ph., Mueller, M., Schnell, P., Trost, F., & Um, K. (2022). *Physics-based deep learning*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.05237>

## Информация об авторах

*Владимир Евгеньевич Вершинин*, главный специалист, Тюменский нефтяной научный центр, Тюмень, Россия  
[ve\\_vershinin2@tnnc.rosneft.ru](mailto:ve_vershinin2@tnnc.rosneft.ru)

*Роман Юрьевич Пономарев*, главный специалист, Тюменский нефтяной научный центр, Тюмень, Россия  
[ryponomarev@tnnc.rosneft.ru](mailto:ryponomarev@tnnc.rosneft.ru)

## Information about the authors

*Vladimir E. Vershinin*, Chief Specialist, Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russia  
[ve\\_vershinin2@tnnc.rosneft.ru](mailto:ve_vershinin2@tnnc.rosneft.ru)

*Roman Yu. Ponomarev*, Chief Specialist, Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russia  
[ryponomarev@tnnc.rosneft.ru](mailto:ryponomarev@tnnc.rosneft.ru)

## К вопросу о закономерностях в трансформации параметров относительной фазовой проницаемости при изменении размерности модели нефтяного пласта

Александр Дмитриевич Бекман<sup>1</sup>, Сергей Викторович Степанов<sup>1,2</sup>✉,  
Дмитрий Валерьевич Зеленин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Тюменский нефтяной научный центр, Тюмень, Россия

<sup>2</sup> Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

Контакт для переписки: svstepanov@tnnc.rosneft.ru ✉

**Аннотация.** В статье приводятся результаты исследований по поиску закономерностей в трансформации параметров функции относительной фазовой проницаемости при изменении размерности математической модели на примере двух синтетических моделей (однослойная латеральная 2D-модель и 0D-модель материального баланса CRM) нефтяной залежи, расположенной в неоднородном пласте и разрабатываемой при заводнении. Установлено, что трансформация параметров относительной фазовой проницаемости связана с фильтрационными свойствами и упругоёмкостью пласта, а также со спецификой работы скважин. При этом для трех из пяти параметров сохраняется зависимость от проницаемости, но в иной форме, а для оставшихся двух параметров зависимость теряется. Качество аппроксимации зависимостей практически не зависит от объемов рассмотренных выборок данных. Полученные результаты направлены на совершенствование технологии моделирования разработки месторождений углеводородов, особенно в части иерархического моделирования.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, модель материального баланса, CRM, разработка месторождений, относительная фазовая проницаемость

**Цитирование:** Бекман А. Д., Степанов С. В., Зеленин Д. В. 2023. К вопросу о закономерностях в трансформации параметров относительной фазовой проницаемости при изменении размерности модели нефтяного пласта // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 3 (35). С. 148–160. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-148-160>

Поступила 20.09.2023; одобрена 01.10.2023; принята 06.10.2023

# On the question of the regularities in the transformation of the parameters of the relative phase permeability with a change in the dimension of the oil reservoir model

Alexander D. Bekman<sup>1</sup>, Sergei V. Stepanov<sup>1,2</sup>✉, Dmitry V. Zelenin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russia

<sup>2</sup> University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: svstepanov@tnnc.rosneft.ru✉

**Abstract.** The article presents the results of research on the search for patterns in the transformation of the parameters of the relative phase permeability function when the dimension of the mathematical model changes using the example of two synthetic models (a single-layer lateral 2D model and a 0D model of the CRM material balance) of an oil deposit located in an inhomogeneous reservoir and developed during flooding. It is established that the transformation of the parameters of the relative phase permeability is associated with the filtration properties and elastic capacity of the formation, as well as with the specifics of well operation. At the same time, for three of the five parameters, the dependence on permeability remains, but in a different form, and for the remaining two parameters, the dependence is lost. The quality of the approximation of dependencies practically does not depend on the volume of the data samples considered. The results obtained are aimed at improving the technology of modeling the development of hydrocarbon deposits, especially in terms of hierarchical modeling.

**Keywords:** mathematical modeling, material balance model, CRM, field development, relative phase permeability

**Citation:** Bekman, A. D., Stepanov, S. V., & Zelenin, D. V. (2023). On the question of the regularities in the transformation of the parameters of the relative phase permeability with a change in the dimension of the oil reservoir model. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 148–160. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-148-160>

Received September 20, 2023; Reviewed October 1, 2023; Accepted October 6, 2023

## Введение

Решение задач, возникающих по ходу проектирования и сопровождения разработки месторождений углеводородного сырья (включая нефтяные месторождения), с начала 2000-х гг., как правило, ведется с использованием гидродинамического моделирования,

т. е. посредством численного решения уравнений фильтрации применительно к 3D-модели природных пластов. Несмотря на универсальность, а именно способность учитывать массу факторов естественного и техногенного происхождения об объекте и процессах моделирования, такие гидродинамические модели (ГДМ) неэкономичны, поскольку требуют значительных ресурсов на создание и проведение расчетов.

