

ВЕСТНИК

ТЮМЕНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математическое моделирование.
Нефть, газ, энергетика

TYUMEN STATE
UNIVERSITY

HERALD

Physical and Mathematical Modeling.
Oil, Gas, Energy

Журнал основан в 1998 г.
Выходит 4 раза в год

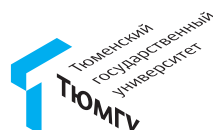
Том 12. № 2 (46)

2026

Vol. 12. No. 2 (46)

Founded in 1998
A quarterly journal

Издание включено в Перечень рецензируемых научных изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты
диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук



Главный редактор

А. Б. Шабаров, Тюмень, Россия

Заместители главного редактора

О. В. Ахметова, Стерлитамак, Россия

С. И. Грачев, Тюмень, Россия

А. А. Губайдуллин, Тюмень, Россия

А. А. Захаров, Тюмень, Россия

А. А. Кислицын, Тюмень, Россия

Ответственные секретари

А. Я. Гильманов, Тюмень, Россия

А. П. Шевелёв, Тюмень, Россия

Редакционная коллегия

А. А. Афанасьев, Москва, Россия

С. П. Баутин, Екатеринбург, Россия

Г. Л. Бровко, Москва, Россия

А. А. Вакулин, Тюмень, Россия

Н. А. Гумеров Колледж-Парк, Мэриленд, США

В. И. Гуров, Москва, Россия

Б. С. Доброней, Красноярск, Россия

Е. Г. Екомасов, Уфа, Россия

С. В. Костюченко, Тюмень, Россия

С. И. Лежнин, Новосибирск, Россия

А. А. Мирзоев, Ташкент, Узбекистан

Е. А. Новиков, Красноярск, Россия

О. А. Степанов, Тюмень, Россия

С. В. Степанов, Тюмень, Россия

А. В. Стрекалов, Тюмень, Россия

А. В. Татосов, Тюмень, Россия

С. Ю. Удовиченко, Тюмень, Россия

Ю. В. Шорников, Новосибирск, Россия

Д. И. Эскин, Москва, Россия

В. В. Ягов, Москва, Россия

ISSN 2411-7978 (Print)

ISSN 2500-3526 (Online)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-72159 выдано 29 декабря 2017 г. (ранее: ПИ № ФС77-60410 от 29 декабря 2014 г.) Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Учредитель

ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»

Издатель/редакция/типография

ТюмГУ-Press
625003, г. Тюмень, ул. Володарского, 6
+7 (3452) 59-75-34, 59-74-81

Прием статей

vestnik-energy-r@utmn.ru
Публикация статей для авторов бесплатна

Журнал распространяется

В открытом доступе <http://www.elibrary.ru>
<http://vestnik.utmn.ru>
По подписке Каталог Российской прессы (индекс ПА230)

Editor-in-chief

A. B. Shabarov, Tyumen, Russia

Deputy editors-in-chief

O. V. Akhmetova, Sterlitamak, Russia

S. I. Grachev, Tyumen, Russia

A. A. Gubaidullin, Tyumen, Russia

A. A. Zakharov, Tyumen, Russia

A. A. Kislitsin, Tyumen, Russia

Executive secretaries

A. Ya. Gilmanov, Tyumen, Russia

A. P. Shevelev, Tyumen, Russia

Editorial board

A. A. Afanasyev, Moscow, Russia

S. P. Bautin, Yekaterinburg, Russia

G. L. Brovko, Moscow, Russia

A. A. Vakulin, Tyumen, Russia

N. A. Gumerov, College Park, Maryland, USA

V. I. Gurov, Moscow, Russia

B. S. Dobronets, Krasnoyarsk, Russia

E. G. Ekomasov, Ufa, Russia

S. V. Kostyuchenko, Tyumen, Russia

S. I. Lezhnin, Novosibirsk, Russia

A. A. Mirzoev, Tashkent, Uzbekistan

E. A. Novikov, Krasnoyarsk, Russia

O. A. Stepanov, Tyumen, Russia

S. V. Stepanov, Tyumen, Russia

A. V. Strekalov, Tyumen, Russia

A. V. Tatosov, Tyumen, Russia

S. Yu. Udovichenko, Tyumen, Russia

Yu. V. Shornikov, Novosibirsk, Russia

D. I. Eskin, Moscow, Russia

V. V. Yagov, Moscow, Russia

Editorial council

I. Sh. Akhatov, Skolkovo, Russia, USA

A. Yu. Varaksin, Moscow, Russia

G. G. Gilaev, Krasnodar, Russia

D. A. Gubaidullin, Kazan, Russia

Duong Ngoc Hai, Hanoi, Vietnam

A. G. Ivashko, Tyumen, Russia

D. M. Markovich, Novosibirsk, Russia

K. K. Nandi, Siliguri, India

R. I. Nigmatulin, Moscow, Russia

A. I. Filarowski, Wrocław, Poland

V. M. Fomin, Novosibirsk, Russia

V. V. Shaidurov, Krasnoyarsk, Russia

ISSN 2411-7978 (Print)

ISSN 2500-3526 (Online)

Founded by

Published, edited and printed by

For article submission

The journal is distributed

University of Tyumen

UTMN-Press

6 Volodarskogo St., Tyumen, 625003, Russia

+7 (3452) 59-75-34, 59-74-81

vestnik-energy-r@utmn.ru

No publication charges

Accessed at

<http://www.elibrary.ru>

<http://vestnik.utmn.ru>

Subscription to

Russian Post catalogue (No. ПIA230)

Содержание

Теплофизика и теоретическая теплотехника

- 6 Методика построения температурного профиля в плоском слое теплоизоляции с нелинейной зависимостью теплопроводности от температуры
Чадаев А. Н., Дмитриев А. В., Биккулов Р. Я., Дмитриева О. С.
- 20 Спектральный анализ устойчивости уравнения теплопроводности с конвективными слагаемыми
Скобlikов Р. М., Канонирова Е. П., Шевелёв А. П., Гильманов А. Я., Панова А. В.

Механика жидкости, газа и плазмы

- 40 Механизмы вытеснения нефти из пористой среды с использованием наножидкостей на основе углеродных наночастиц
Сафаргалиев Р. Ф., Пахаруков Ю. В., Ездин Б. С., Васильев С. А., Чупров А. С., Гуменюк Р. Д., Шабиев Ф. К.
- 60 Исследование влияния вынужденных колебаний жидкости на гидравлическое сопротивление трубопровода
Коноплёв Н. Г., Коробков Г. Е., Янчушка А. П.
- 87 Исследование влияния неизотермических условий на расслоение эмульсии типа «вода в масле» методом математического моделирования
Гимадеев А. В., Мусин А. А., Валиулина В. И., Ковалева Л. А.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Информационные технологии

- 105 Диагностика газового тракта центробежного нагнетателя природного газа с приводом от свободной турбины
Иноземцев Д. А., Бунякин А. В., Дунаев В. И.
- 117 Нелинейная задача Дарси–Стефана для радиальной фильтрации в пористой среде при закачке холодного агента
Тарасенко А. А., Прокопенко Е. В., Ащеулова А. С.
- 136 Моделирование нестационарных режимов работы турбокомпрессоров с учетом отложений, образованных в межлопаточных каналах проточной части
Степанов М. С., Бунякин А. В., Дунаев В. И.
- 155 Влияние строения пласта на достоверность оценки пористости и проницаемости с помощью CRM-модели
Буланов Н. С., Степанов С. В.

Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений

- 171 Метод оперативного подбора скважин-кандидатов на перевод под нагнетание на основе модели материального баланса CRMP
Бекман А. Д.

Contents

Thermal physics and thermology

- 6 The methodology for constructing a temperature profile in a flat insulation layer with a nonlinear dependence of thermal conductivity on temperature
Chadaev A. N., Dmitriev A. V., Bikkulov R. Ya., Dmitrieva O. S.
- 20 Spectral stability analysis of the heat conduction equation with convective terms
Skoblikov R. M., Kanonirova E. P., Shevelev A. P., Gilmanov A. Ya., Panova A. V.

Fluid, plazma, and gas mechanics

- 40 Mechanisms of oil displacement from a porous medium using nanofluids based on carbon nanoparticles
Safargaliev R. F., Pakharukov Yu. V., Ezdin B. S., Vasilev S. A., Chuprov A. S., Gumenyuk R. D., Shabiev F. K.
- 60 Study of the influence of forced fluid oscillations on the hydraulic resistance of a pipeline
Konoplev N. G., Korobkov G. E., Yanchushka A. P.
- 87 Study of the effect of non-isothermal conditions on the stratification of a water-in-oil emulsion using mathematical modeling
Gimadeev A. V., Musin A. A., Valiullina V. I., Kovaleva L. A.

Mathematical modeling, numerical methods, and software systems. Information technologies

- 105 Diagnostics of the gas path of a centrifugal supercharger of natural gas with a drive from a free turbine
Inozemtsev D. A., Bunyakin A. V., Dunaev V. I.
- 117 Nonlinear Darcy–Stefan problem for radial Darcy flow in a porous medium during cold-fluid injection
Tarassenko A. A., Prokopenko E. V., Ashcheulova A. S.
- 136 Modeling of non-stationary modes of operation of turbo compressors taking into account deposits formed in the interblade channels of the flow part
Stepanov M. S., Bunyakin A. V., Dunaev V. I.
- 155 The influence of reservoir structure on the reliability of porosity and permeability estimation using the CRM model
Bulanov N. S., Stepanov S. V.

Development and operation of oil and gas fields

- 171 Method for rapid selection of candidate wells for conversion to injection based on the CRMP material balance model
Bekman A. D.

Методика построения температурного профиля в плоском слое теплоизоляции с нелинейной зависимостью теплопроводности от температуры

Алексей Николаевич Чадаев¹, Андрей Владимирович Дмитриев²✉,
Рустем Ядкарович Биккулов², Оксана Сергеевна Дмитриева¹

¹ Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия

² Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия
Контакт для переписки: ieremiada@gmail.com✉

Аннотация. Для разработки надежных систем тепловой защиты высокотемпературного оборудования требуется точное моделирование температурных полей в материалах с нелинейной теплопроводностью, описываемой полиномом второй степени. В отличие от существующих приближенных методов, научная новизна работы заключается в разработке аналитической методики расчета стационарного одномерного температурного профиля при известной квадратичной зависимости теплопроводности от температуры через решение кубического уравнения методом Кардано с многоступенчатой процедурой верификации корней на физическую корректность. Цель исследования — создание алгоритма построения профиля температур при известной зависимости теплопроводности от температуры для верификации обратных задач определения зависимости теплопроводности от температуры по известному профилю температур. Метод основан на энергетическом балансе и обеспечивает высокую точность вычислений температурного профиля в слое теплоизоляции. Результаты подтверждают работоспособность подхода для пористых корундовых материалов. Предложенный метод служит надежным инструментом калибровки обратных алгоритмов при проектировании тепловых защитных систем.

Ключевые слова: теплопроводность, нелинейная зависимость, температурный профиль, метод Кардано, высокотемпературная изоляция, верификация корней

Благодарности: работа выполнена в рамках гранта Академии Наук Республики Татарстан на поддержку программ развития передовых инженерных школ республиканского значения «ТурбоПИШ», соглашение ИПИШ от 19.12.2025 г.

Цитирование: Чадаев А. Н., Дмитриев А. В., Биккулов Р. Я., Дмитриева О. С. 2026. Методика построения температурного профиля в плоском слое теплоизоляции с нелинейной зависимостью теплопроводности от температуры // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 12. № 2 (46). С. 6–19. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-6-19>

Поступила 25.03.2026; одобрена 07.05.2026; принята 08.05.2026

The methodology for constructing a temperature profile in a flat insulation layer with a nonlinear dependence of thermal conductivity on temperature

Aleksey N. Chadaev¹, Andrey V. Dmitriev²✉, Rustem Ya. Bikkulov², Oksana S. Dmitrieva¹

¹ Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia

² Kazan State Power Engineering University, Kazan, Russia

Corresponding author: ieremiada@gmail.com ✉

Abstract. Accurate modeling of temperature fields in materials with nonlinear thermal conductivity — described by a second-degree polynomial — is essential for developing reliable thermal protection systems for high-temperature equipment. Unlike existing approximate methods, the scientific novelty of this work lies in the development of an analytical approach for calculating the steady-state one-dimensional temperature profile with a known quadratic dependence of thermal conductivity on temperature through solving a cubic equation using the Cardano's method with a multi-stage procedure for verifying the roots for physical correctness. The purpose of the study is to create an algorithm for constructing a temperature profile with a known dependence of thermal conductivity on temperature to verify the inverse problems of determining the dependence of thermal conductivity on temperature using a known temperature profile. The method is based on energy balance and provides high accuracy in calculating the temperature profile within the insulation layer. The results confirm the effectiveness of the approach for porous

corundum materials. The proposed method serves as a reliable tool for calibrating inverse algorithms in the design of thermal protection systems.

Keywords: thermal conductivity, nonlinear dependence, temperature profile, Cardano's method, high-temperature insulation, root verification

Acknowledgements: the work was carried out under a grant from the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan to support the development programs of advanced engineering schools of republican significance "TurboPISH" (Agreement No. 1RPISH from December 19, 2025).

Citation: Chadaev, A. N., Dmitriev, A. V., Bikkulov, R. Ya., & Dmitrieva, O. S. (2026). The methodology for constructing a temperature profile in a flat insulation layer with a nonlinear dependence of thermal conductivity on temperature. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 12(2), 6–19. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-6-19>

Received Mar. 25, 2026; Reviewed May 7, 2026; Accepted May 8, 2026

Введение

В современных условиях ужесточения требований к энергосбережению и сокращению выбросов диоксида углерода остро стоит задача разработки высокоэффективных систем хранения тепловой энергии [Бойко и др., 2024]. Теплоаккумуляторы для высокотемпературных применений обычно изготавливаются из материалов с высокой плотностью аккумулирования энергии, высокой теплопроводностью и высокой температурной стабильностью. Основными подходами к аккумулированию тепловой энергии являются использование явной теплоты и скрытой теплоты. Для высокотемпературного аккумулирования явной теплоты от источников с относительно непостоянной генерацией наиболее перспективными остаются классические кремнеземные огнеупоры благодаря их термостабильности, высокой прочности и стойкости к термическим ударам [Šimonová et al., 2026]. Однако при температурах выше 1000–1200 °C эффективность таких систем ограничивается необходимостью дополнительной изоляции и лимитированным ресурсом накопления энергии [Khare et al., 2013]. Альтернативой служат металлы и сплавы с фазовым переходом [Зинуров и др., 2025]. В отличие от систем явного тепла, системы скрытого тепла и термохимические накопители обладают наибольшей плотностью аккумулирования тепла, высокой теплопроводностью, что демонстрирует большой потенциал в промышленном применении, процесс поглощения и выделения тепла почти изотермический [Li et al., 2025]. Однако их применение сдерживается проблемами коррозии контейнеров, деградацией материалов и сложностью управления реакциями при экстремально высоких температурах [Mohan et al., 2019].

Оптимизация характеристик этих материалов часто достигается путем создания композитов с микропористыми наполнителями [Bigeard et al., 2026] или инкапсуляции фазоизменяющих веществ [Nazir et al., 2019]. Кроме того, предлагаются альтернативные

варианты хранения жидких металлов [Khare et al., 2012] для предотвращения окисления и коррозии контейнеров при высоких температурах, что может повлиять на работоспособность и долговечность устройства в целом. Тем не менее новые композиты и пористые керамики имеют сложную микроструктуру, в литературе имеется мало данных о теплопроводности при высоких температурах материалов, которые в настоящее время в основном ограничены лабораторными исследованиями [Manzolaro et al., 2013]. Учитывая огромное и постоянно растущее число новых материалов, доступных сегодня (более 160000), поиск подходящего материала и определение его теплофизических свойств является сложным и трудоемким процессом [Ashby, 2016]. Разработка надежных систем тепловой защиты для высокотемпературного оборудования требует точного моделирования распределения температуры в изоляционных материалах.

Экспериментальные данные о теплопроводности свидетельствуют, что для многих современных композитных керамик и легких огнеупоров линейная аппроксимация зависимости теплопроводности от температуры дает недопустимые ошибки (до 20–30%) в диапазоне 1000–1500 °С. Сравнение методов определения теплопроводности огнеупорных материалов представлено в работе [Жуковская, Хлебникова, 2006]. В случае неоднородных тел теплофизические характеристики можно определить только из решения коэффициентных обратных задач теплопроводности по дополнительной входной информации [Ватульян, Нестеров, 2019]. Решение уравнения теплопроводности с использованием инженерных программ методом конечных разностей или элементов требует больших вычислительных ресурсов, при этом получаем численное решение, но не аналитическую формулу определения температурного профиля, что затрудняет быструю верификацию алгоритмов и анализ чувствительности. При условии верифицированной математической модели прямой задачи и получения точных значений искомого параметра из эксперимента, решение обратной задачи может быть определено точно. Тем не менее в реальных условиях любые данные содержат шум или ошибку измерения, что делает решение обратной задачи приближенным [Томочаков, Березовская, 2022]. При этом точность этого решения будет определяться лишь точностью экспериментального исследования [Кузнецова и др., 2014]. Экспериментальная оценка параметров усугубляется сложностью измерений: стандартные термпары (до 800 °С) не подходят для постоянного пребывания в средах свыше 900–1000 °С, что вносит дополнительные систематические ошибки.

Согласно данным справочника [Чиркин, 1968] по высокотемпературным теплоизоляционным материалам, коэффициент теплопроводности для теплоизоляционных огнеупоров изменяется в зависимости от температуры в среднем прямолинейно, а для более точных определений следует использовать квадратичную зависимость от температуры: $\lambda(T) = a + b \cdot T + c \cdot T^2$, где λ — коэффициент теплопроводности теплоизоляционного материала, Вт/(м·К); T — температура теплоизоляционного материала, К; a , b , c — некоторые коэффициенты, зависящие от теплофизических свойств конкретного материала. Расчет этих коэффициентов производится путем аппроксимации экспериментальных данных измеренной теплопроводности при различных температурах. При этом даже небольшие погрешности в экспериментальных данных могут приводить к значитель-

ным изменениям вышеописанных коэффициентов. Одним из способов их определения являются численные итерационные алгоритмы [Грибов и др., 2019; Kabanikhin et al., 2008], недостатком которых являются высокие вычислительные затраты и отсутствие гарантии достижения результата.

Для обхода перечисленных ограничений авторы настоящего исследования предлагают методику расчета, по которой имеем аналитическое выражение температурного профиля в стационарном режиме, что позволяет определить неизвестные параметры без цикла итераций. Данный детерминированный подход гарантирует глобальную сходимость и исключает проблемы регуляризации, характерные для градиентных методов.

Таким образом, актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки аналитического метода определения коэффициентов теплопроводности, сочетающего высокую точность учета нелинейности свойств с минимальными вычислительными затратами.

Методы исследования

В настоящей работе предлагается методика решения прямой задачи теплопроводности — построение температурного профиля $T(x)$ в стационарном режиме при известной нелинейной зависимости теплопроводности от температуры. Методика базируется на аналитическом решении уравнения теплового баланса и многоступенчатой процедуре верификации его корней (положительность, граничные значения).

Целью исследования является получение температурного профиля, используемого в дальнейшем для проверки методики решения обратной задачи теплопроводности — определения неизвестных коэффициентов a , b , c квадратичной зависимости теплопроводности материала по температурному полю, измеренному в нескольких контрольных точках внутри изоляционного слоя вблизи его холодной границы. После определения коэффициентов становится возможным получить температурный профиль во всем слое теплоизоляции. Для верификации полученного профиля используется профиль, установленный в результате решения прямой задачи теплопроводности, что позволит оценить точность обратного алгоритма, поскольку измерения температуры по своей сути сопряжены со случайными погрешностями [Woodbury et al., 2023].