Опыт гидродинамического моделирования, например для обоснования вариантов разработки или планирования геолого-технологических мероприятий на скважинах, показывает, что эффективность использования (практическая полезность) получаемых моделей невысока по причине колоссальной неопределенности объекта моделирования. Очевидно, что фактор неопределенности делает нецелесообразным детерминированный подход к 3D-моделированию разработки месторождений, однако реализация стохастического 3D-моделирования фактически невозможна в силу неэкономичности ГДМ. Поэтому существует необходимость в создании и применении новых подходов к моделированию разработки, которые позволили бы оценивать неопределенности и, кроме того, давать возможность для вероятностного моделирования при прогнозировании разработки. Другими словами, новые подходы должны позволять проводить расчеты на достаточном количестве реализаций модели пласта при достаточном количестве сценариев его разработки для получения статистически значимых результатов.

Перспективным для оценки неопределенности и вероятностного моделирования является многоуровневый подход [Поспелова и др., 2021]. Такой подход состоит из двух этапов. Первый — многомасштабное моделирование, т. е. моделирование вложенных объектов разного масштаба в рамках концепции моделей оптимальной сложности. Второй — иерархическое моделирование, т. е. моделирование одного объекта с использованием моделей разного типа. Принципиальное значение на этапе иерархического моделирования имеет понимание особенностей трансформации параметров моделей при изменении ее типа, в частности при изменении пространственной размерности модели.

Трансформацию параметров модели можно проиллюстрировать на классическом примере корректировки функции относительной фазовой проницаемости (ОФП), предварительно обоснованной по лабораторным исследованиям керна и модифицированной в ГДМ при ее адаптации на фактические промысловые данные по работе скважин. Необходимость такой модификации возникает, например, при учете особенностей численного моделирования течения воды и нефти к скважине. Иначе говоря, если рассмотреть две добывающие скважины, которые располагаются в однородном пласте, но при этом одна скважина обводняется за счет водяного конуса, а другая — за счет латерального притока воды от нагнетательных скважин, то для настройки обводненности в ГДМ потребуются (как вариант) различная корректировка ОФП, а именно повышение ОФП по воде в первом случае и понижение ОФП по воде во втором [Азиз, Сеттари, 1982]. В случае моделирования конуса корректировка ОФП обусловлена повышенной интенсивностью потока подошвенной воды, в случае латерального притока воды от нагнетательных скважин — численной диффузией. Таким образом, функция ОФП в математической модели природного пласта отражает не только свойство моделируемого объекта, но и особенности



процессов в околоскважинной зоне пласта, и вместе с тем представляет возможность численной схемы описывать эти процессы. В конечном итоге при численной имитации разработки пласта в его 3D-, 2D- и 1D-моделях ОФП будут отличаться. Чтобы подчеркнуть разницу кривых ОФП (образованную в том числе из-за изменения размерности модели) относительно исходных kernовых кривых, такие измененные функции ОФП называют псевдофункциями. Также заметим, что контекст термина «псевдофункция» ОФП подразумевает учет причин, обуславливающих корректировку; если же ОФП изменялись исключительно для адаптации модели на фактические данные, то такие ОФП называют модифицированными.

В рамках упомянутого выше многоуровневого подхода ключевое значение имеет моделирование на масштабе пласта с использованием 0D-модели (модели материального баланса), в качестве которой может выступать емкостно-резистивная модель (capacitance-resistive model, CRM) [Степанов и др., 2021]. CRM стыкует между собой этапы многомасштабного и иерархического моделирования, тем самым позволяя полноценно реализовать многоуровневое моделирование (слово «уровень» можно трактовать как синоним слова «масштаб» и как собственно уровень в иерархии моделей). Моделирование многофазной фильтрации в 0D-модели, если в ней используется понятие ОФП (см., например, [Fei, 2014]), приведет к тому, что эти ОФП будут отличаться от тех, что условно заложены в модели другой размерности. Более того, ОФП будут отличаться и в зависимости от разновидности модели CRM. Так, в CRMТ ОФП ассоциируются со всей моделируемой областью (всё множество добывающих и нагнетательных скважин), в CRMР — с областью дренирования одной скважины, приходящейся на все реагирующие с ней нагнетательные скважины, в CRMР — с областью дренирования добывающей скважины, приходящейся на одну из реагирующих с ней нагнетательных скважин [Sayagrou, 2008].

Использование многоуровневого моделирования подразумевает согласованность моделей, т. е. возможность передачи их параметров между моделями на соседних уровнях. При этом не исключается наличие каких-либо закономерностей между параметрами моделей разных уровней. Другими словами, такие закономерности — это следствие определенной трансформации параметров моделей, которая выражается в том, что одна и та же зависимость между свойствами в модели одного типа может отличаться от аналогичной зависимости в модели другого типа. Цель данной работы заключается в изучении закономерностей трансформации параметров, определяющих ОФП, при изменении размерности модели нефтяного пласта на примере латеральной 2D- и 0D-модели одного пласта (в виде CRMР). Исследование проведено на основе данных, полученных с использованием синтетических 2D- и 0D-моделей нефтяного пласта. При этом 0D-модель реализована в модифицированном виде [Бекман, 2023] для более точного описания динамики обводненности скважин.

## Синтетические модели пласта

При CRMР-моделировании задаются не поля свойств пласта, а параметры областей, ассоциируемых с добывающими и влияющими на них нагнетательными скважинами.

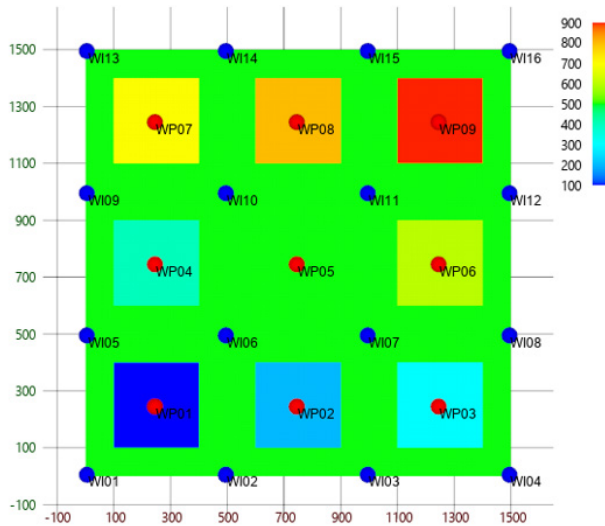
Следовательно, параметры этих областей (включая параметры ОФП) отражают специфику интерференции скважин, обусловленную, с одной стороны, свойствами околоскважинного пространства добывающей скважины и свойствами межскважинного пространства — зоны дренирования добывающей скважины, охватывающей множество связанных с ней нагнетательных скважин, а с другой — особенностями работы скважин и упругостью пласта. Поэтому изучение закономерностей в поведении параметров ОФП путем математического моделирования требует проведения вычислительных экспериментов на моделях пласта с различной конфигурацией неоднородного строения и различной динамикой дебита и приемистости при разных значениях сжимаемости.

Учитывая вышесказанное, для проведения вычислительных экспериментов были созданы 24 синтетические 2D-модели (модель № 1, модель № 2 и т. д.) горизонтально расположенного неоднородного пласта с нефтяной залежью, разрабатываемой при заводнении. Такое количество моделей соизмеримо с количеством скважин: во всех моделях 9 добывающих и 16 нагнетательных вертикальных совершенных скважин, расположение и назначение которых одинаково во всех моделях. Добывающие скважины работают при постоянном (одинаковом для всех скважин) забойном давлении, а управление нагнетательными скважинами организовано в виде нестационарной динамики приемистости, различной для каждой скважины. Такие граничные условия на скважинах позволяют исключить из рассмотрения аквифер и сконцентрироваться на целевых факторах, обуславливающих формирование фильтрационных потоков, а именно на неоднородности и упругости пласта и на специфике динамики приемистости по разным скважинам.

Каждая добывающая скважина расположена в центре квадратного однородного сегмента, при этом модели отличались между собой только тем, что абсолютная проницаемость каждого такого сегмента менялась случайным образом, а все остальные свойства рассчитывались по правомерным функциональным зависимостям от абсолютной проницаемости. В частности, использовалась гиперболическая зависимость между остаточной водонасыщенностью и остаточной нефтенасыщенностью [Иванов и др., 1984]. Абсолютная проницаемость изменялась в диапазоне от 100 до 900 мДкратно 100 мД. Участок между сегментами для всех моделей имеет проницаемость 500 мД. Начальное насыщение предельное, т. е. до остаточной водонасыщенности. На рис. 1 показано поле проницаемости с расположением скважин для одной из моделей. Параметры моделей приведены в таблице 1.

Перечисленные особенности обеспечивают разные динамики дебита жидкости и обводненности в разных 2D-моделях у скважин, расположенных в сегментах с одинаковыми свойствами. Следовательно, результаты, полученные на рассматриваемом множестве моделей, позволяют исследовать поведение параметров ОФП в 0D-модели CRM (в данном случае — CRMP). Чтобы исследовать фактор упругости, вычислительные эксперименты были проведены для всех моделей пласта при двух вариантах сжимаемости нефти: в варианте № 2 сжимаемость была в 10 раз больше, чем в варианте № 1.