Постановка задачи

Рассмотрен процесс установившейся одномерной теплопередачи через плоский слой теплоизоляции толщиной δ . Материал слоя изоляции обладает неоднородной структурой, свойства зависят от температуры. Теплопроводность материала описывается квадратичной зависимостью $\lambda(T) = a + b \cdot T + c \cdot T^2$. Коэффициенты a , b , c являются известными величинами. Система рассматривается при условии, что на горячей границе ($x = 0$) температура известная и постоянная T_h . На холодной границе ($x = \delta$) осуществляется конвективный теплообмен с окружающей средой с температурой T_{env} и коэффициентом теплоотдачи α . Допущение, что источники тепловыделения отсутствуют.

В непосредственные задачи исследования входит аналитическое описание распределения температуры в слое $T(x)$, удовлетворяющее уравнению теплопроводности. Важное требование — выявление критериев для отсеивания нефизичных корней уравнения.

Запишем уравнение стационарной одномерной теплопроводности без внутренних источников:

$$\frac{d}{dx} \left[\lambda(T) \frac{dT}{dx} \right] = 0.$$

Интегрирование данного выражения приводит к тому, что плотность теплового потока q остается постоянной по толщине слоя:

$$\lambda(T) \frac{dT}{dx} = -q.$$

Используя закон Ньютона–Рихмана для граничного условия и разделив переменные, можно установить связь между тепловым потоком и температурой на холодной границе T_c тогда имеем

$$\int_{T_h}^{T_c} \lambda(T) dT = -q\delta,$$

$$q = \alpha(T_c - T_{env}).$$

Подставив в полученное уравнение зависимость теплопроводности и выражение для определения плотности теплового потока, имеем уравнение вида:

$$a(T_c - T_h) + \frac{b}{2}(T_c^2 - T_h^2) + \frac{c}{3}(T_c^3 - T_h^3) + \alpha\delta(T_c - T_{env}) = 0.$$

После приведения подобных членов уравнение принимает каноническую форму кубического уравнения:

$$AT_c^3 + BT_c^2 + CT_c + D = 0.$$

Коэффициенты уравнения определяем, как

$$A = \frac{c}{3}, \quad B = \frac{b}{2}, \quad C = a + \alpha\delta, \quad D = -\left(aT_h + \frac{b}{2}T_h^2 + \frac{c}{3}T_h^3 + \alpha\delta T_{env}\right).$$

Решением кубического уравнения служит аналитический метод Кардано, причем может быть несколько вещественных корней. Для выбора единственного решения, соответствующего реальной физической ситуации, применяется оценка по нескольким критериям — исключение мнимых частей, корней вне диапазона $T_{env} \leq T_c \leq T_h$. Далее для каждого варианта рассчитываются плотности теплового потока за счет теплопроводности q_{cond} и конвекции q_{conv} . Решение считается корректным при выполнении условия $|q_{cond} - q_{conv}| < \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-6}$ Вт/м² — заданный порог точности.

Для оценки погрешности найденного приближенного корня T_c^* , который является температурой на холодной стороне теплоизоляции, подставим его обратно в уравнение

и проверим его на равенство. Определим остаточную величину $\eta = F(T_c^*)$, где $F(T_c)$ — левая часть кубического уравнения $F(T_c) = 0$. Абсолютная погрешность найденной температуры на холодной стороне теплоизоляции оценивается как:

$$|\Delta T_c| \approx \frac{|\eta|}{|F'(T_c^*)|},$$

где производная $F'(T_c) = a + bT_c + cT_c^2 + \alpha\delta = \lambda(T_c) + \alpha\delta$. Значение погрешности найденного приближенного корня позволяет обоснованно выбирать шаг дискретизации при построении температурного профиля.

После определения значения температуры на холодной стороне теплоизоляции T_c и плотности теплового потока q , распределение температуры внутри слоя теплоизоляции находится путем интегрирования исходного уравнения. Для упрощения построения профиля температур удобно использовать не прямую функцию $T(x)$, а обратную функцию $x(T)$:

$$x(T) = -\frac{1}{q} \int_{T_h}^T \lambda(\varphi) d\varphi = -\frac{1}{q} \left[a(T - T_h) + \frac{b}{2}(T^2 - T_h^2) + \frac{c}{3}(T^3 - T_h^3) \right],$$

где φ — переменная интегрирования.

Результаты исследования и обсуждение

Вышеприведенный алгоритм был использован для построения профиля температур в слое теплоизоляции из пористых корундовых огнеупоров с полыми сферами. Для каждого образца наполнителем пор являлся один из следующих газов: гелий при атмосферном давлении (образец № 1), азот при атмосферном давлении (образец № 2), воздух при давлении 1,3–102 Па (образец № 3).

Исходные данные: температура на горячей стороне $T_h = 2000$ К, толщина изоляции $\delta = 0,2$ м, температура окружающей среды $T_{env} = 293$ К, коэффициент теплоотдачи $\alpha = 5$ Вт/(м²·К). Зависимость эффективной теплопроводности от температуры по экспериментальным данным из работы [Бондаренко и др., 1986] представлена в табл. 1 и на рис. 1. Для всех трех образцов характерна ярко выраженная нелинейность. Зависимости имеют вид параболических кривых с перегибом вниз, что однозначно подтверждает необходимость использования квадратичной модели для описания теплопроводности.

Приведенная табличная зависимость на примере образца № 3 была аппроксимирована полиномом второй степени:

$$\lambda(T) = 0,50643382 - 0,00047483T + 0,00000026T^2$$

с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,993$, что подтверждает адекватность модели.

На основе энергетического баланса было составлено и решено кубическое уравнение относительно температуры на холодной границе T_c . С использованием метода Кардано получено три корня, из которых только один является вещественным и лежит в физически допустимом диапазоне.

Таблица 1. Зависимость теплопроводности от температуры для каждого из образцов

Table 1. The dependence of thermal conductivity on temperature for each of the samples

Температура T , К	Образец № 1 λ , Вт/(м·К)	Образец № 2 λ , Вт/(м·К)	Образец № 3 λ , Вт/(м·К)
500	0,73	0,45	0,34
600	0,67	0,43	0,31
700	0,64	0,4	0,3
800	0,62	0,38	0,29
900	0,625	0,38	0,28
1000	0,63	0,39	0,29
1100	0,64	0,4	0,3
1200	0,65	0,41	0,32
1300	0,66	0,43	0,33
1400	0,67	0,44	0,35
1500	0,68	0,46	0,37
1600	0,7	0,5	0,4
1700	0,75	0,53	0,45
1800	0,78	0,56	0,5
1900	0,8	0,59	0,55
2000	0,89	0,62	0,6

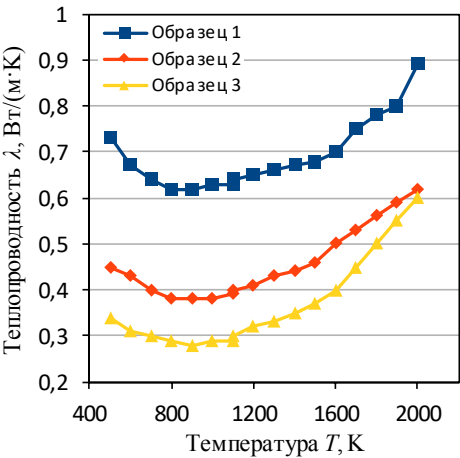


Рис. 1. Зависимость теплопроводности от температуры для каждого образца

Fig. 1. The dependence of thermal conductivity on temperature for each sample

Дополнительная фильтрация по диапазону, определяемому минимальным ($\lambda_{\min} = 0,3 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) и максимальным ($\lambda_{\max} = 0,6 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) значениями теплопроводности, дает интервал возможных температур $T_c \in [687; 933] \text{ К}$. Найденный корень $T_c = 762,885 \text{ К}$ удовлетворяет всем критериям. Плотность теплового потока через слой при этом составляет $q = 2349,42 \text{ Вт}/\text{м}^2$.

Результаты вышеприведенного расчета для всех трех образцов сведены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты расчета теплового потока для образцов

Table 2. Heat flow calculation results for samples

Параметр	Образец № 1	Образец № 2	Образец № 3
Коэффициент a	0,90948792	0,58530987	0,50643382
Коэффициент b	– 0,0005436	– 0,00040627	– 0,00047483
Коэффициент c	0,00000026	0,00000022	0,00000026
Коэффициент R^2	0,96	0,98	0,93
$\lambda_{\min}$, Вт/(м·К)	0,62	0,38	0,3
$\lambda_{\max}$, Вт/(м·К)	0,89	0,62	0,6
Интервал T_c , К	[946; 1096]	[763; 946]	[687; 933]
T_c , К	996,158	844,254	762,885
q , Вт/м ²	3515,79	2756,27	2349,42

По полученному значению q был построен температурный профиль $T(x)$ согласно аналитической зависимости $x(T)$. Результаты расчета представлены в табл. 3 и на рис. 2. Для наглядного представления результатов использованы промежуточные точки с шагом температуры 100 К.

Анализ таблицы показывает нелинейный характер распределения температуры, обусловленный немонотонной зависимостью $\lambda(T)$.

Таблица 3. Значение температуры и ее координата x в слое материала

Table 3. Temperature value and its x coordinate in the material layer

Температура T , К	Образец № 1 x , м	Образец № 2 x , м	Образец № 3 x , м
2000	0	0	0
1900	0,0238448	0,0228503	0,0242350
1800	0,0464256	0,0441415	0,0462857
1700	0,0678903	0,0640332	0,0663735
1600	0,0883868	0,0826851	0,0847197
1500	0,108063	0,100257	0,101546
1400	0,127067	0,116908	0,117073

Окончание табл. 3.
Table 3 (end)

Температура T , К	Образец № 1 x , м	Образец № 2 x , м	Образец № 3 x , м
1300	0,145546	0,132798	0,131522
1200	0,163649	0,148087	0,145116
1100	0,181523	0,162935	0,158074
1000	0,199316	0,177500	0,170619
900	–	0,191943	0,182971
800	–	–	0,195353

Результаты показали, что во всех случаях температура монотонно убывает по мере удаления от горячей границы, при этом кривизна зависимостей напрямую зависит от индивидуальных значений параметров теплопроводности неоднородной среды (рис. 2).

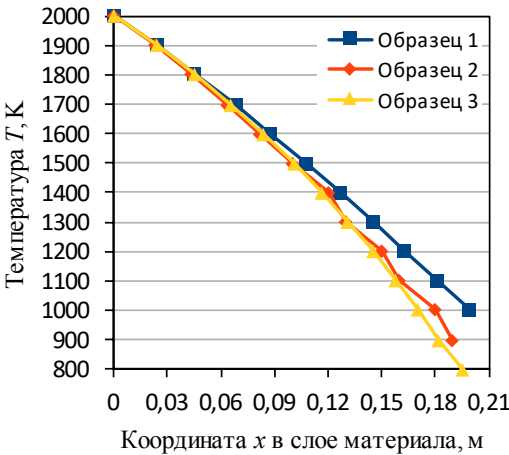


Рис. 2. Распределение температуры в слое теплоизоляции для каждого образца
Fig. 2. Temperature distribution in the thermal insulation layer for each sample

Заключение

В ходе исследования была разработана методика решения прямой задачи теплопроводности для материалов с квадратичной зависимостью теплопроводности от температуры в условиях плоского слоя изоляции. Она основана на равенстве теплового потока, проходящего через теплоизоляцию и отводимого в окружающую среду. Теплопроводность, входящая в уравнение, выраженная полиномом второй степени в зависимости от температуры, после интегрирования уравнения превращает его в уравнение третьей степени. Оно решается методом Кардано и в общем случае имеет до трех корней, включая комплексные.

Методика позволяет выявить единственный из них, являющийся температурой на холодной стороне теплоизоляции, и построить профиль температур в ее слое.

Полученный профиль температур в дальнейшем будет использоваться для верификации алгоритма решения обратной задачи теплопроводности, позволяющего по частичному профилю температур в слое теплоизоляции (на ее холодной стороне) найти зависимость теплопроводности от температуры для данного материала теплоизоляции и воссоздать полный профиль температур во всем слое теплоизоляции.

Список источников

- Бойко Е. Е., Бык Ф. А., Илюшин П. В., Мышкина А. С. 2024. Роль накопителей электрической и тепловой энергии в системах энергоснабжения // Электрические станции. № 5 (1114). С. 50–57. <https://doi.org/10.34831/EP.2024.1114.5.006>
- Бондаренко С. А., Литовский Е. Я., Иванов А. Б., Боровецкая А. И., Пахомов Е. П. 1986. Тепло- и температуропроводность корундовых огнеупоров на основе полых сфер в интервале температур 500–2000 К в различных газовых средах // Теплофизика высоких температур. Том 24. № 3. С. 618–619.
- Ватulyа А. О., Нестеров С. А. 2019. Об особенностях решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности для двусоставного слоя // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. Том 19. № 4. С. 409–423. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-409-423>
- Грибов А. Ф., Жидков Е. Н., Краснов И. К. 2019. О численном решении обратной задачи теплопроводности с излучением // Математическое моделирование и численные методы. № 1 (21). С. 43–53. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2019-1-4353>
- Жуковская А. Е., Хлебникова И. Ю. 2006. Сравнение российских и зарубежных стандартов на методы определения теплопроводности огнеупоров // Огнеупоры и техническая керамика. № 2. С. 38–43.
- Зинуров В. Э., Чадаев А. Н., Дмитриев А. В., Дмитриева О. С., Мугинов А. М., Зянгинов А. Ф. 2025. Теоретические и прикладные аспекты проектирования высокотемпературного теплового накопителя энергии на основе графитового материала // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Энергетика. Том 25. № 4. С. 71–81. <https://doi.org/10.14529/power250409>
- Кузнецова А. Э., Скворцова М. П., Стефанюк Е. В. 2014. Решение обратной задачи теплопроводности по идентификации начального условия краевой задачи // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. № 3 (43). С. 155–162.
- Томочаков М. М., Березовская И. Э. 2022. Анализ современного состояния решения обратных задач теплопроводности и их применения // Universum: технические науки. № 5-3 (98). С. 39–44. <https://doi.org/10.32743/UniTech.2022.98.5.13591>
- Чиркин В. С. 1968. Теплофизические свойства материалов ядерной техники. М.: Атомиздат. 484 с.
- Ashby M. F. 2016. Materials Selection in Mechanical Design. Oxford: Butterworth-Heinemann. 660 p.
- Bigeard A., Buchovecky E., Mesnager C., Bolore D., Bouvard D., Jauffres D. 2026. Modelling of sintering consolidation and thermal damage in a refractory ceramic // Journal

- of the European Ceramic Society. Vol. 46. No. 3. Article 117893. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2025.117893>
- Kabanikhin S. I., Hasanov A., Penenko A. V. 2008. A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem // Numerical Analysis and Applications. Vol. 1. Pp. 34–45. <https://doi.org/10.1134/S1995423908010047>
- Khare S., Dell'Amico M., Knight C., McGarry S. 2012. Selection of materials for high temperature latent heat energy storage // Solar Energy Materials and Solar Cells. Vol. 107. Pp. 20–27. <https://doi.org/10.1016/j.solmat.2012.07.020>
- Khare S., Dell'Amico M., Knight C., McGarry S. 2013. Selection of materials for high temperature sensible energy storage // Solar Energy Materials and Solar Cells. Vol. 115. Pp. 114–122. <https://doi.org/10.1016/j.solmat.2013.03.009>
- Li Y., Zhou F., Zhang M., Deng L., Chen L., Mweemba S., Yang S., Shen G., Zhang X. 2025. Enhanced thermal performance of corundum-mullite ceramics via in-situ formation of Al-12Si@Al₂O₃ microcapsules // Ceramics International. Vol. 51. No. 24. Part A. Pp. 41512–41521. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2025.06.376>
- Manzolaro M., Corradetti S., Andrighetto A., Ferrari L. 2013. A steady-state high-temperature method for measuring thermal conductivity of refractory materials // Review of Scientific Instruments. Vol. 84. No. 5. Article 054902. <https://doi.org/10.1063/1.4804258>
- Mohan G., Venkataraman M. B., Coventry J. 2019. Sensible energy storage options for concentrating solar power plants operating above 600 °C // Renewable and Sustainable Energy Reviews. Vol. 107. Pp. 319–337. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2019.01.062>
- Nazir H., Batool M., Osorio F. J. B., Isaza-Ruiz M., Xu X., Vignarooban K., Phelan P., Inamuddin, Kannan A. M. 2019. Recent developments in phase change materials for energy storage applications: A review // International Journal of Heat and Mass Transfer. Vol. 129. Pp. 491–523. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.09.126>
- Šimonová P. Š., Bezdička P., Pabst W. 2026. Determination of the content, composition and density of the glass phase in silica refractories and its changes due to thermal cycling // Journal of the European Ceramic Society. Vol. 46. No. 9. Article 118235. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2026.118235>
- Woodbury K. A., Najafi H., de Monte F., Beck J. V. 2023. Inverse heat conduction problems // Inverse Heat Conduction. Book Chapter 1. / K. A. Woodbury, H. Najafi, F. Monte, J. V. Beck (Eds.). Pp. 1–23. <https://doi.org/10.1002/9781119840220.ch1>

References

- Boiko, E. E., Byk, F. L., Ilyushin, P. V., & Myshkina L. S. (2024). The role of electric and thermal energy storage in energy supply systems. *Electrical Stations*, 5(1114), 50–57. <https://doi.org/10.34831/EP.2024.1114.5.006> [In Russian]
- Bondarenko, S. L., Litovskiy, E. Ya., Ivanov, A. B., Borovetskaya, A. I., & Pakhomov, E. P. (1986). Heat and thermal conductivity of corundum refractories based on hollow spheres in the temperature range 500–2000 K in various gaseous media. *High Temperature Thermophysics*, 24(3), 618–619. [In Russian]
- Vatulyan, A. O., & Nesterov, S. A. (2019). On the peculiarities of solving the coefficient inverse problem of heat conduction for a two-part layer. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics*.