**Рис. 1.** Поле абсолютной проницаемости (мД). Расположение скважин в одной из моделей

**Fig. 1.** Absolute permeability field (mD). The location of wells in one of the models

**Таблица 1.** Параметры 2D-моделей

**Table 1.** Parameters of 2D models

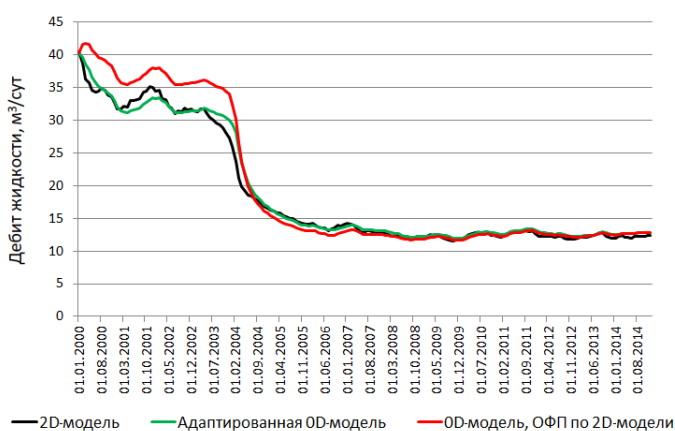
Параметр	Значение
Количество расчетных ячеек	150 × 150
Размер стороны сегмента, м	300
Мощность пласта, м	10
Расстояние между скважинами, м	500
Плотность воды, кг/м <sup>3</sup>	1 000
Плотность нефти, кг/м <sup>3</sup>	800
Динамическая вязкость воды, сП	1
Динамическая вязкость нефти, сП	10
Сжимаемость породы, бар <sup>-1</sup>	1 · 10 <sup>-6</sup>
Сжимаемость воды, бар <sup>-1</sup>	1 · 10 <sup>-5</sup>
Сжимаемость нефти, бар <sup>-1</sup>	1,2 · 10 <sup>-5</sup>

## Результаты и обсуждение

Результаты расчетов (моделирование разработки нефтяной залежи при условии выключения добывающих скважин при достижении предельной обводненности) на 2D-модели, а именно поскважинные данные по динамике жидкости и обводненности, а также данные по динамике приемистости, принимались за фактические промысловые данные, на которые в автоматическом режиме проводилась адаптация 0D-модели. В качестве идентифицируемых были взяты пять параметров ОФП, а именно: остаточная

нефтенасыщенность ( $S_{or}$ ), ОФП по нефти при остаточной водонасыщенности ( $K_{r_{o0}}$ ), ОФП по воде при остаточной нефтенасыщенности ( $K_{r_{w0}}$ ), степень Кори ОФП по нефти ( $N_o$ ) и степень Кори ОФП по воде ( $N_w$ ). Остаточная водонасыщенность предполагается известной по результатам керновых исследований и/или по результатам геофизических исследований скважин.

Для иллюстрации отличия ОФП в 2D- и 0D-модели на рис. 2 показаны динамики дебита жидкости для одной из скважин, рассчитанные: 1) на 2D-модели (факт), 2) адаптированной за счет модификации ОФП 0D-модели и 3) неадаптированной 0D-модели, в которой использованы ОФП из 2D-модели. Видно, что фактическая и расчетная по неадаптированной модели динамики дебита заметно отличаются. Аналогичная картина разной степени выраженности имеет место и для всех остальных скважин.



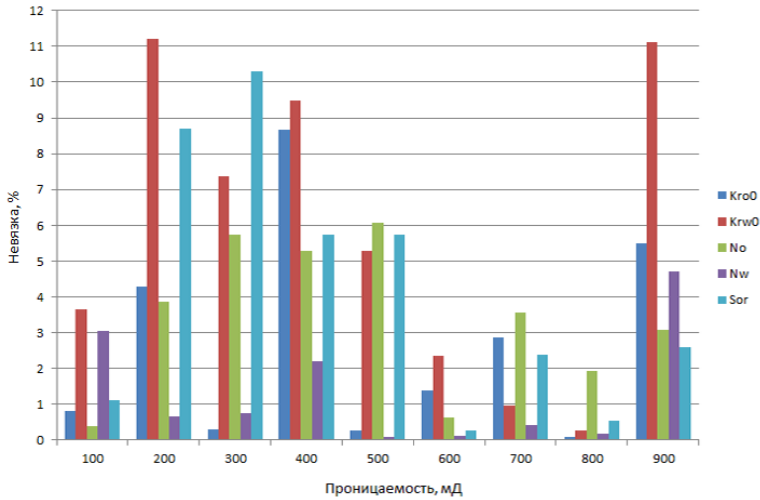
**Рис. 2.** Фактическая и расчетная динамика дебита жидкости для одной из скважин (модель № 1, вариант № 2)

**Fig. 2.** Actual and calculated dynamics of fluid flow rate for one of the wells (model No. 1, variant No. 2)

На рис. 3 показана гистограмма абсолютных значений относительной невязки между средними (среди всех 24 моделей) параметрами ОФП для вариантов № 1 и 2 (значения приведены для сегментов пласта разной проницаемости). Значения невязок среди всех параметров в среднем составляют 3,5%, максимум — до 11%. Из этого следует, что различие в сжимаемости нефти (в 10 раз) не является значимым фактором на функции ОФП в 0D-модели. На рис. 3 обращает на себя внимание отсутствие каких-либо тенденций изменения как величины невязки от проницаемости, так и разных параметров ОФП при фиксированных значениях проницаемости. Это означает, что на параметры, приписываемые к зоне с определенной проницаемостью, оказывает влияние формирование фильтрационных потоков, обусловленное не только проницаемостью соседних зон, но и особенностями работы скважин, расположенных в этих зонах.

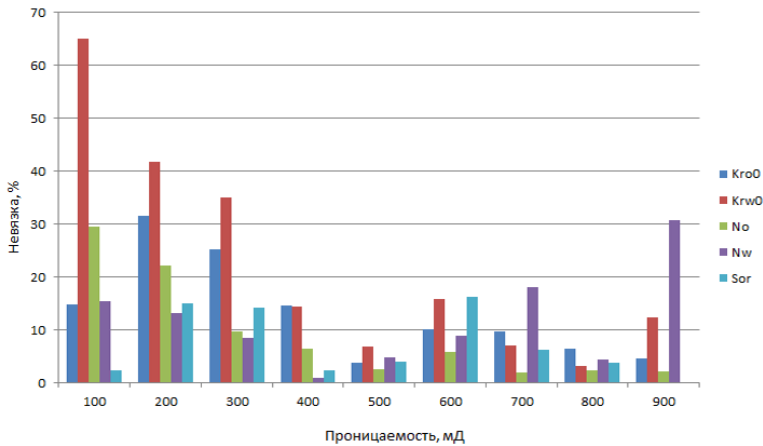
Для исследования влияния этого фактора на всех 24 моделях проведены расчеты при альтернативной схеме закачки, для которой динамика приемистости была сгенерирована

случайным образом, но при тех же объемах накопленной закачки, что и по изначальной схеме закачки. На рис. 4 показана гистограмма абсолютных значений относительной невязки между средними (среди всех 24 моделей) параметрами ОФП по исходной и альтернативной схемам закачки (значения приведены для сегментов пласта разной проницаемости). Как видно, изменение динамики закачки привело к большей разнице между параметрами ОФП, чем изменение сжимаемости.



**Рис. 3.** Абсолютные значения относительной невязки между средними параметрами ОФП для вариантов № 1 и 2 (исходная схема закачки)

**Fig. 3.** Absolute values of the relative discrepancy between the average relative phase permeability parameters for options No. 1 and 2 (original injection scheme)



**Рис. 4.** Абсолютные значения относительной невязки между средними параметрами ОФП для исходной и альтернативной схем закачки

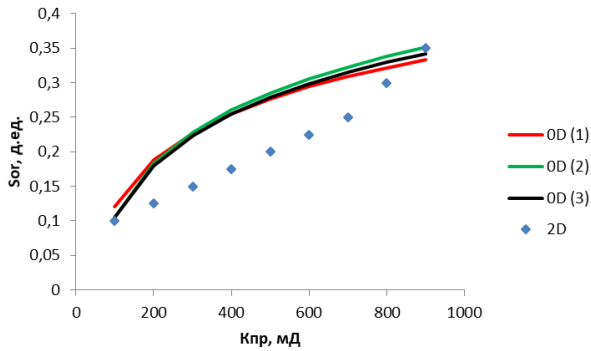
**Fig. 4.** Absolute values of the relative discrepancy between the average relative phase permeability parameters for original and alternative injection schemes

Далее рассмотрим закономерности параметров ОФП в 2D- и 0D-моделях относительно абсолютной проницаемости, заданной в 2D-модели. Для оценки устойчивости найденных закономерностей аппроксимирующие зависимости строились по трем выборкам данных, объем которых составлял соответственно 1/4, 1/2 и 3/4 от общего объема данных по 24 моделям. Заметим, что данные выборки формировались случайным образом, т. е. чтобы в более крупной выборке не присутствовали все данные из более мелкой. Такой подход позволяет выявить влияние фактора количества исходных данных на получаемые уравнения регрессии.