- Mechanics. Informatics*, 19(4), 409–423. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-409-423> [In Russian]
- Gribov, A. F., Zhidkov, E. N., & Krasnov, I. K. (2019). On the numerical solution of the inverse problem of heat conduction with radiation. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 1(21), 43–53. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2019-1-4353> [In Russian]
- Zhukovskaya, A. E., & Khlebnikova, I. Yu. (2006). Comparison of Russian and foreign standards for methods of determining the heat conductivity of refractories. *Refractories and Industrial Ceramics*, 2, 38–43. [In Russian]
- Zinurov, V. E., Chadaev, A. N., Dmitriev, A. V., Dmitrieva, O. S., Muginov, A. M., & Ziangirov, A. F. (2025). Theoretical and applied aspects of designing a high-temperature thermal energy storage system based on graphite material. *Bulletin of South Ural State University. Series "Power Engineering"*, 25(4), 71–81. <https://doi.org/10.14529/power250409> [In Russian]
- Kuznetsova, A. E., Skvortsova, M. P., & Stefanyuk, E. V. (2014). The inverse problem solution of heat conduction for the initial conditions identification of the boundary value problem. *Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series*, 3(43), 155–162. [In Russian]
- Tomochakov, M. M., & Berezovskaya, I. E. (2022). Analysis of the current state of the solution of inverse thermal conductivity problems and their application. *Universum: Technical Sciences*, 5-3(98), 39–44. <https://doi.org/10.32743/UniTech.2022.98.5.13591> [In Russian]
- Chirkin, V. S. (1968). *Thermophysical Properties of Nuclear Engineering Materials*. Atomizdat. [In Russian]
- Ashby, M. F. (2016). *Materials Selection in Mechanical Design*. Butterworth-Heinemann.
- Bigeard, A., Buchovecky, E., Mesnager, C., Bolore, D., Bouvard, D., & Jauffres, D. (2026). Modelling of sintering consolidation and thermal damage in a refractory ceramic. *Journal of the European Ceramic Society*, 46(3), 117893. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2025.117893>
- Kabanikhin, S. I., Hasanov, A., & Penenko, A. V. (2008). A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem. *Numerical Analysis and Applications*, 1, 34–45. <https://doi.org/10.1134/S1995423908010047>
- Khare, S., Dell'Amico, M., Knight, C., & McGarry, S. (2012). Selection of materials for high temperature latent heat energy storage. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 107, 20–27. <https://doi.org/10.1016/j.solmat.2012.07.020>
- Khare, S., Dell'Amico, M., Knight, C., & McGarry, S. (2013). Selection of materials for high temperature sensible energy storage. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 115, 114–122. <https://doi.org/10.1016/j.solmat.2013.03.009>
- Li, Y., Zhou, F., Zhang, M., Deng, L., Chen, L., Mweemba, S., Yang, S., Shen, G., & Zhang, X. (2025). Enhanced thermal performance of corundum-mullite ceramics via in-situ formation of Al-12Si@Al₂O₃ microcapsules. *Ceramics International*, 51(24), Part A, 41512–41521. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2025.06.376>
- Manzolaro, M., Corradetti, S., Andrighetto, A., & Ferrari, L. (2013). A steady-state high-temperature method for measuring thermal conductivity of refractory materials. *Review of Scientific Instruments*, 84(5), 054902. <https://doi.org/10.1063/1.4804258>
- Mohan, G., Venkataraman, M. B., & Coventry, J. (2019). Sensible energy storage options for concentrating solar power plants operating above 600 °C. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 107, 319–337. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2019.01.062>

- Nazir, H., Batoool, M., Osorio, F. J. B., Isaza-Ruiz, M., Xu, X., Vignarooban, K., Phelan, P., Inamuddin, & Kannan, A. M. (2019). Recent developments in phase change materials for energy storage applications: A review. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 129, 491–523. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.09.126>
- Šimonová, P. Š., Bezdička, P., & Pabst, W. (2026). Determination of the content, composition and density of the glass phase in silica refractories and its changes due to thermal cycling. *Journal of the European Ceramic Society*, 46(9), 118235. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2026.118235>
- Woodbury, K. A., Najafi, H., de Monte, F., & Beck, J. V. (2023). Inverse heat conduction problems. In K. A. Woodbury, H. Najafi, F. Monte, & J. V. Beck (Eds.), *Inverse Heat Conduction*. Book Chapter 1 (pp. 1–23). <https://doi.org/10.1002/9781119840220.ch1>

Информация об авторах

- Алексей Николаевич Чадаев, аспирант, кафедра оборудования пищевых производств, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия
ac312@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0004-3180-5933>
- Андрей Владимирович Дмитриев, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой автоматизации технологических процессов и производств, Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия
ieremiada@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-8979-4457>
- Рустем Ядгарович Биккулов, кандидат технических наук, преподаватель, кафедра инженерной графики, Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия
bikkulov-ry@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4783-147X>
- Оксана Сергеевна Дмитриева, доктор технических наук, доцент, доцент кафедры оборудования пищевых производств, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия
ja_deva@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6221-0167>

Information about the authors

- Aleksey N. Chadaev, Postgraduate Student, Department of Food Production Equipment, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia
ac312@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0004-3180-5933>
- Andrey V. Dmitriev, Dr. Sci. (Tech.), Professor, Head of the Department of Automation of Technological Processes and Productions, Kazan State Power Engineering University, Kazan, Russia
ieremiada@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-8979-4457>
- Rustem Ya. Bikkulov, Cand. Sci. (Tech.), Lecturer, Department of Engineering Graphics, Kazan State Power Engineering University, Kazan, Russia
bikkulov-ry@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4783-147X>
- Oksana S. Dmitrieva, Dr. Sci. (Tech.), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Food Production Equipment, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia
ja_deva@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6221-0167>

Спектральный анализ устойчивости уравнения теплопроводности с конвективными слагаемыми

Родион Максимович Скобликов^{1✉}, Елизавета Петровна Канонирова¹,
Александр Павлович Шевелёв¹, Александр Янович Гильманов¹,
Александра Викторовна Панова^{1,2}

¹ Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

² Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

Контакт для переписки: skoblikov.rodion@yandex.ru✉

Аннотация. Моделирование физических процессов является важным этапом в конструировании, прогнозировании, планировании. Огромную практическую значимость получили численные методы и, в частности, метод конечных разностей, который, однако, имеет ограничения. Указанные ограничения связаны с требованием устойчивого и сходящегося решения. Анализ устойчивости является классическим методом, однако результаты такого анализа для конкретных случаев мало изучены. Цель работы — выявление условий устойчивости при помощи метода Неймана для явной и неявной конечно-разностных схем двумерного уравнения теплопроводности с разными аппроксимациями конвективных слагаемых. Рассмотрены три различных типа аппроксимаций конвективных слагаемых и их влияние на условия устойчивости: разность назад, разность вперед, центральная разность. Продемонстрирован формализованный подход к проведению спектрального анализа и нахождения как достаточных условий устойчивости, так и необходимых. Для каждого случая аппроксимаций получены достаточные условия устойчивости, накладывающие строгое ограничение как на размерность пространственно-временной сетки, так и на область применения конкретных схем.

Ключевые слова: спектральный анализ устойчивости, уравнение теплопроводности, конвекция, метод Неймана, метод конечных разностей, численные методы, аппроксимация

Цитирование: Скобликов Р. М., Канонирова Е. П., Шевелёв А. П., Гильманов А. Я., Панова А. В. 2026. Спектральный анализ устойчивости уравнения теплопровод-

ности с конвективными слагаемыми // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 12. № 2 (46). С. 20–39. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-20-39>

Поступила 25.02.2026; одобрена 05.03.2026; принята 08.05.2026

Spectral stability analysis of the heat conduction equation with convective terms

Rodion M. Skoblikov¹✉, Elizaveta P. Kanonirova¹, Alexander P. Shevelev¹,
Alexander Ya. Gilmanov¹, Alexandra V. Panova^{1,2}

¹ University of Tyumen, Tyumen, Russia

² Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: skoblikov.rodion@yandex.ru✉

Abstract. Modeling of physical processes is an important stage in design, predicting, and planning. Numerical methods and the finite difference method in particular, have gained great practical importance, but the latter has limitations. These limitations are related to the requirement of a stable and convergent solution. Stability analysis is a classic method, but the results of such analysis for specific cases have been poorly studied. The aim of the paper is to identify stability conditions for explicit and implicit finite difference schemes of a two-dimensional heat equation with different approximations of convective terms by the Neumann method. Three different types of convective terms' approximations and their effect on stability conditions are studied: the backward difference, the forward difference, and the central difference. A formalized approach to spectral analysis and finding both sufficient and necessary stability conditions is demonstrated. For each case of approximations, sufficient stability conditions have been obtained that impose strong restrictions on both the dimension of the space-time grid and the scope of specific schemes.

Keywords: spectral stability analysis, heat equation, convection, Neumann method, finite difference method, numerical methods, approximation

Citation: Skoblikov, R. M., Kanonirova, E. P., Shevelev, A. P., Gilmanov, A. Ya., & Panova, A. V. (2026). Spectral stability analysis of the heat conduction equation with convective terms. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 12(2), 20–39. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-20-39>

Received Feb. 25, 2026; Reviewed Mar. 5, 2026; Accepted May 8, 2026

Введение

При решении многих прикладных задач описание реальных процессов требует применения численных методов, в частности конечно-разностного представления. Его использование сводится к дискретизации задачи и применению аппроксимирующих разностных схем, основной целью которых является разбиение исходной задачи на математически логичную последовательность арифметических операций, реализующихся посредством проведения численных экспериментов [Самарский, Гулин, 1989].

Введение новой формы описания исходной задачи неизбежно влечет за собой определенную расчетную погрешность, величина которой зависит от качества подбора параметров дискретизации и самой расчетной схемы. Для обеспечения достоверности расчета в рамках любого численного решения вводятся математические требования сходимости и устойчивости, выполнение которых выступает гарантом качества полученного решения.

Применение численных методов лежит в основе теплотехнических расчетов (проектирование и расчет эффективности теплообменных систем), моделирования биологических процессов терморегуляции организмов и переноса веществ в тканях и капиллярах, а также эти методы являются ключевыми при оценке температурного градиента в рамках бассейнового моделирования углеводородных систем и прогнозирования эффективности химического или теплового воздействия на флюидовмещающие породы.

В свою очередь, математическое представление процессов, обусловленных переносом тепла, сводится к необходимости описания поведения температуры в различных точках пространства с течением времени, что возможно в рамках применения уравнения теплопроводности и решения системы интегро-дифференциальных уравнений [Тихонов, Самарский, 1985].

Для численного поиска решения подобного рода систем могут использоваться явная, неявная и полунявная численные схемы. Первая обладает условной устойчивостью и может быть применена для широкого класса задач [Корчагина, Кашников, 2022; Issakhov et al., 2025; Сравнение конечно-разностных..., 2025]. Неявная же схема отличается представлением значения на текущем временном шаге как функции значений на этом же временном слое. Такое представление решения дифференциальных уравнений для большого класса задач является абсолютно устойчивым, однако не исключены и случаи условной устойчивости [Попов и др., 2022; Хайткулов, 2022; Майков, Макаров, 2024].

Описанные численные схемы также могут находить и совместное применение, как это реализовано в рамках полунявных схем, что обеспечивает повышение точности получаемого решения и его устойчивости относительно полностью явного представления [Сравнение конечно-разностных..., 2025; Таштемирова, 2025]. Однако важно заметить, что при решении задач с учетом конвективных членов выбор аппроксимирующих разностей может быть осложнен появлением физически необоснованных флуктуаций решения [Флетчер, 1991]. В таком случае аппроксимация конвективных членов должна рассматриваться отдельно.

С точки зрения возможных подходов к анализу устойчивости разностной схемы важно рассмотреть матричный анализ, базирующийся на условии Куранта–Фридрихса–Леви [Малышева, 2023], применяемом в рамках явных численных методов. Данное условие связывает скорость распространения возмущения целевой функции с временным шагом, принятым в рамках численной схемы. Сам же метод заключается в исследовании свойств матрицы перехода всей разностной схемы, объединяющей решения заданного уравнения на соседних временных слоях.

Оценка устойчивости разностной схемы может быть также проведена с точки зрения спектрального анализа (метод Неймана) [Naque et al., 2025]. В таком случае решение разностной задачи включает в себя представление численных решений в виде суперпозиций гармонических волн с различными длинами, где для каждой такой волны вычисляется коэффициент усиления, характеризующий измеряемую форму волны, преобразующуюся от одного временного слоя к следующему. С точки зрения математического описания этот подход предполагает представление возмущений целевой функции в виде рядов Фурье и анализ их поведения в разрезе времени. Именно от того, в каком направлении со временем будет изменяться амплитуда каждой такой гармоники (убывать или возрастать), зависит скорость накопления ошибки. В случае если хотя бы одна компонента спектра неограниченна и возрастает, схема считается неустойчивой.

Данный подход часто используется при рассмотрении задач теплопереноса, в рамках которых состояние системы описывается уравнением теплопроводности в линейном виде [Xie, Lei, 2019], однако в то же время имеет опыт применения и при наличии нелинейности в постановке задачи. Примером этого может служить решение модифицированного закона Фурье — уравнения Максвелла–Каттанео–Вернотте, описывающего немгновенный поток тепла, возникающий при флуктуациях температуры с учетом прямой зависимости коэффициентов теплопроводности от температуры [Ramosa et al., 2023]. Для получения точного численного решения авторы применяли явную конечно-разностную схему, оценка устойчивости которой базировалась на описанном выше подходе. Несмотря на наличие нелинейности в исходном уравнении, возможность применения метода Неймана была достигнута путем выполнения численной линеаризации.

В ряде исследований, посвященных численному моделированию нестационарного уравнения теплопроводности, особый акцент делается на возможных методах оценки устойчивости разностных схем и рассмотрении зависимости условия устойчивости от специфики задачи. Так, в работах [Формалев, Ревизников, 2004; Каримбаев, Рапилбекова, 2009а] отмечается, что точность аппроксимации и устойчивость решения уравнения теплопроводности нелинейно зависят от подбора пространственного шага разностной сетки и описываются обратной квадратичной зависимостью. Это также было подтверждено и результатами численной оценки устойчивости решения нестационарной задачи в работе [Каримбаев, Рапилбекова, 2009б]. При этом ученые исследовали и влияние характеристик материалов и типа разностной схемы (явная, неявная, Кранка–Николсона) на выбор временного шага при сохранении соблю-

дения условия устойчивости решения конечно-разностной схемы в приближении многослойной среды. Авторы работы подтвердили, что для сохранения устойчивости системы требуется соответствующее снижение величины временного шага выбранной схемы. Аналогично данному исследованию схема Кранка–Николсона также применялась при рассмотрении нестационарных процессов теплопереноса для случая неоднородных тел [Hirpho, 2022]. Так, благодаря применению указанной численной схемы, А. М. Икрамову [2025] удалось рассмотреть влияние геометрии медных включений на распространение температурного градиента в теле стального кубического образца. При этом, как указывает сам автор, выбор данной конечно-разностной схемы был обусловлен сохранением ее устойчивости относительно изменения величины шага по времени.

Стоит отметить, что геометрия области моделирования тепловых процессов также может в значительной мере оказать влияние на степень устойчивости численного решения. Например, в нефтегазовой отрасли наиболее распространенным приближением пространственного распределения температуры относительно скважины является радиальное. Однако при переходе к рассмотрению иных прикладных задач, где возникает необходимость учета более сложной геометрии, устойчивость может иметь характер, отличный от экспоненциального, а именно — полиномиальный. В связи с этим ряд исследователей рассматривали подходы к упрощению геометрического представления. В статье [Li, Gao, 2021] авторы выдвигают предположение о том, что нецилиндричность моделируемой области может быть учтена путем определения коэффициентов исходной системы уравнений (в том числе уравнения теплопроводности) как функций от времени. Примером может служить описание процесса роста кристаллов Чохральского, представление которого сводится к уравнению теплопроводности с коэффициентами теплопроводности, зависящими от времени.

Отдельный блок современных исследований связан с моделированием теплопроводности в многослойных и многослойно-пористых средах, где на границах слоев возникают существенные скачки коэффициентов теплопроводности. В этих исследованиях предлагаются специальные разностные схемы и подходы к аппроксимации граничных условий, направленные на повышение устойчивости и подавление численных осцилляций в окрестности границ раздела. Анализ устойчивости проводится как на основе спектральной теории, так и с использованием нормы целевой функции, что позволяет оценить влияние контрастности свойств слоев на поведение численного решения. Примерами таких работ могут послужить статьи [Краснопольский, Чесноков, 2023] и [Бештоков, 2025]. В первой представлена оценка устойчивости уравнения теплопроводности в рамках непосредственного решения прикладной задачи при рассмотрении процесса теплообмена в многокамерных стеклопакетах. Во второй же — подробный анализ устойчивости и скорости сходимости к решению уравнения теплопроводности с граничными условиями в постановке Дирихле. В качестве подхода к формированию априорных оценок автор в ней использует метод энергетических неравенств [Самарский, 1989].

Кроме того, стоит отметить, что среди возможных подходов к решению практикоориентированных задач отдельное место занимают работы, направленные на использование современных программных пакетов для анализа устойчивости, где гармонический и энергетический подходы реализуются в средах математического моделирования. В ряде публикаций показано, как можно выполнять анализ устойчивости схем с помощью численных вычислений. Так, например, в рамках современных исследований анализ устойчивости численного решения нестационарного уравнения теплопроводности также осуществлялся путем варьирования параметров расчетной сетки и изменения конфигурации граничных условий в среде Mathcad [Khankhasaev, Munyaev, 2025].

Хотя анализ устойчивости является классическим методом определения условий устойчивости, результаты такого анализа для конкретных типов уравнения и конечно-разностных схем мало представлены. Даже в рамках конкретного уравнения условия устойчивости могут отличаться в зависимости от подобранных аппроксимаций, типов схем и степени свободы. Кроме того, большинство практических задач связано с наличием различного рода неоднородностей. Поэтому исследование влияния конкретных условий и специфики задачи на различные конечно-разностные схемы является практически значимым направлением.

Целью данной работы является выявление условий устойчивости при спектральном анализе устойчивости (метод Неймана) для явной и неявной конечно-разностных схем двумерного уравнения теплопроводности с разными аппроксимациями конвективных слагаемых.

Методы

В данном исследовании проведен анализ устойчивости явной и неявной конечно-разностных схем двумерного однородного уравнения теплопроводности с учетом нестационарности процесса теплопереноса при помощи метода Неймана. При дальнейшем рассмотрении было принято, что изменение температуры в пространстве спровоцировано механизмами конвективного и кондуктивного теплообмена. Рассматриваемая область применения уравнения — моделирование тепломассопереноса в насыщенных пористых горных породах. Для определения влияния аппроксимации на условия устойчивости рассмотрены три разных типа аппроксимаций конвективных слагаемых: разность назад, разность вперед, центральная разность. При выводе условий устойчивости применено преобразование Эйлера. Вывод достаточных условий осуществлен при предположении о положительности линейных коэффициентов преобразованного уравнения ошибки и монотонности решения (метод положительных коэффициентов). Для обеспечения монотонности решения необходимо выполнение требования: сумма всех положительных коэффициентов не превышает единицы, что справедливо для однородных уравнений. При определении необходимых условий применены фундаментальные требования к определению экстремума функции.

Результаты исследования и их обсуждение

Спектральный анализ устойчивости явной численной схемы решения уравнения теплопроводности

Для разных задач могут применяться уравнения теплопроводности с различными размерностями, что продиктовано спецификой моделируемых процессов и особенностями рассматриваемой системы. Многомерная постановка задачи может сводиться к нахождению решения в пространствах меньшей размерности за счет введения допущений. К такому случаю можно отнести задачу о рассмотрении распределения температурного поля в насыщенной горной породе с симметричной однородностью.

Рассмотрим уравнение теплопроводности для задачи переноса тепла в горной породе с имеющимся флюидом-теплоносителем:

$$H_r \frac{\partial T}{\partial \tau} + H_s \vec{v} \cdot \text{grad}(T) = \alpha \cdot T, \quad (1)$$

где H_r, H_s — объемные теплоемкости горной породы и теплоносителя соответственно, T — температура, τ — время, v — скорость теплоносителя, α — теплопроводность насыщенной горной породы.

В двумерной постановке в декартовой системе координат уравнение (1) запишется следующим образом:

$$H_r \frac{\partial T}{\partial \tau} + v_x H_s \frac{\partial T}{\partial x} + v_y H_s \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Для перехода к конечно-разностному представлению данного уравнения немаловажным является выбор типа и порядка аппроксимации каждого из его членов. В инженерной практике центральная аппроксимация для производных второго порядка и односторонняя разностная аппроксимация для производных первого порядка являются наиболее распространенными. Ниже представлены соотношения для замены дифференциальных операторов соответствующими аппроксимирующими выражениями:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta \tau}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n}{\Delta y} \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}. \quad (6)$$

Различные представления для производных первого порядка по координате в уравнениях (3) и (4) называют разностью назад и разностью вперед. В зависимости от типа выбираемой численной схемы и особенностей задачи, при описании конвективных членов может быть удобным использование как первого, так и второго варианта. Еще одним примером представления дифференциального оператора конвективных членов является центральная разность — аппроксимация второго порядка:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\Delta y}.$$

Дифференциальные операторы более высоких порядков также могут быть представлены различными аппроксимациями. Аналогично можно заменить и дифференциальный оператор по времени. В рамках настоящей работы для производных по времени и Лапласиана рассматриваются аппроксимации (2), (5) и (6) соответственно.