На рис. 5–9 показаны зависимости параметров ОФП для 2D- и 0D-модели по трем выборкам данных. Видно, что зависимости для всех параметров ОФП в 0D-модели трансформировались относительно зависимостей, заданных в 2D-модели. Для остаточной нефтенасыщенности (рис. 5) зависимость осталась с положительной производной, но закономерность ее изменилась: с ростом проницаемости производная в 0D-модели увеличивается, а в 2D-модели, наоборот, уменьшается. Для ОФП по воде при остаточной нефтенасыщенности (рис. 6) и степени Кори ОФП по воде (рис. 7) тенденция осталась той же, но стала другой интенсивности. Для ОФП по нефти при остаточной водонасыщенности (рис. 8) и степени Кори ОФП по нефти (рис. 9) тенденция исчезла: параметры не зависят от проницаемости. Таким образом, установленный факт трансформации зависимостей параметров ОФП свидетельствует о том, что параметры ОФП связаны с фильтрационными свойствами и упругостью пласта, а также спецификой работы скважин.

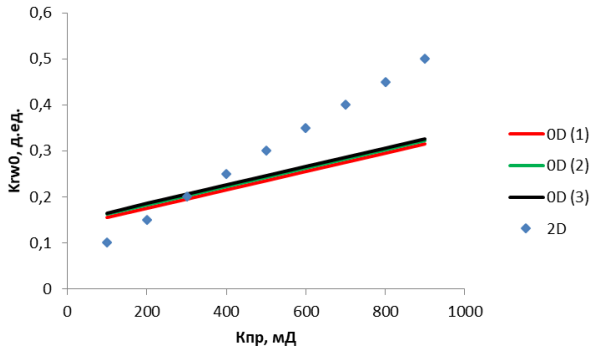
Полученные зависимости имеют различные коэффициенты детерминации (рис. 10). Самые высокие коэффициенты — для остаточной нефтенасыщенности и показателя степени Кори ОФП по воде. Полученные значения ( $\sim 0,6 \dots 0,8$ ) позволяют говорить, с одной стороны, о наличии зависимости от абсолютной проницаемости, а с другой — показывают влияние других факторов. Самые низкие коэффициенты детерминации — для ОФП по нефти при остаточной водонасыщенности и для степени Кори ОФП по нефти, следовательно, для этих параметров зависимости от проницаемости в 0D-модели отсутствуют. Из рис. 5–10 также видно, что рассмотренные объемы выборок для построения зависимостей почти не влияют на вид зависимости и качество аппроксимации.

Понятно, что установленные закономерности в трансформации параметров ОФП не универсальны и свойственны исключительно для рассмотренной совокупности синтетических моделей пласта. Тем не менее они показывают, что при изменении размерности модели, например в случае иерархического моделирования, должны учитываться закономерности в трансформации параметров ОФП. Также понятно, что углубленное исследование таких закономерностей посредством разносторонних вычислительных экспериментов в конечном итоге позволит более обоснованно корректировать параметры не только при иерархическом моделировании, но и вообще при настройке модели любой размерности на фактические данные, что должно положительно сказаться на практической значимости результатов моделирования при сопровождении разработки нефтяных залежей.



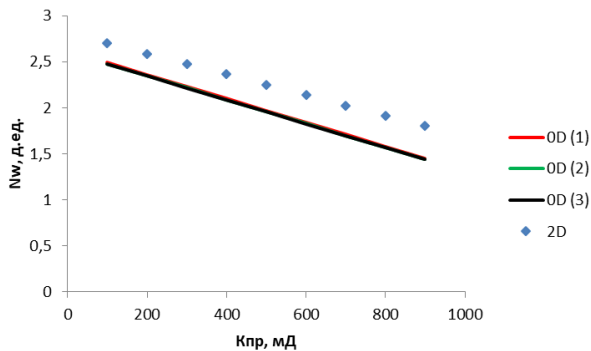
**Рис. 5.** Зависимость остаточной нефтенасыщенности для OD-модели (три варианта выборок данных) и 2D-модели от абсолютной проницаемости

**Fig. 5.** Dependence of residual oil saturation for the OD model (three variants of data samples) and the 2D model on absolute permeability