Как говорилось ранее, тип аппроксимации влияет на устойчивость и ограничения применимости численной схемы. Само уравнение теплопроводности (1) является линейным и имеет постоянные коэффициенты, поэтому анализ устойчивости может быть проведен при помощи метода Неймана.

Функция ошибки численного решения двумерного уравнения теплопроводности методом конечных разностей может быть разложена на гармонику:

$$\tilde{T}_{k,j}^n = \lambda^n e^{ik\Psi} e^{ij\Omega}, \quad (7)$$

где $T_{k,j}^n$ — ошибка решения уравнения теплопроводности на n -м шаге по времени в пространственном узле k, j ; λ — коэффициент усиления; i — мнимая единица; Ψ, Ω — волновые числа гармоники.

Ошибка не будет накапливаться в том случае, если выполняется условие:

$$|\lambda| \leq 1. \quad (8)$$

Поскольку данное неравенство (8) требует, чтобы модуль числа не превосходил единицу, то устойчивость будет выполняться в следующем случае:

$$|\lambda|^2 \leq 1.$$

Формально выражение для оценки ошибки, вследствие линейности и постоянности коэффициентов уравнения теплопроводности, совпадает с самим уравнением теплопроводности. При подстановке (7) в явную схему получим:

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1} e^{ik\Psi} e^{ij\Omega} = & A' \cdot \lambda^n e^{i(k+1)\Psi} e^{ij\Omega} + B' \cdot \lambda^n e^{ik\Psi} e^{ij\Omega} + \\ & + C' \cdot \lambda^n e^{i(k-1)\Psi} e^{ij\Omega} + D' \cdot \lambda^n e^{ik\Psi} e^{i(j+1)\Omega} + E' \cdot \lambda^n e^{ik\Psi} e^{i(j-1)\Omega}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для получения выражения, описывающего величину λ , необходимо найти отношение уравнений (9) и (7):

$$\lambda = A' e^{i\Psi} + B' + C' e^{-i\Psi} + D' e^{i\Omega} + E' e^{-i\Omega}. \quad (10)$$

Для удобства дальнейшего анализа выражения (10) воспользуемся преобразованием Эйлера:

$$\begin{aligned} \lambda = & A' \cos \Psi + i A' \sin \Psi + B' + C' \cos \Psi - i C' \sin \Psi + \\ & + D' \cos \Omega + i D' \sin \Omega + E' \cos \Omega - i E' \sin \Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты A' , B' , C' , D' , E' принимают значения в соответствии с используемой аппроксимацией (табл. 1).

Таблица 1. Коэффициенты A' , B' , C' , D' , E' при разных аппроксимациях конвективных слагаемых в декартовой системе координат

Table 1. Coefficients A' , B' , C' , D' , E' for different approximations of convective terms in the Cartesian coordinate system

Разность вперед	Разность назад	Центральная разность
$A' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta x)^2} - \frac{H_s v_x}{\Delta x} \right)$	$A' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \right)$	$A' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta x)^2} - \frac{H_s v_x}{2\Delta x} \right)$
$B' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \left(\frac{H_r}{\Delta\tau} + \frac{H_s v_z}{\Delta z} - 2 \frac{\alpha}{(\Delta z)^2} - 2 \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} + \frac{H_s v_x}{\Delta x} \right)$	$B' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \left(\frac{H_r}{\Delta\tau} - \frac{H_s v_z}{\Delta z} - 2 \frac{\alpha}{(\Delta z)^2} - 2 \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} - \frac{H_s v_x}{\Delta x} \right)$	$B' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \left(\frac{H_r}{\Delta\tau} - 2 \frac{\alpha}{(\Delta z)^2} - 2 \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \right)$
$C' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \frac{\alpha}{(\Delta x)^2}$	$C' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta x)^2} + \frac{H_s v_x}{\Delta x} \right)$	$C' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta x)^2} + \frac{H_s v_x}{2\Delta x} \right)$
$D' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta z)^2} - \frac{H_s v_z}{\Delta z} \right)$	$D' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \frac{\alpha}{(\Delta z)^2}$	$D' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta z)^2} - \frac{H_s v_z}{2\Delta z} \right)$
$E' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \frac{\alpha}{(\Delta z)^2}$	$E' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta z)^2} + \frac{H_s v_z}{\Delta z} \right)$	$E' = \frac{\Delta\tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta z)^2} + \frac{H_s v_z}{2\Delta z} \right)$

Явные схемы всегда являются условно устойчивыми, поэтому для них определяются ограничения на пространственно-временную сетку. Традиционно устанавливают пределы изменения на временной шаг (подобно критерию Куранта–Фридрихса–Леви) при заданной пространственной сетке, что связано с простотой вывода такого ограничения. Найдя квадрат модуля (11) и выразив временной шаг, получим:

$$|\lambda|^2 = \frac{\Delta\tau^2}{H_r^2} \left((A \cdot \cos \Psi + B + C \cdot \cos \Psi + D \cdot \cos \Omega + E \cdot \cos \Omega)^2 + (A \cdot \sin \Psi - C \cdot \sin \Psi + D \cdot \sin \Omega - E \cdot \sin \Omega)^2 \right),$$

где $A = A' \frac{H_r}{\Delta\tau}$, $B = B' \frac{H_r}{\Delta\tau}$, $C = C' \frac{H_r}{\Delta\tau}$, $D = D' \frac{H_r}{\Delta\tau}$, $E = E' \frac{H_r}{\Delta\tau}$.

Тогда устойчивость численного решения уравнения теплопроводности при помощи явной схемы достигается при условии:

$$\frac{\Delta\tau^2}{H_r^2} \leq \frac{1}{z}, \quad (12)$$

где

$$z = (A \cos \Psi + B + C \cos \Psi + D \cos \Omega + E \cos \Omega)^2 + (A \sin \Psi - C \sin \Psi + D \sin \Omega - E \sin \Omega)^2.$$

После раскрытия скобок уравнения получаем:

$$\begin{aligned} z = & A^2 + C^2 + B^2 + D^2 + E^2 + 2AC \cos 2\Psi + 2DE \cos 2\Omega + \\ & + (2AB + 2CB) \cos \Psi + (2BD + 2BE) \cos \Omega + \\ & + (2AD + 2CE) \cos(\Psi - \Omega) + (2AE + 2CD) \cos(\Psi + \Omega). \end{aligned} \quad (13)$$

Предельный случай выполнения условия (12) достигается при максимально возможном значении функции (13), поэтому необходимо исследовать функцию z на глобальный максимум. Можно заметить, что функция (13) является периодической, непрерывной и бесконечно дифференцируемой, что обеспечивает существование глобального максимума. Его наличие будет обуславливать необходимое условие устойчивости, однако в инженерной практике популярностью пользуются достаточные условия устойчивости [Самарский, Гулин, 1973; Anderson et al., 2016; Ferziger, Perić, 2002; Diersch, 2014], которые выводятся из предположения о положительности линейных коэффициентов и монотонности решения. Эти условия дают жесткие ограничения, при которых точно выполняется устойчивость, однако такие условия не исключают устойчивость за пределами этих условий и могут сильно занижать требования к пространственно-временной

сетке. Достаточные условия устойчивости при разных аппроксимациях конвективных слагаемых с учетом теплоемкостей матрицы системы и флюида представлены в табл. 2. Разность вперед и центральная разность дают жесткое ограничение на число Пекле. Причем оно должно быть значительно меньше единицы, что возможно в случаях, когда процесс теплопередачи преобладает над конвективными процессами. Кроме того, для разности вперед вытекает дополнительное условие исходя из положительности коэффициентов — неотрицательная скорость. Центральная разность имеет порядок аппроксимации выше остальных, но также ограничена в применении для больших скоростей потока флюида в матрице. При разности назад условия не накладывают ограничения на число Пекле, что делает эту аппроксимацию более универсальной.

Таблица 2. Достаточные условия устойчивости при разных аппроксимациях конвективных слагаемых

Table 2. Sufficient stability conditions for different approximations of convective terms

Аппроксимация	Достаточное условие
Разность вперед	$Pe_x \leq \frac{1}{H_s}, Pe_z \leq \frac{1}{H_s}$
Разность назад	$\frac{v_x H_s}{\Delta x} + \frac{v_z H_s}{\Delta z} + 2 \left(\frac{\alpha}{\Delta x^2} + \frac{\alpha}{\Delta z^2} \right) \leq \frac{H_r}{\Delta \tau}$
Центральная разность	$Pe_x \leq \frac{2}{H_s}, Pe_z \leq \frac{2}{H_s}$

Оптимизация процесса вычислений может быть проведена при нахождении необходимых условий устойчивости, в том числе для неоднородных сеток и уравнений с непостоянными коэффициентами. Использование метода Неймана для такого случая возможно при привлечении вычислительных аппаратов и нахождении условий для каждой точки пространства и при каждом значении непостоянных коэффициентов.

Из уравнения (10) потенциально возможно установить максимальное значение, исходя из предположений о совпадении фаз векторов на комплексной плоскости. Каждый член в уравнении (10) является вектором на комплексной плоскости, и, следовательно, при синфазности векторов достигается их «резонанс». Однако такой подход не применим в рассматриваемой задаче ввиду взаимосвязанных требований к параметрам Ψ и Ω для каждого члена уравнения (10), где коэффициенты A, B, D в общем случае могут быть как положительными, так и отрицательными. Важно отметить, что само условие (12) является трансцендентным, то есть требует использование численных методов. В таком случае численно можно подобрать такие Ψ и Ω при заданном шаге, чтобы функция достигала максимального значения, после чего проверить условие (12) и при необходимости рассмотреть другое $\Delta \tau$. Однако такой подход трудоемок в вычислительном плане, а точность напрямую зависит от дискретизации параметров. С точки зрения

поиска решения могут быть использованы и другие вычислительные методы быстрого поиска — метод градиентного подъема (gradient boosting), например. Однако он также имеет ограничения и неудобен для решения периодических функций. Более строгое нахождение экстремумов связано с нахождением точек функции, удовлетворяющих необходимому и достаточному условиям экстремумов.

Пусть $M(\Psi, \Omega)$ — стационарные точки функции (13), тогда они должны соответствовать следующим условиям (необходимое условие экстремумов):

$$\frac{\partial z}{\partial \Psi} = -4AC \sin 2\Psi - (2AB + 2CB) \sin \Psi - (2AD + 2CE) \sin(\Psi - \Omega) - (2AE + 2CD) \sin(\Psi + \Omega) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Omega} = (2AD + 2CE) \sin(\Psi - \Omega) - (2AE + 2CD) \sin(\Psi + \Omega) - (2BD + 2BE) \sin \Omega - 4DE \cdot \sin 2\Omega = 0. \quad (15)$$

Рассматривая систему из уравнений (14) и (15), можно заметить, что необходимое условие экстремумов всегда выполняется в точках, в которых

$$\Psi, \Omega \in \pm \pi n, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3 \dots \Psi, \Omega \in \pm \pi n, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Другие критические точки возможно найти при подстановке конкретных значений коэффициентов A, B, C, D, E . Уравнения (14) и (15) являются нелинейными, и аналитическое решение такой системы может быть представлено при помощи следующих подходов:

- 1) применение базисов Грёбнера;
- 2) нахождение значений переменных, при которых результат равен нулю (при таком подходе корнями будут являться тригонометрические функции либо параметры, в случае параметризации системы).

Вышеуказанные подходы крайне затруднительно использовать без применения автоматизированных вычислений. Для большинства языков программирования уже существуют специальные библиотеки для указанных подходов. В рамках численных методов для решения системы можно рассматривать итерационные методы, как, например, метод Ньютона.

Из всех возможных точек M интересуют те, при которых функция z достигает максимального значения.

Достаточное условие экстремума функции:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \Psi^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \Omega^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \Omega \partial \Psi} \right)^2 \right) \Big|_M > 0.$$

Причем если $\frac{\partial^2 z}{\partial \Psi^2} \big|_M < 0$, то функция z имеет максимум в исследуемой точке, если $\frac{\partial^2 z}{\partial \Psi^2} \big|_M > 0$ — минимум.

Вторые производные соответственно равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial \Psi^2} &= -8AC \cos 2\Psi - (2AB + 2CB) \cos \Psi - \\ &\quad - (2AD + 2CE) \cos(\Psi - \Omega) - (2AE + 2CD) \cos(\Psi + \Omega), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \Omega \partial \Psi} &= (2AD + 2CE) \cos(\Psi - \Omega) - (2AE + 2CD) \cos(\Psi + \Omega), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \Omega^2} &= -8DE \cos 2\Omega - (2BD + 2BE) \cos \Omega \\ &\quad - (2AD + 2CE) \cos(\Psi - \Omega) - (2AE + 2CD) \cos(\Psi + \Omega). \end{aligned}$$

Уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат дает идентичное решение, но с другими коэффициентами A' , B' и C' , представленными в табл. 3.

Таблица 3. Коэффициенты A' , B' , C' , D' , E' при разных аппроксимациях конвективных слагаемых в цилиндрической системе координат

Table 3. Coefficients A' , B' , C' , D' , E' for different approximations of convective terms in a cylindrical coordinate system

Разность вперед	Разность назад	Центральная разность
$A' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta r)^2} - \frac{H_s v_r}{\Delta r} + \frac{\alpha}{\Delta r \cdot r} \right)$	$A' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta r)^2} \right)$	$A' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta r)^2} - \frac{H_s v_r}{\Delta r} + \frac{\alpha}{\Delta r \cdot r} \right)$
$B' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \left(\frac{H_r}{\Delta \tau} + \frac{H_s v_z}{\Delta z} - 2 \frac{\alpha}{(\Delta z)^2} - 2 \frac{\alpha}{(\Delta r)^2} + \frac{H_s v_r}{\Delta r} - \frac{\alpha}{\Delta r \cdot r} \right)$	$B' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \left(\frac{H_r}{\Delta \tau} - \frac{H_s v_z}{\Delta z} - 2 \frac{\alpha}{(\Delta z)^2} - 2 \frac{\alpha}{(\Delta r)^2} - \frac{H_s v_r}{\Delta r} + \frac{\alpha}{\Delta r \cdot r} \right)$	$B' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \left(\frac{H_r}{\Delta \tau} - 2 \frac{\alpha}{(\Delta z)^2} - 2 \frac{\alpha}{(\Delta r)^2} + \frac{\alpha}{\Delta r \cdot r} \right)$
$C' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \frac{\alpha}{(\Delta r)^2} C' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \frac{\alpha}{(\Delta r)^2}$	$C' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta r)^2} + \frac{H_s v_r}{\Delta r} - \frac{\alpha}{\Delta r \cdot r} \right)$	$C' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta r)^2} + \frac{H_s v_r}{\Delta r} - \frac{\alpha}{\Delta r \cdot r} \right)$
$D' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta z)^2} - \frac{H_s v_z}{\Delta z} \right)$	$D' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \frac{\alpha}{(\Delta z)^2}$	$D' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta z)^2} - \frac{H_s v_z}{\Delta z} \right)$
$E' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \frac{\alpha}{(\Delta z)^2}$	$E' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta z)^2} + \frac{H_s v_z}{\Delta z} \right)$	$E' = \frac{\Delta \tau}{H_r} \left(\frac{\alpha}{(\Delta z)^2} + \frac{H_s v_z}{\Delta z} \right)$

Спектральный анализ устойчивости неявной численной схемы решения уравнения теплопроводности

Различие явной и неявной численных схем главным образом заключается в том, что узлы пространственно-временной сетки при применении неявного метода организуют геометрию относительно «следующего» временного слоя. Для учета данной особенности аналогично явной отдельно был проведен спектральный анализ для неявной численной схемы.

Рассмотрим уравнение теплопроводности с аппроксимацией «разность назад» для конвективных слагаемых. Уравнение ошибки в неявной схеме в таком случае можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{H_r}{\Delta \tau}(\lambda - 1) + \frac{H_s v_x \lambda}{\Delta x}(1 - e^{-i\Psi}) + \frac{H_s v_z \lambda}{\Delta z}(1 - e^{-i\Omega}) = \\ = \frac{\alpha \lambda}{(\Delta x)^2}(e^{i\Psi} - 2 + e^{-i\Psi}) + \frac{\alpha \lambda}{(\Delta z)^2}(e^{i\Omega} - 2 + e^{-i\Omega}). \end{aligned}$$

Выразив λ и применив преобразование Эйлера и тригонометрические преобразования, можно получить квадрат модуля λ :

$$|\lambda|^2 = \frac{1}{Q} \leq 1,$$

$$Q = (1 + (2a + 4c)\frac{\Psi}{2} + (2b + 4d)\frac{\Omega}{2})^2 + (a \cdot \sin \Psi + b \cdot \sin \Omega)^2 \geq 1.$$

$$\text{где } a = \frac{H_s v_x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta \tau}{H_r}, \quad b = \frac{H_s v_z}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta \tau}{H_r}, \quad c = 4 \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{\Delta \tau}{H_r}, \quad d = 4 \frac{\alpha}{(\Delta z)^2} \cdot \frac{\Delta \tau}{H_r}.$$

Видно, что условие (8) для неявной схемы уравнения теплопроводности с аппроксимацией «разность назад» конвективных членов выполняется при любых Ψ и Ω , а значит, является абсолютно устойчивой.

При рассмотрении центральной разности получим:

$$Q = (1 + 4c \frac{\Psi}{2} + 4d \frac{\Omega}{2})^2 + (a \sin \Psi + b \sin \Omega)^2 \geq 1.$$

Откуда также видно, что условие устойчивости всегда выполняется.

Если рассмотреть аппроксимацию «разность вперед», то может быть получено:

$$Q = (1 + (4c - 2a)\frac{\Psi}{2} + (4d - 2b)\frac{\Omega}{2})^2 + (a \sin \Psi + b \sin \Omega)^2 \geq 1.$$

В этом случае первое слагаемое уже необязательно больше единицы, что ранее обеспечивало абсолютную устойчивость. Значит, можно полагать, что устойчивость в этом

случае не является абсолютной: существует такой набор параметров, при котором условие устойчивости не выполняется. С другой стороны, видно, что и при такой аппроксимации условие устойчивости будет всегда выполнено в случае, когда коэффициенты a и b отрицательны или крайне малы. Это возможно в двух случаях: при очень маленьких скоростях (например, диффузия твердых тел) или отрицательной скорости (направление скорости не совпадает с направлением моделирования).

При рассмотрении уравнения теплопроводности в цилиндрической системе условия устойчивости получаются идентичными условиям в декартовой системе. Отличия возникают при определении коэффициентов:

$$a = \frac{H_s v_r r - \alpha}{r \Delta r} \cdot \frac{\Delta \tau}{H_r}, \quad c = 4 \frac{\alpha}{(\Delta r)^2} \cdot \frac{\Delta \tau}{H_r}.$$

Заключение

В данной работе исследованы условия устойчивости численных схем решения уравнения теплопроводности с использованием различных типов и порядков аппроксимации для дифференциальных операторов, в частности на примере нестационарного процесса теплопереноса с учетом конвективных членов, рассмотрен метод Неймана и на его основе представлен формализованный алгоритм анализа устойчивости явной и неявной численных схем. Для уравнения теплопроводности данный алгоритм позволяет вычислить существующие ограничения для пространственно-временной сетки, а также установить для них взаимосвязь с безразмерными параметрами, характеризующими специфику процессов тепломассопереноса (число Пекле).

Показано, что при применении явной схемы возможно использование как достаточных, так и необходимых условий для получения более полного и строгого анализа устойчивости. Отдельно продемонстрированы достаточные условия устойчивости при разных типах аппроксимации конвективных слагаемых. По результатам проведенного анализа выявлено, что важным фактором в достижении устойчивости является правильный выбор способа аппроксимации пространственных производных. Так, достаточные условия для аппроксимаций «разность вперед» и «центральной разности» накладывают ограничения на число Пекле, в то время как аппроксимация «разность назад» имеет более гибкие достаточные условия и может использоваться при больших числах Пекле.

Установлено, что устойчивость неявных схем при использовании аппроксимации «разность назад» и «центральная разность» является абсолютной. Условие устойчивости схемы при аппроксимации «разность вперед» для конвективных слагаемых выполняется в двух случаях: маленькие конвективные скорости или отрицательная скорость.

Результаты анализа, проведенного в данном исследовании, могут быть в дальнейшем использованы для валидации и разработки устойчивых разностных схем при поиске численного решения целого класса задач, в частности и при моделировании течения флюида-теплоносителя в пористых средах.

Список источников

- Бештоков М. Х. 2025. Разностные схемы повышенного порядка точности для нагруженных уравнений теплопроводности с граничными требованиями первого рода // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. Том 29. № 2. С. 220–240. <https://doi.org/10.14498/vsgtu2142>
- Икрамов А. М. 2025. Численное моделирование трехмерных нестационарных процессов теплопроводности в неоднородных телах // Проблемы вычислительной и прикладной математики. № 1 (63). С. 99–107.
- Каримбаев К. Д., Рапилбекова Н. С. 2009а. Численная оценка точности пространственной дискретизации уравнений теплопроводности // Известия Самарского научного центра РАН. Т. 11. № 5-1. С. 138–143.
- Каримбаев К. Д., Рапилбекова Н. С. 2009б. Численная оценка устойчивости разностных схем теплопроводности для многослойных сред // Известия Самарского научного центра РАН. Т. 11. № 3. С. 98–102.
- Корчагина О. Р., Кашников В. И. 2022. Аппроксимация переноса эволюционных процессов с распределенными параметрами в неустойчивой сети // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2022): сборник трудов международной научной конференции (г. Воронеж, 13–16 дек. 2022 г.) / под ред. В. В. Провоторова. Воронеж: Воронежский гос. пед. ун-т. С. 30–32.
- Краснопольский Б. И., Чесноков С. А. 2006. Математическое моделирование теплофизических свойств стеклопакетов // Научная сессия МИФИ-2006: сборник научных трудов. Т. 7. Астрофизика. Космофизика. Математические методы. Ускорительная техника. М.: Тип. МИФИ. С. 122–123.
- Майков Д. Н., Макаров С. С. 2024. Метод ускорения численного решения дифференциального уравнения пьезопроводности модели пласта с двойной пористостью // Математическое моделирование и численные методы. 2024. № 3 (43). С. 15–28. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2024-3-317>
- Мальшев С. В. 2023. Программная реализация численного метода Лакса–Фридрихса для моделирования нестационарных задач газовой динамики // Управление большими системами. № 105. С. 30–40. <https://doi.org/10.25728/ubs.2023.105.2>
- Попов С. В., Боронина А. С., Немчинова А. В. 2022. Сравнение конечно-разностных схем для их применения при создании математических моделей гляциологических и гидрологических процессов // Успехи современного естествознания. № 11. С. 73–81. <https://doi.org/10.17513/use.37931>
- Самарский А. А., Гулин А. В. 1973. Устойчивость разностных схем. М.: Наука. 415 с.
- Самарский А. А., Гулин А. В. 1989. Численные методы: учебное пособие для вузов. М.: Наука. 432 с.
- Таштемирова Н. 2025. Математическая модель и численный алгоритм для исследования процесса распространения пылевых и мелкодисперсных аэрозолей в атмосфере // Проблемы вычислительной и прикладной математики. № 1 (63). С. 57–76. https://doi.org/10.71310/psam.1_63.2025.05
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1985. Уравнения математической физики. М.: Наука. 392 с.

- Флетчер К. 1991. Вычислительные методы в динамике жидкости: в 2 т. / Пер. с англ. М.: Мир. Т. 1. 320 с.
- Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. 2004. Численные методы. М.: Физматлит. 400 с.
- Хайткулов Б. Х. 2022. Численное моделирование нестационарной задачи конвекции-диффузии в трехмерном случае // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. Том 37. № 2. С. 33–41. <https://doi.org/10.21779/2542-0321-2022-37-2-33-41>
- Anderson D., Tannehill J. C., Pletcher R. H. 2016. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press. 774 p. <https://doi.org/10.1201/b12884>
- Diersch H.-J. G. 2014. FEFLOW: Finite Element Modeling of Flow, Mass and Heat Transport in Porous and Fractured Media. Berlin–Heidelberg: Springer. 996 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-38739-5>
- Ferziger J. H., Perić M. 2002. Computational Methods for Fluid Dynamics. 3rd ed. Berlin–Heidelberg: Springer. 426 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2>
- Haque M. N., Akter R., Mojumder M. S. H. 2025. An efficient explicit scheme for solving the 2D heat equation with stability and convergence analysis // Journal of Applied Mathematics and Physics. No. 13. Pp. 2234–2244. <https://doi.org/10.4236/jamp.2025.137127>
- Hirpho M. 2022. Numerical solution of the heat transfer equation coupled with the Darcy flow using the finite element method // Abstract and Applied Analysis. No. 4. Pp. 1–9. <https://doi.org/10.1155/2022/5108445>
- Issakhov A., Abylkassymova A., Zhailybaev R., Yun S. 2025. Stability condition of finite difference schemes for parabolic and hyperbolic equations: A comparison with finite volume methods for fractional-order diffusion // Herald of the Kazakh-British Technical University. № 1. С. 45–60. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-1-184-196>
- Khankhasaev V. N., Munyaev S. M. 2025. Initial-boundary-value problems for some nonlinear mixed heat conductivity operators // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 292. Pp. 383–391. <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07923-w>
- Li L., Gao H. 2021. The stability and stabilization of heat equation in non-cylindrical domain // Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 493. No. 2. Article 124538. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124538>
- Ramosa A., Campelo A., Freitas M., Kovács R. 2023. Numerical analysis of the Maxwell–Cattaneo–Vernotte nonlinear model // Journal of Thermal Stresses. Vol. 47 (9). Pp. 1262–1276. <https://doi.org/10.1080/01495739.2024.2391749>
- Xie Y., Lei P. 2019. On global boundedness, stability and almost periodicity of solutions for heat equations // Funkcialaj Ekvacioj. Vol. 62. No. 2. Pp. 191–208. <https://doi.org/10.1619/fesi.62.191>

References

- Beshtokov, M. Kh. (2025). Higher-order difference schemes for the loaded heat conduction equations with boundary conditions of the first kind. *Journal of Samara State Technical University. Series Physical and Mathematical Sciences*, 29(2), 220–240. <https://doi.org/10.14498/vsgtu2142> [In Russian]

- Ikramov, A. M. (2025). Numerical modeling of three-dimensional unsteady heat conduction processes in inhomogeneous bodies. *Problems of Computational and Applied Mathematics*, 1(63), 99–107. [In Russian]
- Karimbaev, T. D., & Rapiibekova, N. S. (2009a). Numerical estimation of accuracy at space discretation of heat conductivity equations. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 11(5-1), 138–143. [In Russian]
- Karimbaev, K. D., & Rapiibekova, N. S. (2009b). Numerical estimation of stability of heat conductivity difference equations for layer medium. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 11(3), 98–102. [In Russian]
- Korchagina, O. R., & Kashnikov, V. I. (2022). Approximation of transport of evolutionary processes with distributed parameters in an unstable network. In V. V. Provotorov (ed.), *Proceedings of the International Scientific Conference "Modern Methods of Applied Mathematics, Control Theory and Computer Technologies (PMTUKT-2022)"* (December 13–16, Voronezh) (pp. 30–32). Voronezh State Pedagogical University [In Russian]
- Krasnopol'skii, B. I., & Chesnokov, S. A. (2006). Mathematical modeling of thermophysical properties of insulating glass units. In *Scientific Session of MIPhI-2006. Vol. 7. Astrophysics. Cosmophysics. Mathematical Methods. Accelerator Techniques* (pp. 122–123). MIPhI Printing House. [In Russian]
- Maikov, D. N., & Makarov, S. S. (2024). The efficient method for numerical solution of dual porosity reservoir model. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 3(43), 15–28. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2024-3-317> [In Russian]
- Malyshev, S. V. (2023). Software implementation of the Lax–Friedrichs numerical method for modelling nonstationary problems of gas dynamics. *Large-Scale Systems Control*, 105, 30–40. <https://doi.org/10.25728/ubs.2023.105.2> [In Russian]
- Popov, S. V., Boronina, A. S., & Nemchinova, A. V. (2022). Comparison of finite difference schemes for their in the formulation of mathematical models of glaciological and hydrological processes. *Advances in Current Natural Sciences*, 11, 73–81. <https://doi.org/10.17513/use.37931>
- Samarskii, A. A., & Gulin, A. V. (1973). *Stability of Difference Schemes*. Nauka. [In Russian]
- Samarskii, A. A., & Gulin, A. V. (1989). *Numerical Methods*. Nauka. [In Russian]
- Tashtemirova, N. (2025). Mathematical model and numerical algorithm for studying the process of dispersion of dust and fine aerosols in the atmosphere. *Problems of Computational and Applied Mathematics*, 1(63), 57–76. https://doi.org/10.71310/pcam.1_63.2025.05 [In Russian]
- Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. (1985). *Equations of Mathematical Physics*. Nauka. [In Russian]
- Fletcher, K. (1991). *Computational Methods in Liquid Dynamics in 2 Volumes. Vol. 1* (Translated from English). Mir. [In Russian]
- Formalev, V. F., & Reviznikov, D. L. (2004). *Numerical Methods*. Fizmatlit. [In Russian]
- Khaitkulov, B. Kh. (2022). Numerical modeling of non-stationary convection-diffusion problem in the three-dimensional case. *Herald of Dagestan State University. Series 1. Natural Sciences*, 37(2), 33–41. <https://doi.org/10.21779/2542-0321-2022-37-2-33-41> [In Russian]
- Anderson, D., Tannehill, J. C., & Pletcher, R. H. (2016). *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer* (3rd ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b12884>

- Diersch, H.-J. G. (2014). *FEFLOW: Finite Element Modeling of Flow, Mass and Heat Transport in Porous and Fractured Media*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-38739-5>
- Ferziger, J. H., & Perić, M. (2002). *Computational Methods for Fluid Dynamics* (3rd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2>
- Haque, M. N., Akter, R., & Mojumder, M. S. H. (2025). An efficient explicit scheme for solving the 2D heat equation with stability and convergence analysis. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 13, 2234–2244. <https://doi.org/10.4236/jamp.2025.137127>
- Hirpho, M. (2022). Numerical solution of the heat transfer equation coupled with the Darcy flow using the finite element method. *Abstract and Applied Analysis*, 4, 1–9. <https://doi.org/10.1155/2022/5108445>
- Issakhov, A., Abylkassymova, A., Zhailybaev, R., & Yun, S. (2025). Stability condition of finite difference schemes for parabolic and hyperbolic equations: A comparison with finite volume methods for fractional-order diffusion. *Herald of the Kazakh-British Technical University*, 1, 45–60. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-1-184-196>
- Khankhasaev, V. N., & Munyaev, S. M. 2025. Initial-boundary-value problems for some nonlinear mixed heat conductivity operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 292, 383–391. <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07923-w>
- Li, L., & Gao, H. (2021). The stability and stabilization of heat equation in non-cylindrical domain. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 493(2), 124538. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124538>
- Ramosa, A., Campelo, A., Freitas, M., & Kovács, R. (2023). Numerical analysis of the Maxwell–Cattaneo–Vernotte nonlinear model. *Journal of Thermal Stresses*, 47(9), 1262–1276. <https://doi.org/10.1080/01495739.2024.2391749>
- Xie, Y., & Lei, P. (2019). On global boundedness, stability and almost periodicity of solutions for heat equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, 62(2), 191–208. <https://doi.org/10.1619/fesi.62.191>

Информация об авторах

Родион Максимович Скобликов, аспирант, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия
skoblikov.rodion@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0007-2241-246X>

Елизавета Петровна Канонирова, аспирант, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия
stud0000123797@study.utmn.ru, <https://orcid.org/0009-0009-7472-2093>

Александр Павлович Шевелёв, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры моделирования физических процессов и систем, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия
a.p.shevelev@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0017-4871>

Александр Янович Гильманов, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра моделирования физических процессов и систем, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия
a.y.gilmanov@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7115-1629>

Александра Викторовна Панова, старший преподаватель, кафедра иностранных языков, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия; доцент, кафедра моделирования физических процессов и систем, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия
panovaav@tyuiu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3180-6990>

Information about the authors

Rodion M. Skoblikov, Postgraduate Student, University of Tyumen, Tyumen, Russia
skoblikov.rodion@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0007-2241-246X>

Elizaveta P. Kanonirova, Postgraduate Student, University of Tyumen, Tyumen, Russia
stud0000123797@study.utmn.ru, <https://orcid.org/0009-0009-7472-2093>

Alexander P. Shevelev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Professor of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, Tyumen, Russia
a.p.shevelev@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0017-4871>

Alexander Ya. Gilmanov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Modeling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, Tyumen, Russia
a.y.gilmanov@utmn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7115-1629>

Alexandra V. Panova, Senior Lecturer, Department of Foreign Languages, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia; Associate Professor, Department of Modeling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, Tyumen, Russia
panovaav@tyuiu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3180-6990>

Механизмы вытеснения нефти из пористой среды с использованием наножидкостей на основе углеродных наночастиц

Руслан Фаридович Сафаргалиев¹✉, Юрий Вавилович Пахаруков¹,
Борис Семенович Ездин², Сергей Александрович Васильев²,
Александр Сергеевич Чупров¹, Роман Дмитриевич Гуменюк¹,
Фарид Канафеевич Шабиев^{1,3}

¹ Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

² Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

³ Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

Контакт для переписки: safargalievrf@tyuiu.ru ✉

Аннотация. В данной работе приведен мини-обзор существующих методов повышения нефтеотдачи и места технологий вытеснения с использованием наночастиц углерода. Предлагается новый механизм вытеснения нефти из пористой среды, присущий только углеродным наночастицам и связанный с образованием самоорганизующейся наноструктурированной пленки на границе раздела сред углеводород–наножидкость. В данном исследовании предложена экспериментальная методика наблюдения за процессами формирования и движения пленки при движении флюидов относительно друг друга и относительно твердой поверхности (монокристалл кремния). Показано, что в процессе движения пленки относительно подложки образуются гофрированные поверхности, ускоряющие движение флюидов. Гофрированная поверхность пленки есть результат неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. В работе вводится новый безразмерный параметр, равный отношению сил Ван-дер-Ваальса и капиллярных сил.

Ключевые слова: многослойный графен, наножидкости на основе графена, механизм вытеснения нефти, неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, капиллярно-ван-дер-ваальсово число

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-71-00047 (<https://rscf.ru/project/25-71-00047/>).

Цитирование: Сафаргалиев Р. Ф., Пахаруков Ю. В., Ездин Б. С., Васильев С. А., Чупров А. С., Гуменюк Р. Д., Шабиев Ф. К. 2026. Механизмы вытеснения нефти

из пористой среды с использованием наножидкостей на основе углеродных наночастиц // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 12. № 2 (46). С. 40–59. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-40-59>

Поступила 27.02.2026; одобрена 06.03.2026; принята 10.03.2026

Mechanisms of oil displacement from a porous medium using nanofluids based on carbon nanoparticles

Ruslan F. Safargaliev¹✉, Yuri V. Pakharukov¹, Boris S. Ezdin²,
Sergey A. Vasilev², Alexander S. Chuprov¹, Roman D. Gumenyuk¹,
Farid K. Shabiev^{1,3}

¹ Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia

² Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

³ University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: safargalievrf@tyuiu.ru ✉

Abstract. This paper provides a mini-review of existing methods for increasing oil recovery and the location of carbon nanoparticle displacement technologies. A new mechanism of oil displacement from a porous medium is proposed, which is unique to carbon nanoparticles and is associated with the formation of a self-organizing nanostructured film at the interface between hydrocarbon and nanofluid media. In this study, an experimental technique is proposed for observing the processes of film formation and motion during the movement of fluids relative to each other and relative to a solid surface (monocrystalline silicon). It is shown that during the movement of the film relative to the substrate, corrugated surfaces are formed, accelerating the movement of fluids. The corrugated surface of the film is the result of the Kelvin–Helmholtz instability. The paper introduces a new dimensionless parameter equal to the ratio of Van der Waals forces and capillary forces.

Keywords: multilayer graphene, graphene-based nanofluids, oil displacement mechanism, Kelvin–Helmholtz instability, capillary Van Der Waals number

Acknowledgements: the study was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 25-71-00047 (<https://rscf.ru/project/25-71-00047/>).

Citation: Safargaliev, R. F., Pakharukov, Yu. V., Ezdin, B. S., Vasilev, S. A., Chuprov, A. S., Gumenyuk, R. D. & Shabiev, F. K. (2026). Mechanisms of oil displacement from

a porous medium using nanofluids based on carbon nanoparticles. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 12(2), 40–59. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-40-59>

Received Feb. 27, 2026; Reviewed Mar. 6, 2026; Accepted Mar. 10, 2026

Список сокращений

ТРИЗ — трудноизвлекаемые запасы.
КИН — коэффициент извлечения нефти.
МУН — методы увеличения нефтеотдачи.
ПАВ — поверхностно-активные вещества.
ASP — Alkaline–Surfactant–Polymer (щелочь–ПАВ–полимер).
МН — межфазное натяжение.
УНЖ — углеродная наножиждкость.
АСМ — атомно-силовая микроскопия.

Введение

Трудноизвлекаемые запасы стали основой российской нефтедобычи, и их доля по прогнозам достигнет 80% к 2030 году [Алтунина, Кувшинов, 2007; Алтунина и др., 2012]. Более 70% отечественных ТРИЗ сосредоточено в низкопроницаемых и карбонатных коллекторах [Isaev et al., 2019; Alekseev et al., 2019]. КИН при традиционном заводнении таких объектов не превышает 10–20% [Круглов, Мое, 2018]. В среднем по России с применением современных МУН извлекается около 34% от начальных запасов, что указывает на значительный потенциал для модернизации технологий третичного воздействия [Sheng et al., 2015].

К широко применяемым химическим МУН относятся технологии на основе ПАВ, ASP (щелочь–ПАВ–полимер) и гели. Анионные полиакриламиды способствуют снижению межфазного натяжения и подавлению морфологической неустойчивости [Биз и др., 1990; Измайлова, Ямпольская, 1992]. Однако их эффективность критически зависит от минерализации пластовой воды. В условиях высокой и динамически меняющейся минерализации, характерной для многих российских месторождений [Алтунина и др., 2014], микроэмульсии теряют стабильность, что снижает эффективность вытеснения [Биз и др., 1990; Идогова и др., 2014]. Комбинированная закачка щелочи, ПАВ и полимера позволяет повысить КИН на 15–25% за счет синергетического эффекта [Alekseev et al., 2019; Алтунина и др., 2011; Алтунина и др., 2012]. Механизм основан на снижении МН и гидрофобности породы [Мартосов, 1974; Усманова и др., 2013]. Однако технология имеет существенные недостатки: высокая стоимость специализированных ПАВ [Alekseev et al., 2019; Nelson et al., 1984], чувствительность реагентов к пластовым условиям, риски коррозии оборудования и негативное экологическое

воздействие [Мартосов, 1974; Усманова и др., 2013; Нажису, Ерофеев, 2017]. Гелевые системы применяются для изоляции высокопроницаемых зон и перераспределения фильтрационных потоков. Однако они не решают проблему снижения МН на границе фаз нефть–вода, что может приводить к преждевременным прорывам вытесняющего агента [Алтунина и др., 2014; Алтунина и др., 2011; Ганеева и др., 2013]. Таким образом, ключевыми проблемами традиционных методов являются низкая стабильность в жестких пластовых условиях (высокая температура, давление, минерализация) и высокая стоимость.