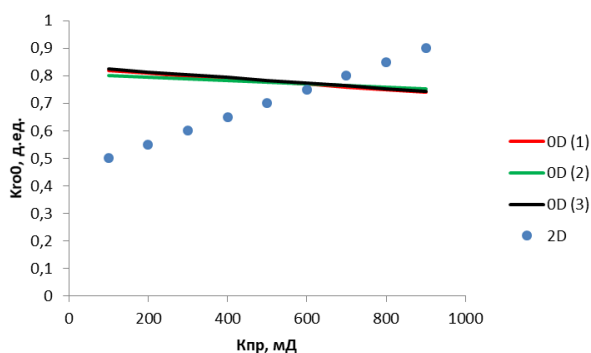
**Рис. 6.** Зависимость ОФП по воде при остаточной нефтенасыщенности для OD-модели (три варианта выборок данных) и 2D-модели от абсолютной проницаемости

**Fig. 6.** Dependence of water relative phase permeability with residual oil saturation for the OD model (three variants of data samples) and the 2D model on absolute permeability



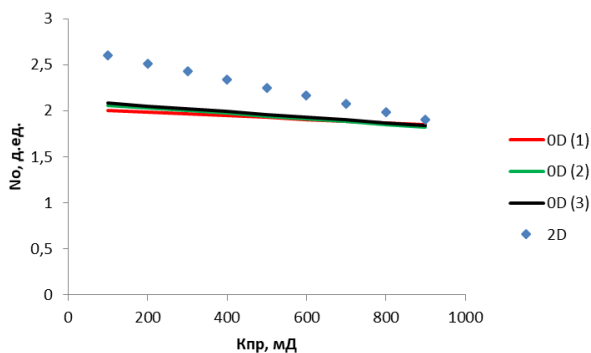
**Рис. 7.** Зависимость степени Кори ОФП по воде для OD-модели (три варианта выборок данных) и 2D-модели от абсолютной проницаемости

**Fig. 7.** Dependence of the Corey exponent for water relative phase permeability for the OD model (three variants of data samples) and the 2D model on absolute permeability



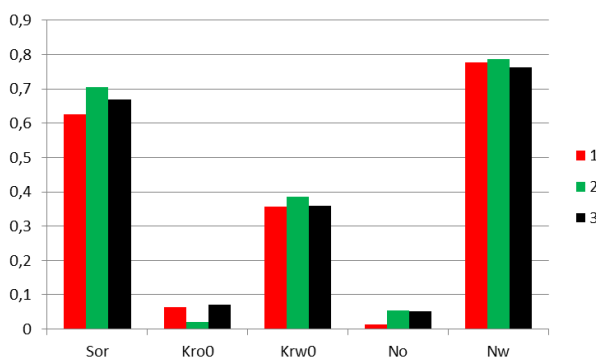
**Рис. 8.** Зависимость ОФП по нефти при остаточной водонасыщенности для OD-модели (три варианта выборок данных) и 2D-модели от абсолютной проницаемости

**Fig. 8.** Dependence of the oil relative phase permeability with residual water saturation for the OD model (three variants of data samples) and the 2D model on absolute permeability



**Рис. 9.** Зависимость степени Кори ОФП по нефти для OD-модели (три варианта выборок данных) и 2D-модели от абсолютной проницаемости

**Fig. 9.** Dependence of the Corey exponent for oil relative phase permeability for the OD model (three variants of data samples) and the 2D model on absolute permeability



**Рис. 10.** Гистограмма коэффициентов детерминации зависимостей параметров ОФП для трех выборок данных

**Fig. 10.** Histogram of the coefficients of determination of the dependencies of the relative phase permeability parameters for three data samples

## Заключение

Исследования, выполненные на основе синтетических данных, позволили показать наличие закономерностей в трансформации параметров функции ОФП на примере изменения размерности математической модели пласта с 2D на 0D. Установлено, что зависимости параметров ОФП, а именно остаточной нефтенасыщенности, ОФП по нефти и воде при остаточных насыщениях и показателей степени Кори от абсолютной проницаемости, трансформируются по-разному.

Рассмотрены факторы, обуславливающие трансформацию параметров ОФП. Показано, что для 0D-модели CRMP, в которой функции ОФП характеризуют зоны дренирования добывающих скважин и включают в себя множество реагирующих с ними нагнетательных скважин, изменение параметров ОФП связано с фильтрационными свойствами пласта и спецификой работы скважин, а также в меньшей степени — с упругостью пласта.

Из результатов исследований следует, что понимание особенностей трансформации параметров ОФП может позволить более обоснованно проводить адаптацию математических моделей различной размерности, в частности при реализации процесса иерархического моделирования разработки месторождений углеводородов.

Полученные результаты, естественно, носят не универсальный характер. Их назначение — по сути, на простейшем примере показать, что на параметры ОФП при изменении размерности модели, помимо свойств пласта, влияют и другие факторы: в рассмотренном примере это сжимаемость и специфика закачки на разных скважинах. Применительно к более сложным пластам и фильтрационным процессам в них, в частности применительно к образованию конусов воды, вопрос о закономерностях трансформации параметров модели и ранжировании факторов, влияющих на трансформацию, представляет предмет дальнейших исследований. Кроме того, в будущих работах планируется выяснить влияние размеров сегментов (зон неоднородности пласта) на закономерности трансформации параметров ОФП.