Использование наночастиц [Хавкин, 2010; Peng et al., 2017; El-Masry et al., 2023], в частности углеродных [Bahiraei, Heshmatian, 2019; Iravani et al., 2023; Kang et al., 2022; Zhao et al., 2024], представляет собой перспективное направление для повышения нефтеотдачи пластов. Эти материалы работают за счет воздействия на физико-химические свойства границы раздела фаз: нефть–вода, нефть–порода, вода–порода [Glushchenko et al., 2012; Savitskaya, Kholodova, 1969; Zhu et al., 2016; Amin Foisal, 2025]. Воздействия могут осуществляться как на отдельные границы раздела, так и в комбинациях, отсюда выделяются различные механизмы повышения нефтеотдачи.

Один из механизмов — изменение смачиваемости породы. Так, наножидкости на основе модифицированного оксида графена, диоксида кремния (SiO_2) или диоксида циркония (ZrO_2) способны изменять смачиваемость поверхности коллектора с олеофильной (гидрофобной) на гидрофильную. Например, обработка карбонатного керна модифицированным оксидом графена снижает угол смачивания с 161° до 35° [Jafarbeigi et al., 2022]. Подобный эффект подтвержден и для других неорганических наночастиц [Karimi et al., 2012]. Кроме того, возможно снижение МН. Адсорбируясь на границе раздела нефть–вода, наночастицы снижают МН. В исследованиях с оксидом графена МН снижалось с 18,45 мН/м до 8,8 мН/м, что способствовало увеличению коэффициента вытеснения [Jafarbeigi et al., 2022].

Другой механизм — создание расклинивающего давления. Наночастицы, такие как сульфированный графен, могут создавать расклинивающее давление, способствующее отделению нефтяной пленки от поверхности породы. Этот механизм признан доминирующим в ряде исследований и может приводить к повышению коэффициента вытеснения на 19% и более [Radnia et al., 2018; Хавкин, 2010].

Еще один механизм связан со стабилизацией эмульсий и пен (эффект Пикеринга). Углеродные наночастицы, адсорбируясь на границе раздела фаз, формируют прочные барьеры, создавая эмульсии и пены, значительно более устойчивые к высокой температуре, давлению и минерализации, чем системы на основе обычных ПАВ [Dong et al., 2019; Li et al., 2022, Yousufi et al., 2025].

Регулирование реологических свойств и числа подвижности также определяет условие для повышения нефтеотдачи. Введение наночастиц изменяет вязкость вытесняющего агента. Зависимость вязкости наножидкости от объемной доли частиц (φ) описывается уравнением [Рудяк и др., 2009]:

$$\mu_{NF} = \mu_{BF}(a\varphi^2 + b\varphi + 1), \quad (1)$$

где μ_{NF} , μ_{BF} — коэффициент динамической вязкости наножидкости и базовой жидкости соответственно; φ — объемная доля наночастиц.

Управление вязкостью позволяет оптимизировать число подвижности M , подавляя развитие вязкостной пальцеобразной неустойчивости («вязких пальцев») и повышая охват пласта воздействием [Гиматулинов, 1982; Pakharukov et al., 2022; Ali et al., 2023; Шабиев и др., 2022; Пахаруков, 2018]:

$$M = \frac{k_w \mu_o}{k_o \mu_w}, \quad (2)$$

где μ_o , μ_w — коэффициент динамической вязкости нефти и воды соответственно; k_w , k_o — фазовая проницаемость для воды и нефти соответственно.

Введение наночастиц приводит к существенному росту вязкости базовой жидкости при положительных коэффициентах a и b . Применение наножидкостей в качестве вытесняющего агента позволяет подавлять развитие «вязкостных пальцев». В частности, исследованиями [Pakharukov et al., 2022; Ali et al., 2023; Шабиев и др., 2022] установлено, что вязкость наножидкостей на основе графена может как возрастать, так и снижаться в зависимости от концентрации и структуры углеродных наночастиц:

$$\mu_{NF} = \mu_{BF} \left[th \left(\frac{A\varphi}{RT} \right) - th \left(\frac{B\varphi}{RT} \right) + a\varphi^2 + b\varphi + 1 \right], \quad (3)$$

где A и B — эмпирические константы.

Данный механизм увеличения КИН посредством введения углеродных наночастиц был экспериментально подтвержден в работах [Пахаруков и др., 2018; Ezdin et al., 2022; Пахаруков и др. 2020], где показано подавление формирования «вязкостных пальцев» в модельной ячейке Хеле–Шоу.

Для углеродных наноструктур описан особый механизм — формирование упругой наноструктурированной межфазной пленки, которая действует как подвижный поршень, эффективно вытесняя нефть. Лабораторные эксперименты демонстрируют, что данный механизм может увеличивать коэффициент вытеснения более чем на 6% и повышать проницаемость [Luo et al., 2016; Пахаруков, Шабиев, Григорьев, Сафаргалиев, Поточняк, 2019; Пахаруков и др., 2022]. Повышение проницаемости связывается с формированием гофрированных поверхностей, включающих молекулы углеводородов и наночастицы графена [Пахаруков, Шабиев, Григорьев, Сафаргалиев, Поточняк, 2019; Пахаруков и др., 2022; Пахаруков, Шабиев, Мавринский, Сафаргалиев, Воронин, 2019].

Научная новизна настоящего исследования заключается в изучении динамики формирования и движения пленки, включая анализ связанных с ней гофрированных структур и неустойчивостей. В работе показан новый механизм вытеснения нефти с помощью наножидкости на основе наночастиц углерода.

Материалы и методы

УНЖ были синтезированы при помощи ультразвукового диспергирования исходных углеродных наночастиц в дистиллированной воде с определенной концентрацией.

Синтез наночастиц углерода осуществлялся с использованием химического реактора сжатия пиролизом ацетилена и моносилана в атмосфере буферного газа по методике [Ezdin et al., 2022].

Для изучения динамики формирования гофрированных пленок была сконструирована установка, изображенная на рис. 1.

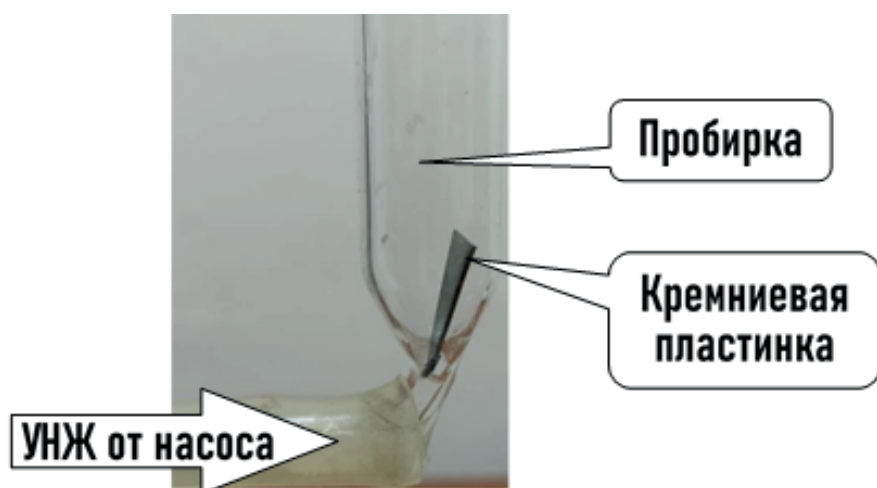


Рис. 1. Рабочая часть установки по изучению динамики формирования гофрированных пленок

Fig. 1. Working part of the installation for studying the dynamics of corrugated film formation

В пробирку из нижней части насосом закачивается подготовленная УНЖ так, что она покрывает часть кремниевой пластинки. Сверху наливается жидкий углеводород (парафин) при температуре, близкой к кристаллизации $\sim 56^\circ\text{C}$. Далее система выдерживается в термостате 3 часа до образования наноструктурированной пленки. После чего температура начинает уменьшаться, и в этот момент насос прокачивает наножидкость, имитируя движение границы раздела в капилляре. В процессе движения образовавшаяся пленка формирует на поверхности кремниевой пластинки структурированные образования. Далее кремниевая пластинка извлекается и подвергается анализу поверхности с применением АСМ на атомно-силовом микроскопе Ntegra Aura (NT-MDT). Исследование с помощью АСМ проводилось полуконтактным способом на участке площадью приблизительно 1 см^2 . Для понимания динамики развития неустойчивости и формирования гофрированных поверхностей изучение структуры пленки производилось в разных областях пластинки, для чего на нее была нанесена лазерная маркировка в виде линейки.

Результаты и обсуждения

На рис. 2 можно видеть образование наноструктурированной пленки на границе УНЖ–парафин. Данная пленка сформирована после 3 часов выдержки в термостате при температуре 60 °С.



Рис. 2. Образование наноструктурированной плѐнки на межфазной границе УНЖ–парафин

Fig. 2. Formation of a nanostructured film at the interfacial boundary carbon nanofluid – paraffin

Подробно структура пленки изучалась ранее в работах [Ezdin et al., 2022; Pakharukov et al., 2021; Пахаруков и др., 2025; Пахаруков, Шабиев, Мавринский, Сафаргалиев, Воронин, 2019]. Рассмотрение структуры поверхности пленки в результате движения границы раздела показало наличие гофрированной поверхности (рис. 3).

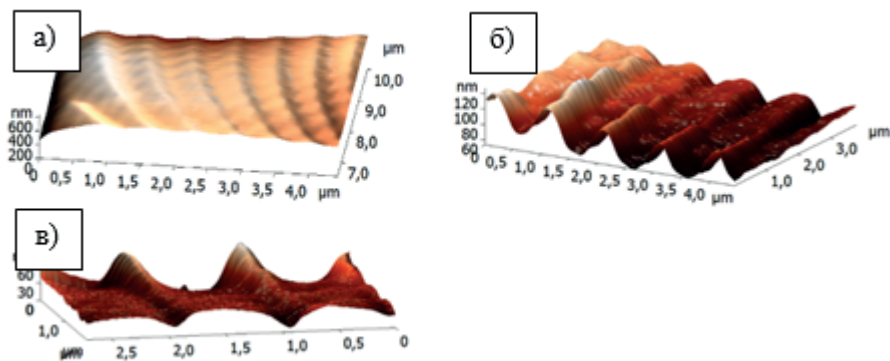


Рис. 3. АСМ изображения структуры поверхности пленки

Fig. 3. Atomic force microscopy image of the film surface structure

Рассмотрим динамику образования гофрированных формирований. На рис. 3а показана поверхность пленки в начальной точке формирования гофрированных образований. На рис. 3б показана промежуточная область на расстоянии 5 мм от начальной точки. На рис. 3в показана структура поверхности на последнем участке — 15 мм от начала отчета. В начальной области на координате 0 мм пленка подвергалась большому воздействию со стороны движущегося флюида, при этом амплитуда является максимальной и составляет $28 \pm 0,1$ нм. Пики гофрированной поверхности ярко выражены и расположены плотно друг к другу. Длина волны гофры составляет 1025 ± 1 нм. На поверхности можно рассмотреть дисперсию в виде коротковолновых образований с длиной волны 200 нм. На следующем промежутке период воздействия был меньше предыдущего, и поэтому область имеет гофрированную поверхность с амплитудой гребней в $7 \pm 0,1$ нм, что меньше предыдущего отрезка (рис. 3б). Форма гребней не отличается. Однако на последнем отрезке форма пиков меняется, и амплитуда также ниже и составляет $3 \pm 0,1$ нм, длина волны сохраняется и составляет 1025 ± 1 нм. Таким образом, можно наблюдать процесс формирования неустойчивостей на различных этапах.

Изучим математическую модель образования неустойчивости, описанной в эксперименте. Рассмотрим две несжимаемые жидкости, между которыми располагается пленка толщиной h_0 (рис. 4).

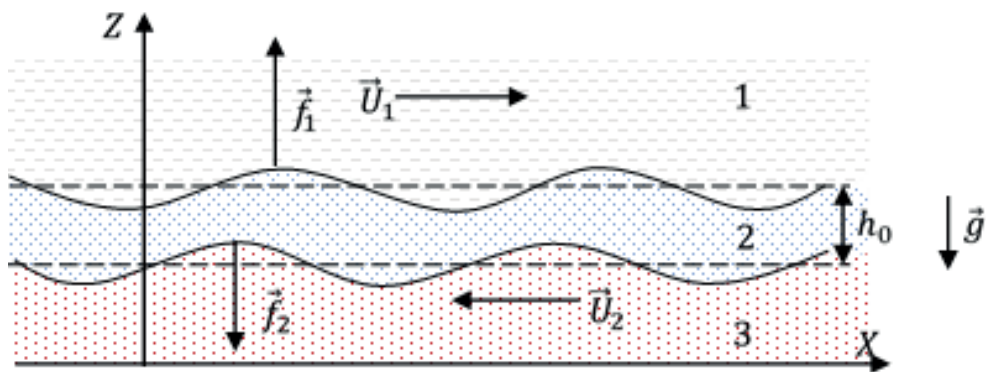


Рис. 4. Геометрия задачи: 1 — углеводород плотностью ρ_1 , 2 — пленка толщиной h_0 , 3 — УНЖ плотность ρ_2

Fig. 4. Problem geometry: 1 — hydrocarbon with density ρ_1 , 2 — film with thickness h_0 , 3 — density of carbon nanofluid ρ_2

Исходные уравнения гидродинамики для каждой жидкости ($j = 1, 2$) запишем в следующем виде:

$$\rho_j \left[\frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial t} + (\mathbf{V}_j \cdot \nabla) \mathbf{V}_j \right] = -\nabla p_j + \rho_j \mathbf{g} + \rho_j \mathbf{f}_j + \mu_j \nabla^2 \mathbf{V}_j,$$

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{V}_j = 0, \quad (4)$$

где $V_j = (U_j, w_j)$, U_j — горизонтальная и w_j — вертикальная составляющие скорости, плотности ρ_j и динамические вязкости μ_j , жидкостей ($j = 1, 2$), f_j — удельная ван-дер-ваальсова сила, g — ускорение силы тяжести.

Плоская граница раздела $z = 0$ в невозмущенном состоянии. Верхняя жидкость ($j = 1$) — углеводород. Нижняя жидкость ($j = 2$) — УНЖ. Течение происходит вдоль оси x . Возмущение границы запишем в виде: $z = \eta(x, t) = \eta_0 \exp(ikx - i\omega t)$.

До возмущения жидкости движутся с постоянными горизонтальными скоростями $\vec{U}_1$ (углеводород) и $\vec{U}_2$ (УНЖ). Вертикальные скорости равны нулю. Давление в каждой жидкости постоянно по горизонтали и меняется с высотой по гидростатическому закону с поправкой на силу Ван-дер-Ваальса (f_j), действующую на молекулы/частицы у границы раздела. Она определяется как градиент потенциала Леннарда–Джонса $U(z)$. Для тонкой пленки (малые z) доминирует притягивающая часть потенциала ($\sim \frac{1}{z^3}$ — например, для взаимодействия графена с молекулами углеводородов аппроксимируется как $\frac{A}{z^n}$, где A — константа Гамакера, $n \sim 3 \div 4$ [Пахаруков, Шабиев, Мавринский, Сафаргалиев, Воронин, 2019; Френкель, 1975]). Для малых возмущений можно разложить силу в ряд по η .

Решая уравнения (4) по методикам, приведенным в работах [Пахаруков и др., 2022; Пахаруков, Шабиев, Мавринский, Сафаргалиев, Воронин, 2019; Саночкин, 2003], получим выражения для фазовой скорости c :

$$c = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{\sigma k + \frac{\Pi'}{k}}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \cdot (U_1 - U_2)^2}, \quad (5)$$

где σ — поверхностное натяжение.

Произведем анализ устойчивости и найдем критические длины волн. Волны неустойчивы при условии $\operatorname{Im}(\omega) = k \operatorname{Im}(c) > 0$. Условие начала неустойчивости (нейтральная устойчивость):

$$\frac{\sigma k + \frac{\Pi'(h_0)}{k}}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (U_1 - U_2)^2$$

или

$$\sigma k + \frac{\Pi'}{k} = \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} (U_1 - U_2)^2. \quad (6)$$

Рассмотрим влияние сил Ван-дер-Ваальса на устойчивость системы.

$\Pi'(h_0) > 0$ (для притягивающего потенциала). На малых k (длинные волны) доминирует член $\frac{\Pi'(h_0)}{k}$ — Ван-дер-Ваальсовое взаимодействие стабилизирует длинные волны. На больших k (короткие волны) доминирует член $\sigma \cdot k$ — поверхностное натяжение стабилизирует короткие волны.

Существует критическая длина волны $\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m}$, где величина $\left(\sigma k + \frac{\Pi'}{k}\right)$ минимальна. Находим минимум:

$$\frac{d}{dk} \left(\sigma k + \frac{\Pi'}{k} \right) = \sigma - \frac{\Pi'}{k^2} = 0 \Rightarrow k_m = \sqrt{\frac{\Pi'(h_0)}{\sigma}}. \quad (7)$$

При этом волновом числе стабилизирующий эффект минимален. Подставляя k_m в (7), получаем критическую разность скоростей для возникновения неустойчивости:

$$(U_1 - U_2)_{crit}^2 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \cdot 2\sqrt{\sigma \Pi'(h_0)}. \quad (8)$$

Если $(U_1 - U_2)^2 > (U_1 - U_2)_{crit}^2$ то существует диапазон волновых чисел k , для которых выражение под корнем в (6) отрицательно, и система неустойчива. Неустойчивыми будут волны, для которых k лежит в интервале, где

$$\sigma k + \frac{\Pi'}{k} < \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} (U_1 - U_2)^2.$$

Это квадратное неравенство относительно k . Решая, находим $k_{min} < k < k_{max}$, определяется балансом инерции и поверхностного натяжения. k_{min} определяется балансом инерции и сил Ван-дер-Ваальса. Силы Ван-дер-Ваальса подавляют очень длинноволновые возмущения ($k \rightarrow 0$).

Из уравнения (6) и выражения $c = \frac{\omega}{k}$ получим дисперсионное уравнение:

$$\omega = k \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm k \sqrt{\frac{\sigma k + \frac{\Pi'(h_0)}{k}}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (U_1 - U_2)^2}, \quad (9)$$

где $\Pi'(h_0) = \frac{A}{2\pi h_0^4}$, A — постоянная Гамакера.

Введем безразмерный параметр — отношение сил Ван-дер-Ваальса к капиллярным силам, или капиллярно-ван-дер-ваальсовое число $CvdW$:

$$CvdW = \frac{A}{\sigma \cdot h^2},$$

где A — постоянная Гамакера, σ — коэффициент поверхностного натяжения, h — характерный размер. В данном случае под величиной h будем понимать толщину пленки. Рассмотрим также капиллярное число

$$Ca = \frac{\mu(U_1 - U_2)}{\sigma}.$$

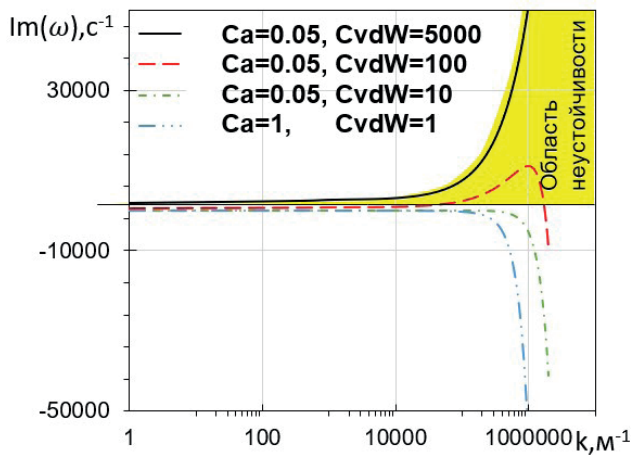


Рис. 5. Анализ дисперсионного уравнения (закрашенная область — область неустойчивости)

Fig. 5. Dispersion equation analysis (highlighted area — unstable area)

В результате анализа дисперсионного уравнения (10) можно видеть, что при малых числах $Ca < 0,01$ и при сверхбольших значениях числа $CvdW \gg 1$ область неустойчивости формируется для всего диапазона волновых чисел. Это означает, что при большом ван-дер-ваальсовом взаимодействии молекул углеводородов и углеродных наночастиц формирование неустойчивости возможно для любых волн: длинных ~ 1 мм, коротких ~ 1 мкм и сверхкоротких ~ 100 нм (рис. 5). Так, на дисперсионной кривой при числах $Ca = 0,005$ и $CvdW = 5000$ можно видеть такое поведение системы (рис. 5, черная сплошная линия). Однако такое значение числа $CvdW$ возможно при очень сильном ван-дер-ваальсовом взаимодействии с коэффициентом Гамакера $A \sim 10^{-17}$ Дж. При средних значениях числа $CvdW = 100$ и малом значении $Ca = 0,005$ можно видеть, что область неустойчивости уменьшается и ее проявление возможно для коротких и сверхкоротких волн (рис. 5, пунктирная красная линия). При малом ван-дер-ваальсовом взаимодействии $CvdW \leq 10$ формирование неустойчивости невозможно, потому как

капиллярные силы становятся преобладающими и неустойчивость развивается по классическому сценарию с образованием гравитационно-капиллярных волн, где верхняя жидкость должна быть с большей плотностью (рис. 5, зеленая штрихпунктирная линия). При малых значениях $C_{vdW} \leq 1$ и больших числах $Ca \geq 1$ также развитие неустойчивости невозможно (рис. 5, синяя штрих – двойная пунктирная линия).

Рассмотрим один из возможных механизмов вытеснения пленочной нефти, в основе которого лежит формирование гофрированных образований, являющихся результатом неустойчивости гидродинамического течения двух вязких жидкостей. Пленка образуется на межфазной границе нефть – УНЖ. В процессе движения флюидов пленка оказывается на стенке капилляра. Таким образом, нефтяная пленка оказывается зажатой между пленкой и поверхностью капилляра (рис. 6). В результате проявления неустойчивости Кельвина–Гельмгольца нарастающая амплитуда волн приводит к смыву пленочной нефти.



Рис. 6. Механизм вытеснения нефти с образованием гофрированной наноструктурированной пленки

Fig. 6. Oil displacement mechanism with the formation of a corrugated nanostructured film

Заключение

Исследование механизма вытеснения нефти с использованием наночастиц углерода показало, что в процессе движения флюидов образовавшаяся наноструктурированная гибридная пленка переходит на поверхность капилляра, образуя гофрированные образования. Теоретический анализ экспериментальных данных указывает, что гофрированные образования — это результат гидродинамического движения флюидов относительно друг друга или неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. В результате изучения теоретического материала было получено дисперсионное уравнение, которое показывает, что основной вклад в формирование неустойчивости вносят ван-дер-ваальсовы силы взаимодействия молекул углеводородов и наноструктурированной углеродной пленки. Проявление неустойчивости возможно при условии малости капиллярных чисел $Ca < 0,01$ и больших значениях капиллярно ван-дер-ваальсового числа $C_{vdW} \gg 1$. Проявление подобной неустойчивости лежит в основе механизма вытеснения пленочной нефти из капилляров пористой среды.

Список источников

- Алтунина Л. К., Кувшинов В. А. 2007. Физико-химические методы увеличения нефтеотдачи пластов нефтяных месторождений // Успехи химии. Том 76. № 10. С. 1034–1052. <https://doi.org/10.1070/RC2007v076n10ABEH003723>
- Алтунина Л. К., Кувшинов В. А., Кувшинов И. В. 2014. Физико-химические технологии с применением гелей, золь и композиций ПАВ для увеличения нефтеотдачи месторождений на поздней стадии разработки // Георесурсы. № 4 (59). С. 20–27.
- Алтунина Л. К., Кувшинов В. А., Кувшинов И. В. 2011. Залежи с трудно извлекаемыми запасами. Комплексная технология увеличения нефтеотдачи // Oil & Gas Journal Russia. № 6. С. 110–116.
- Алтунина Л., Кувшинов В., Кувшинов И., Урсегов С. 2012. Композиции для увеличения нефтеотдачи залежей высоковязких нефтей // Oil & Gas Journal Russia. № 7. С. 44–51.
- Бизэ Ж., Клэн Б., Лаланн П. 1990. Микроэмульсии. Структура и динамика / под ред.: С. Е. Фриберг, П. Боторель. М.: Мир. 319 с.
- Ганеева З. М., Хисаметдинов М. Р., Ризванов Р. З., Мусабилов М. Х. 2013. Развитие технологий повышения нефтеотдачи, основанных на применении силикатного геля в ОАО «Татнефть» // Нефтяное хозяйство. № 8. С. 82–84.
- Гиматудинов Ш. К. 1982. Физика нефтяного и газового пласта. М.: Недра. 311 с.
- Идогова Я. В., Прочухан К. Ю., Прочухан Ю. А. (2014). Влияние минерализации воды на реологические свойства полимера // Башкирский химический журнал. Том 21. № 4. С. 80–82.
- Измайлова В. Н., Ямпольская Г. П. 1992. Структурно-механический барьер // Успехи коллоидной химии и физико-химической механики. М.: Наука. С. 103.
- Мартос В. Н. 1974. Применение полимеров в нефтедобывающей промышленности. М.: ВНИИОЭНГ. 95 с.
- Нажису, Ерофеев В. И. 2017. Исследование и применение комплексной технологии заводнения для повышения нефтеотдачи пластов // Успехи современного естествознания. № 10. С. 96–100.
- Пахаруков Ю. В., Шабиев Ф. К., Григорьев Б. В., Сафаргалиев Р. Ф., Поточняк И. Р. 2019. Фильтрация нефти в пористой среде при наличии наночастиц графена // Прикладная механика и техническая физика. Том 60. № 1. С. 37–40.
- Пахаруков Ю. В., Шабиев Ф. К., Мавринский В. В., Сафаргалиев Р. Ф., Воронин В. В. 2019. Формирования волновой структуры на поверхности графеновой пленки // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. Том 109. № 9. С. 634–638.
- Пахаруков Ю. В., Шабиев Ф. К., Сафаргалиев Р. Ф. 2018. Вытеснение нефти из пористой среды с использованием графитовой суспензии // Письма в Журнал технической физики. Том 44. № 4. С. 3–8.
- Пахаруков Ю. В., Шабиев Ф. К., Сафаргалиев Р. Ф., Галунин Е. В. 2025. Иерархия процессов самоорганизации и самосборки на примере роста пленок на границе «углеводород–графеновый нанофлюид» // Журнал технической физики. Том 95. № 3. С. 565–574.
- Пахаруков Ю. В., Шабиев Ф. К., Сафаргалиев Р. Ф., Ездин Б. С., Каляда В. В. 2020. Использование нанофлюидов на основе углеродных наночастиц для вытеснения нефти из модели

- пористой среды // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 6. № 4 (24). С. 141–157.
- Пахаруков Ю. В., Шабиев Ф. К., Сафаргалиев Р. Ф., Шабиева А. В. 2022. Увеличение проницаемости микрокапилляра со стенками покрытыми гофрированной графеновой пленкой // Прикладная механика и техническая физика. Том 63. № 6. С. 116–121.
- Рудяк В. Я., Белкин А. А., Егоров В. В. 2009. Об эффективной вязкости наносuspensions // Журнал технической физики. Том 79. № 8. С. 18–25.
- Саночкин Ю. В. 2003. Ван-дер-ваальсовы волны в жидкостях со свободной поверхностью // Журнал технической физики. Том 73. № 5. С. 24–29.
- Усманова Л. Р., Прочухан К. Ю., Прочухан Ю. А. 2013. Поверхностно-активные вещества для интенсификации процессов нефтедобычи // Fundamental Science and Technology — Promising Developments II. Vol. 1. М.: Научно-издательский центр «Академический». С. 196–200.
- Френкель Я. И. 1975. Кинетическая теория жидкостей. Ленинград: Наука. 592 с.
- Хавкин А. Я. 2010. Наноявления и нанотехнологии в добыче нефти и газа. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 691 с.
- Шабиев Ф. К., Пахаруков Ю. В., Сафаргалиев Р. Ф., Ездин Б. С., Васильев С. А. 2022. Снижение вязкости нефти с добавлением графеновых нанопластинок // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 8. № 3 (31). С. 106–125.
- Alekseev A. N., Bogoviz A. V., Goncharenko L. P., Sybachin S. A. 2019 A critical review of Russia's energy strategy in the period until 2035 // International Journal of Energy Economics and Policy. Vol. 9. No. 6. Pp. 95–102.
- Ali I., Pakharukov Yu. V., Shabiev F. K., Galunin E. V., Safargaliev R. F., Vasiljev S. A., Ezdin B. S., Burakov A. E., AlOthman Zeid A., Sillanpää Mika. 2023. Preparation of graphene based nanofluids: Rheology determination and theoretical analysis of the molecular interactions of graphene nanoparticles // Journal of Molecular Liquids. Vol. 390. Article 122954.
- Bahiraei M., Heshmatian S. 2019. Graphene family nanofluids: A critical review and future research directions // Energy Conversion and Management. Vol. 196. Pp. 1222–1256.
- Dong Z. et al. 2019. Carbon nanoparticle-stabilized Pickering emulsion as a sustainable and high-performance interfacial catalysis platform for enzymatic esterification/transesterification // ACS Sustainable Chemistry & Engineering. Vol. 7. No. 8. Pp. 7619–7629.
- El-Masry J. F. et al. 2023. A comprehensive review on utilizing nanomaterials in enhanced oil recovery applications // Energies. Vol. 16. No. 2. Article 691.
- Ezdin B. S., Pakharukov Yu. V., Kalyada V. V., Shabiev F. K. et al. 2022. The novel method of synthesis of nanostructured materials for the enhancing recovery in oil displacement technologies // Catalysis Today. Vol. 397–399. Pp. 249–256.
- Foaisal A. R., Imran A. B., Chowdhury A. N. 2025. Eco-friendly biomass-based carbon dots, carbon nanotubes, graphene, and their derivatives for enhanced oil recovery: A new horizon for petroleum industry // ChemistryOpen. Vol. 14. No. 7. Article e202400353.

- Glushchenko V.N., Kuz'micheva E.O., Dashkina E.F. 2012 Development of environmentally friendly surfactants and their adaptation to the conditions of the oil industry. The development of science at the present stage. // *Tsentr naukovykh publikatsii Publ.* pp. 20-25.
- Iravani M., Khalilnezhad Z., Khalilnezhad A. 2023. A review on application of nanoparticles for EOR purposes: History and current challenges // *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*. Vol. 13. Pp. 959–994.
- Isaev V. I., Kuzmenkov S. G., Ayupov R. Sh., Kuzmin Yu. A., Lobova G. A., Stulov P. A. 2019. Hard-to-recover reserves of Yugra oil (West Siberia) // *Geophysical Journal*. Vol. 41. No. (1). Pp. 33–43.
- Jafarbeigi E., Salimi F., Kamari E., Mansouri M. 2022. Effects of modified graphene oxide (GO) nanofluid on wettability and IFT changes: Experimental study for EOR applications // *Petroleum Science*. Vol. 19. No. 4. Pp. 1779–1792.
- Kang W. L. et al. 2022. Advances in enhanced oil recovery technologies for low permeability reservoirs // *Petroleum Science*. Vol. 19. No. 4. Pp. 1622–1640.
- Karimi A. et al. 2012. Wettability alteration in carbonates using zirconium oxide nanofluids: EOR implications // *Energy & Fuels*. Vol. 26. No. 2. Pp. 1028–1036.
- Kryukov V., Moe A. 2018. Does Russian unconventional oil have a future? // *Energy Policy*. Vol. 119. Pp. 41–50. <https://doi.org/10.1016/j.enpol.2018.04.021>
- Li W. et al. 2022. Recent advances on Pickering emulsions stabilized by diverse edible particles: Stability mechanism and applications // *Frontiers in Nutrition*. Vol 9. Article 864943.
- Luo D., Wang F., Zhu J., Cao F., Liu Y., Li X. et al. 2016. Nanofluid of graphene-based amphiphilic Janus nanosheets for tertiary or enhanced oil recovery: High performance at low concentration // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. Vol. 113. No. 28. Pp. 7711-7716.
- Nelson R. C., Lawson J. B., Thigpen D. R. & Stegemeier G. L. 1984. Cosurfactant-enhanced alkaline flooding // *SPE Enhanced Oil Recovery Symposium*. SPE 12672. <https://doi.org/10.2118/12672-MS>
- Pakharukov Yu. V., Shabiev F. K., Safargaliev R. F., Volkova S. S. 2021. Quenching of graphene suspension photoluminescence with saturated hydrocarbons // *Colloid and Interface Science Communications*. Vol. 42. Article 100431.
- Pakharukov Yu., Shabiev F., Safargaliev R., Mavrinskii V., Vasiljev S., Ezdin B., Grigoriev B., Salihov R. 2022. The mechanism of oil viscosity reduction with the addition of graphene nanoparticles // *Journal of Molecular Liquids*. Vol. 361. Article 119551.
- Peng B. et al. 2017. A review of nanomaterials for nanofluid enhanced oil recovery // *RSC Advances*. Vol. 7. No. 51. Pp. 32246–32254.
- Radnia H. et al. 2018. A novel nanofluid based on sulfonated graphene for enhanced oil recovery // *Journal of Molecular Liquids*. Vol. 271. Pp. 795–806.
- Savitskaya M. N., Kholodova Yu.D. 1969 Polyacrylamide. // *Tekhnika Publ.* 18 p.
- Sheng J. J., Leonhardt B., Azri N. 2015. Status of polymer-flooding technology // *Journal of Canadian Petroleum Technology*. Vol. 54 (02). Pp. 116–126. <https://doi.org/10.2118/174541-pa>
- Yousufi M. M. et al. 2025. Evaluation of activated carbon as a Pickering emulsion stabilizer for conformance control at high temperature and salinity: A focus on stability and rheology // *Journal of Molecular Liquids*. Vol. 419. Article 126764.

- Zhao M. et al. 2024. Review on principles, influence and applications of nanomaterials in enhancing oil recovery // *Fuel*. Vol. 371. Article. 131985.
- Zhu Y. Y., Zhang Y., Niu J. L., Liu W. D., Hou Q. F. 2016. The progress in the alkali-free surfactant-polymer combination flooding technique // *Petroleum Exploration and Development*. Vol. 39. No. 3.

References

- Altunina, L. K., & Kuvshinov, V. A. (2007). Physico-chemical methods for increasing oil recovery from oil fields. *Russian Chemical Reviews*, 76(10), 1034–1052. <https://doi.org/10.1070/RC2007v076n10ABEH003723> [In Russian]
- Altunina, L. K., Kuvshinov, V. A., & Kuvshinov, I. V. (2014). Physico-chemical technologies using gels, sols and surfactant compositions. *Georesources*, (4), 20–27. [In Russian]
- Altunina, L. K., Kuvshinov, V. A., & Kuvshinov, I. V. (2011). Deposits with difficult-to-recover reserves. Complex technology for increasing oil recovery. *Oil & Gas Journal Russia*, (6), 110–116. [In Russian]
- Altunina, L., Kuvshinov, V., Kuvshinov, I., & Ursegov, S. (2012). Compositions for increasing oil recovery from deposits of high-viscosity oils. *Oil & Gas Journal Russia*, (7), 44–51. [In Russian]
- Bie, J., Klan, B., & Lalann, P. (1990). *Microemulsions. Structure and Dynamics* (Edited by S. E. Friberg, P. Botorel). Mir. [In Russian]
- Ganeeva, Z. M., Khisametdinov, M. R., Rizvanov, R. Z., & Musabirov, M. Kh. (2013). Development of technology for increasing oil recovery based on the use of silicate gel in Tatneft. *Oil Industry*, (8), 82–84. [In Russian]
- Gimatudinov, Sh. K. (1982). *Physics of the Oil and Gas Reservoir*. Nedra. [In Russian]
- Idogova, Ya. V., Prochukhan, K. Yu., & Prochukhan, Yu. A. (2014). Influence of water mineralization on the rheological properties of polymer. *Bashkir Chemical Journal*, 21(4), 80–82. [In Russian]
- Izmailova, V. N., & Yampolskaya, G. P. 1992. Structural & mechanical barrier. In *Advances in Colloidal Chemistry and Physico-Chemical Mechanics* (p. 103). Nauka. [In Russian]
- Martos, V. N. (1974). *Application of the Polymers in the Oil Industry*. VNIIOENG Publ. [In Russian]
- Najisu, & Erofeev, V. I. (2017). Investigation and application of integrated technology of the plant for improvement of petroleum oil refining. *Advances in Current Natural Sciences*, (10), 96–100.
- Pakharukov, Yu. V., Shabiev, F. K., Grigoriev, B. V., Safargaliev, R. F., & Potochnyuk, I. R. (2019). Filtration of oil in a porous medium with the participation of graphene nanoparticles. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 60(1), 37–40. [In Russian]
- Pakharukov, Yu. V., Shabiev, F. K., Mavrinsky, V. V., Safargaliev, R. F., & Voronin, V. V. (2019). Wave structure formation on the surface of a graphene film. *JETP Letters*, 109(9), 634–638. [In Russian]
- Pakharukov, Yu. V., Shabiev, F. K., & Safargaliev, R. F. (2018). Displacement of oil from a porous medium using graphite suspension. *Technical Physics Letters*, 44(4), 3–8. [In Russian]

- Pakharukov, Yu. V., Shabiev, F.K., Safargaliev, R. F., Galunin, E. V. (2025). Hierarchy of self-organization and self-assembly processes using the example of film growth at the hydrocarbon–graphene nanofluid interface. *Journal of Technical Physics*, 95(3), 565–574 [In Russian]
- Pakharukov, Yu. V., Shabiev, F. K., Safargaliev, R. F., Yezdin, B. S., & Kalyada, V. V. (2020). Use of nanofluids based on carbon nanoparticles to displace oil from the porous medium model. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 6(4), 141–157. [In Russian]
- Pakharukov, Yu. V., Shabiev, F. K., Safargaliev, R. F., & Shabieva, A. V. (2022). Increase in microcapillary permeability with walls coated with a corrugated graphene film. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 63(6), 116–121. [In Russian]
- Rudiyak, V. Ya., Belkin, A. A., Egorov, V. V. (2009). On the effective viscosity of nanosuspensions. *Journal of Technical Physics*, 79(8), 18–25. [In Russian]
- Sanochkin, Yu. V. (2003). Van der Waals waves in liquids with a free surface. *Journal of Technical Physics*, 73(5), 24–29. [In Russian]
- Usmanova, L. R., Prochukhan, K. Yu., & Prochukhan, Yu. A. (2013). Surfactants for intensification of oil production process. In *Fundamental Science and Technology — Promising Developments II. Vol. 1.* (pp. 196–200). Academicheskii. [In Russian]
- Frenkel, Ya. I. (1975). *Kinetic Theory of Liquids*. Nauka. [In Russian]
- Khavkin, A. Ya. (2010). *Nanoappearance and Nanotechnology in Oil and Gas Production*. Institute of Computer Research, Scientific Research Center “Regular and Chaotic Dynamics”. [In Russian]
- Shabiev, F. K., Pakharukov, Yu. V., Safargaliev, R. F., Yezdin, B. S., & Vasiliev, S. A. (2022). Reduction of oil viscosity with the addition of graphene nanoplates. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, and Energy*, 8(3), 106–125. [In Russian]
- Alekseev, A. N., Bogoviz, A. V., Goncharenko, L. P., & Sybachin, S. A. (2019). A critical review of Russia's energy strategy in the period until 2035. *International Journal of Energy Economics and Policy*, 9(6), 95–102.
- Ali, I., Pakharukov, Yu. V., Shabiev, F. K., Galunin, E. V., Safargaliev, R. F., Vasiljev, S. A., Yezdin, B. S., Burakov, A. E., AlOthman Zeid, A., & Sillanpää, Mika. (2023). Preparation of graphene based nanofluids: Rheology determination and theoretical analysis of the molecular interactions of graphene nanoparticles. *Journal of Molecular Liquids*, 390, 122954.
- Bahiraei, M., & Heshmatian, S. (2019). Graphene family nanofluids: A critical review and future research directions. *Energy Conversion and Management*, 196, 1222–1256.
- Dong, Z. et al. (2019). Carbon nanoparticle-stabilized Pickering emulsion as a sustainable and high-performance interfacial catalysis platform for enzymatic esterification/transesterification. *ACS Sustainable Chemistry & Engineering*, 7(8), 7619–7629.
- El-Masry, J. F. et al. (2023). A comprehensive review on utilizing nanomaterials in enhanced oil recovery applications. *Energies*, 16(2), 691.
- Ezdin, B. S., Pakharukov, Yu. V., Kalyada, V. V., Shabiev, F. K et al. (2022). The novel method of synthesis of nanostructured materials for the enhancing recovery in oil displacement technologies. *Catalysis Today*, 397–399, 249–256.