## Список источников

- Азиз Х., Сеттари Э. 1982. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра. 407 с.
- Бекман А. Д. 2023. Новая двухфазная емкостно-резистивная прокси-модель процесса разработки нефтяного месторождения // Математическое моделирование. Том 35. № 5. С. 47–61. <https://doi.org/10.20948/mm-2023-05-04>
- Иванов В. А., Храмова В. Г., Дняров Д. О. 1984. Структура порового пространства коллекторов нефти и газа. М.: Недра. 97 с.
- Поспелова Т. А., Степанов С. В., Стрекалов А. В., Соколов С. В. 2021. Математическое моделирование для принятия решений по разработке месторождений. М.: Недра. 427 с.
- Степанов С. В., Бекман А. Д., Ручкин А. А., Поспелова Т. А. 2021. Сопровождение разработки нефтяных месторождений с использованием моделей CRM. Тюмень: Экспресс. 300 с. <https://doi.org/10.54744/TNSC.2021.53.50.001>
- Fei C. 2014. Development of a Two-Phase Flow Coupled Capacitance Resistance Model: Ph. D. diss. The University of Texas at Austin. 243 p.
- Sayarpour M. 2008. Development and Application of Capacitance-Resistive Models to Water/CO<sub>2</sub> Floods: Ph. D. diss. The University of Texas at Austin. 236 p.



## References

- Aziz, Kh., & Settari, A. (1982). *Petroleum reservoir simulation*. Nedra. [In Russian]
- Bekman, A. D. (2023). The new CRM-like two-phase proxy-model for the process of oil field development. *Matematicheskoe modelirovanie*, 35(5), 47–61. <https://doi.org/10.20948/mm-2023-05-04> [In Russian]
- Ivanov, V. A., Hramova, V. G., & Diyarov, D. O. (1984). *Structure of the pore space of oil and gas reservoirs*. Nedra. [In Russian]
- Pospelova, T. A., Stepanov, S. V., Strekalov, A. V., & Sokolov, S. V. (2021). *Mathematical modeling for making reservoir engineering decisions*. Nedra. [In Russian]
- Stepanov, S. V., Bekman, A. D., Ruchkin, A. A., & Pospelova, T. A. (2021). *Support of oil field development using CRM models*. Express. <https://doi.org/10.54744/TNSC.2021.53.50.001> [In Russian]
- Fei, C. (2014). Development of a two-phase flow coupled capacitance resistance model [Doctoral dissertation, The University of Texas at Austin].
- Sayarpour, M. (2008). *Development and application of capacitance-resistive models to water/CO<sub>2</sub> floods* [Doctoral dissertation, The University of Texas at Austin].

## Информация об авторах

Александр Дмитриевич Бекман, кандидат физико-математических наук, главный инженер проекта, Тюменский нефтяной научный центр, Тюмень, Россия  
adbekman@rosneft.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5907-523X>

Сергей Викторович Степанов, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной и технической физики, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия; старший эксперт, Тюменский нефтяной научный центр, Тюмень, Россия  
svstepanov@tnnc.rosneft.ru

Дмитрий Валерьевич Зеленин, главный специалист, Тюменский нефтяной научный центр, Тюмень, Россия  
dvzelenin@rosneft.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5918-2377>

## Information about the authors

Alexander D. Bekman, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Chief Project Engineer, Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russia  
adbekman@rosneft.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5907-523X>

Sergei V. Stepanov, Dr. Sci. (Tech.), Professor, Department of Applied and Technical Physics, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia; Senior Expert, Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russia  
svstepanov@tnnc.rosneft.ru

Dmitry V. Zelenin, Chief Specialist, Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russia  
dvzelenin@rosneft.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5918-2377>

Научное издание



ВЕСТНИК ТЮМЕНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика  
2023. Том 9. № 3 (35)

Редактор	<i>Т. П. Сербин</i>
Перевод	<i>М. О. Сафонова</i>
Компьютерная верстка	<i>Т. П. Сербин</i>
Дизайн обложки	<i>Г. Ф. Бикмулина</i>
Печать	<i>А. Е. Котлярова, А. В. Башкиров, В. В. Торопов</i>

Подписано в печать 07.11.2023  
Формат 70 × 108/16. Бумага Xerox Perfect Print  
Обложка Stromcard LI. Гарнитура Arno Pro  
Печать электрографическая. 14,18 усл. печ. л., 11,34 уч.-изд. л.  
Тираж 500 экз. Заказ № 436