- Foisal, A. R., Imran, A. B., & Chowdhury, A. N. (2025). Eco-friendly biomass-based carbon dots, carbon nanotubes, graphene, and their derivatives for enhanced oil recovery: A new horizon for petroleum industry. *ChemistryOpen*, 14(7), e202400353.
- Glushchenko, V. N., Kuz'micheva, E. O., & Dashkina, E. F. (2012). *Development of Environmentally Friendly Surfactants and their Adaptation to the Conditions of the Oil Industry. The Development of Science at the Present Stage* (pp. 20–25). Tsentr naukovykh publikatsii Publ.
- Iravani, M., Khalilnezhad, Z., & Khalilnezhad, A. (2023). A review on application of nanoparticles for EOR purposes: History and current challenges. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, 13, 959–994.
- Isaev, V. I., Kuzmenkov, S. G., Ayupov, R. Sh., Kuzmin, Yu. A., Lobova, G. A., & Stulov, P. A. (2019). Hard-to-recover reserves of Yugra oil (West Siberia). *Geophysical Journal*, 41(1), 33–43.
- Jafarbeigi, E., Salimi F., Kamari, E., & Mansouri, M. (2022). Effects of modified graphene oxide (GO) nanofluid on wettability and IFT changes: Experimental study for EOR applications. *Petroleum Science*, 19(4), 1779–1792.
- Kang, W. L. et al. (2022). Advances in enhanced oil recovery technologies for low permeability reservoirs. *Petroleum Science*, 19(4), 1622–1640.
- Karimi, A. et al. (2012). Wettability alteration in carbonates using zirconium oxide nanofluids: EOR implications. *Energy & Fuels*, 26(2), 1028–1036.
- Kryukov V., & Moe A. (2018). Does Russian unconventional oil have a future? *Energy Policy*, 119, 41–50. <https://doi.org/10.1016/j.enpol.2018.04.021>
- Li, W. et al. (2022). Recent advances on Pickering emulsions stabilized by diverse edible particles: Stability mechanism and applications. *Frontiers in Nutrition*, 9, 864943.
- Luo, D., Wang, F., Zhu, J., Cao, F., Liu, Y., Li, X. et al. (2016). Nanofluid of graphene-based amphiphilic Janus nanosheets for tertiary or enhanced oil recovery: High performance at low concentration. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(28), 7711–7716.
- Nelson, R. C., Lawson, J. B., Thigpen, D. R. & Stegemeier, G. L. (1984) Cosurfactant-enhanced alkaline flooding. *SPE Enhanced Oil Recovery Symposium*. SPE 12672. <https://doi.org/10.2118/12672-MS>
- Pakharukov, Yu. V., Shabiev, F. K., Safargaliev, R. F., & Volkova, S. S. (2021). Quenching of graphene suspension photoluminescence with saturated hydrocarbons. *Colloid and Interface Science Communications*, 42, 100431.
- Pakharukov, Yu., Shabiev, F., Safargaliev, R., Mavrinskii, V., Vasiljev, S., Ezdin, B., Grigoriev, B., & Salihov, R. (2022). The mechanism of oil viscosity reduction with the addition of graphene nanoparticles. *Journal of Molecular Liquids*, 361, 119551.
- Peng, B. et al. (2017). A review of nanomaterials for nanofluid enhanced oil recovery. *RSC Advances*, 7(51), 32246–32254.
- Radnia, H. et al. (2018). A novel nanofluid based on sulfonated graphene for enhanced oil recovery. *Journal of Molecular Liquids*, 271, 795–806.
- Savitskaya, M. N., & Kholodova, Yu. D. (1969). *Polyacrylamide*. Tekhnika Publ.
- Sheng, J. J., Leonhardt, B. & Azri, N. (2015). Status of polymer-flooding technology. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 54(02), 116–126. <https://doi.org/10.2118/174541-pa>

- Yousufi, M. M. et al. (2025). Evaluation of activated carbon as a Pickering emulsion stabilizer for conformance control at high temperature and salinity: A focus on stability and rheology. *Journal of Molecular Liquids*, 419, 126764.
- Zhao, M. et al. (2024). Review on principles, influence and applications of nanomaterials in enhancing oil recovery. *Fuel*, 371, 131985.
- Zhu, Y. Y., Zhang, Y., Niu, J. L., Liu, W. D., & Hou, Q. F. (2016). The progress in the alkali-free surfactant-polymer combination flooding technique. *Petroleum Exploration and Development*, 39(3).

Информация об авторах

Руслан Фаридович Сафаргалиев, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра физики и приборостроения, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия
safargalievrf@tyuiu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4799-8651>

Юрий Вавилович Пахаруков, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры физики и приборостроения, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия
pacharukovy@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3937-4937>

Борис Семенович Ездин, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник ОПФ НИЧ, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
bse@nsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4563-9265>

Сергей Александрович Васильев, научный сотрудник ОПФ НИЧ, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
s.vasilev3@nsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0076-9445>

Александр Сергеевич Чупров, студент, кафедра физики и приборостроения, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия
a.chuprov06@gmail.com

Роман Дмитриевич Гуменюк, лаборант, кафедра физики и приборостроения, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

Фарид Канафеович Шабиев, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры техносферной безопасности, Тюменский индустриальный университет; профессор кафедры прикладной и технической физики, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия
faridshab@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0551-3836>

Information about the authors

Ruslan F. Safargaliev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Physics and Instrument Engineering, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia
safargalievrf@tyuiu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4799-8651>

Yuri V. Pakharukov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Professor of the Department of Physics and Instrument Engineering, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia
pacharukovy@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3937-4937>

Boris S. Ezdin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Researcher at the Department of Applied Physics of Scientific and Research Division, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
bse@nsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4563-9265>

Sergey A. Vasiliev, Researcher of the Department of Applied Physics of Scientific and Research Division, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
s.vasilev3@nsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0076-9445>

Alexander S. Chuprov, Student, Department of Physics and Instrument Engineering, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia
a.chuprov06@gmail.com

Roman D. Gumenyuk, Laboratory Assistant, Department of Physics and Instrument Engineering, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia

Farid K. Shabiev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Technosphere Security, Industrial University of Tyumen; Professor of the Department of Applied and Technical Physics, University of Tyumen, Tyumen, Russia
faridshab@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0551-3836>

Исследование влияния вынужденных колебаний жидкости на гидравлическое сопротивление трубопровода

Николай Геннадьевич Коноплёв , Геннадий Евгеньевич Коробков,
Анна Павловна Янчушка

Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия
Контакт для переписки: giipr2010@mail.ru 

Аннотация. В настоящей статье поднимается проблема снижения гидравлического сопротивления. Начиная с ранних исследований зависимости прикладываемой разности давлений к концам трубопровода и расхода жидкости в нем, ученые задавались вопросом определения потерь энергии жидкости при ее движении. Столкнувшись с турбулентностью — понимание законов и принципов движения отдельных частиц жидкости, определение гидравлического сопротивления при турбулентном течении жидкости, исследователями было выдвинуто несколько теорий, описывающих законы движения. Разрешение этих задач для стационарного режима привело к новой проблеме — снижению гидравлического сопротивления при турбулентном режиме течения. На основе теории об относительном смещении частиц жидкости, заложенной родоначальниками исследований турбулентного течения, работ об аналогии движения энергии и жидкости, авторы делают предположение о возможности управления гидравлическим сопротивлением источником энергии — насосом, подающим жидкость в трубопровод с определенной частотой. В статье приведены результаты изучения течения жидкости в трубопроводе с переменным расходом, т. е. движением жидкости под периодическим действием насоса. Приводится модель, описывающая давление в начальной точке трубопровода и расход жидкости на основе электрогидравлической аналогии, в которой потери энергии на трение выражаются через комплексную величину, отражающую действие сил вязкости, инерции и упругости жидкости. Как показали наши измерения, комплексное гидравлическое сопротивление, потребляющее энергию при течении жидкости по трубопроводу, лежит в основе определения коэффициента затухания распространяющейся волны давления, что может говорить об аналогии распространения волны и турбулентного движения жидкости по трубопроводу.

Ключевые слова: турбулентность, жидкость, деформация, инерция, колебания жидкости, электрогидравлическая аналогия, трубопровод, гидравлическое сопротивление

Цитирование: Коноплёв Н. Г., Коробков Г. Е., Янчущка А. П. 2026. Исследование влияния вынужденных колебаний жидкости на гидравлическое сопротивление трубопровода // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 12. № 2 (46). С. 60–86. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-60-86>

Поступила 15.01.2026; одобрена 16.02.2026; принята 12.03.2026

Study of the influence of forced fluid oscillations on the hydraulic resistance of a pipeline

Nikolay G. Konoplev✉, Gennady E. Korobkov, Anna P. Yanchushka

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

Corresponding author: giipr2010@mail.ru✉

Abstract. This article addresses the problem of reducing hydraulic resistance. Since early studies of the relation between the applied pressure difference at the ends of a pipeline and the fluid flow rate in it, researchers have been concerned with determining the energy losses of a fluid during its motion. Faced with the turbulence — understanding the laws and principles of motion of individual fluid particles and determining hydraulic resistance during turbulent fluid flow — researchers have put forward several theories describing the laws of motion. Solving these tasks for a stationary state led to a new problem — reducing hydraulic resistance during turbulent flow. Based on the theory of the relative displacement of fluid particles, established by the founders of turbulent flow research, and works on the analogy between energy and fluid motion, the authors hypothesize the possibility of controlling hydraulic resistance using an energy source — a pump supplying fluid to the pipeline at a certain frequency. The article presents the results of a study of fluid flow in a pipeline with a variable flow rate, i.e., the movement of fluid under the periodic action of a pump. A model is presented that describes the pressure at the starting point of a pipeline and the fluid flow rate based on an electrohydraulic analogy, in which frictional energy losses are expressed through a complex quantity reflecting the action of the viscous, inertial, and elastic forces of the fluid. As our measurements have shown, the complex hydraulic resistance, which consumes energy during fluid flow through a pipeline, underlies the determination of the attenuation coefficient of a propagating pressure

wave, suggesting an analogy between wave propagation and the turbulent movement of fluid through a pipeline.

Keywords: turbulence, fluid, deformation, inertia, fluid oscillations, electrohydraulic analogy, pipeline, hydraulic resistance

Citation: Konoplev, N. G., Korobkov, G. E., Yanchushka, A. P. 2026. Study of the influence of forced fluid oscillations on the hydraulic resistance of a pipeline. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 12(2), 60–86. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-60-86>

Received Jan. 15, 2026; Reviewed Feb. 16, 2026; Accepted Mar. 12, 2026

Введение и цель экспериментального исследования

Вопросу гидравлического сопротивления в трубопроводах при транспортировании ньютоновских жидкостей посвящено огромное количество работ. Важной проблемой, актуальной до сих пор, является снижение гидравлического сопротивления трубопровода. На сегодняшний день существует множество различных способов снижения гидравлического сопротивления [Симоненко и др., 2019]. На практике для трубопроводного транспорта актуальным способом являются лупинги и присадки, хотя их стоимость достаточно велика. Возможности присадок ограничены не только денежными затратами, но и временем активации, а также деструкцией присадок. Современные исследования в области использования присадок доказывают их эффективность только при стационарном режиме течения жидкости. Как они будут вести себя в условиях изменения расхода и давления при переходных процессах, изучено недостаточно. К тому же, снижение коэффициента гидравлического сопротивления при стационарном режиме даже на 50% не приводит к увеличению расхода перекачки более 30%. В этом можно убедиться из формулы, полученной из баланса мощностей для двух случаев: без присадки — 1 и с присадкой — 2.

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \sqrt{\frac{y + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}},$$

где y — доля уменьшения коэффициента гидравлического сопротивления при использовании присадки; x — величина, равная

$$x = 1,02 \cdot \lambda_1 \cdot \frac{l_{TP}}{d_0^5} \cdot \frac{8 \cdot \rho(t)_0}{\pi^2 \cdot \left(m \cdot b_M + \frac{b_{II}}{n^2} \right)},$$

где $1,02$ — коэффициент местных сопротивлений; λ_1 — коэффициент гидравлического сопротивления для случая без присадки; l_{TP} — геометрическая длина трубопровода; d_0 — внутренний диаметр трубопровода; $\rho(t)_0$ — плотность перекачиваемой жидкости в зависимости от температуры; m — количество включенных последовательно магистральных насосов; b_M — коэффициент аппроксимации магистрального насоса (в с/м^3); b_{II} — коэффициент аппроксимации подпорного насоса (в с/м^3); n — количество включенных параллельно подпорных насосов.

Поскольку величина x достаточно велика, то можно полагать

$$\frac{Q_1}{Q_2} \approx \sqrt{y}.$$

Поэтому, снижая коэффициент гидравлического сопротивления даже на 50%, расход возможно увеличить только на 30%. К аналогичным выводам приходили и А. А. Коршак и М. Н. Хусаин [2008].

Применять на каждом перегоне всего технологического участка присадку весьма дорого. Поэтому и присадки нашли ограниченное применение, как правило на лимитирующих участках. Использование лупингов, в свою очередь, также сопряжено с затратами на строительство, диагностику и эксплуатацию. Для строительства 1 км трубопровода диаметром 1220 мм требуется ориентировочно до 30 млн руб.

Ввиду ограничений, накладываемых на нетрадиционные способы, а также стоимости использования лупингов и присадок, вопрос снижения гидравлического сопротивления трубопровода при перекачке жидкости остается весьма острым и актуальным.

Еще в середине XX в. В. Шаубергером была замечена связь потерь энергии на трение с кинетической энергией потока. В своих записках он утверждал, что перенос импульса (энергии) текущей водой влияет на гидравлическое сопротивление канала [Шаубергер, 2007]. Измерение гидравлического сопротивления его конструкции показали результаты, которые кажутся невообразимыми: при определенных расходах гидравлическое сопротивление трубы значительно снижалось. Такие результаты весьма настораживают. Возможно ли такое? Чтобы ответить на данный вопрос, задачей исследования стало изучение энергий потенциальной и кинетической текущей по трубопроводу жидкости при стационарном и нестационарном движении с целью снижения гидравлического сопротивления трубопровода. Переносит ли текущая жидкость энергию? Влияет ли распространение энергии текущей жидкости по трубопроводу на ее потери по длине. Если да, то каков механизм потери энергии при ее передаче с текущей жидкостью? Возможно ли управлять передачей этой энергии с целью управления гидравлическим сопротивлением?

В своей работе Н. А. Умов [1874] показал, что любое тело, твердое или жидкое, при своем напряженном состоянии и движении передает энергию внутри себя. Эта энергия распространяется от источника до потребителя. Передача энергии осуществляется продольными волнами при смещении частиц жидкости. Соотношения смещения частиц и линейного размера тела, скорости распространения энергии и средней скорости движения тела представляются в виде

$$\frac{c(t)_s}{v_{\text{СТАЦ}}} = \frac{v_{\text{СТАЦ}}}{u_{\text{СМ}}} = \frac{l_{\text{ТР}}}{x_{\text{СМ}}},$$

где $c(t)_s$ — скорость распространения энергии в трубопроводе с жидкостью; $v_{\text{СТАЦ}}$ — скорость стационарного движения жидкости; $u_{\text{СМ}}$ — скорость смещения частиц жидкости; $l_{\text{ТР}}$ — геометрическая длина трубопровода; $x_{\text{СМ}}$ — величина смещения частиц жидкости по всей длине трубопровода за время половины свободного пробега волны.

Н. А. Умов показывает, что дифференциальные законы движения энергии и движения жидкости тождественны. Наряду с перемещением вещества идет распространение энергии, которое невозможно без относительного смещения частиц, т. е. невозможно без эффектов сжимаемости жидкости. Все это говорит о том, что гидравлическое сопротивление трубопровода движению жидкости является тождественным сопротивлению потоку энергии. Кроме того, можно предположить, что само движение жидкости подобно распространяющейся волне, в которой одни частицы смещаются друг к другу, а другие смещаются врозь. Обобщенное смещение есть движение с постоянной скоростью.

И. С. Громека [1952], решая биквадратное уравнение, показывал наличие двух скоростей распространения энергии в движущейся жидкости, о сущности которых он не давал указаний.

Согласно фундаментальному принципу, только кинетическая энергия может совершать работу. При течении жидкости по трубопроводу — это работа сил трения. Но тогда возникает вопрос. Если скорость стационарного движения не изменяется, как считает классическая теория гидравлического сопротивления, то как же тогда совершается работа на преодоление сил трения? Этим вопросом задавались еще О. Рейнольдс и Л. Прандтль. Чтобы его разрешить, необходимо положить, что при движении жидкости кинетическая энергия постоянно переходит в тепловую и немедленно восстанавливается за счет источника. Согласно выводам Н. А. Умова, вдоль трубопровода, наряду с течением жидкости, идет распространение кинетической энергии. Для ее распространения необходимо колебание частиц жидкости. Это означает, что при сближении частиц должен возникать скачок давления, поскольку среда сжимается. При этом смещении часть кинетической энергии будет превращаться в потенциальную энергию сжатия жидкости, а часть расходоваться на трение. Далее упругая потенциальная энергия переходит в кинетическую, часть из которой вновь расходуется на трение. Все это протекает одновременно с течением самой жидкости, скорость которой не изменяется благодаря описанным выше процессам распространения энергии и ее трансформации. Эти смещения частиц, по-видимому, и порождают турбулентность.

Таким образом, в случае турбулентного движения жидкости, даже при стационарном режиме течения, наблюдается пульсационная составляющая, отражающая нестационарную сущность. Постоянное относительное смещение частиц жидкости в общем движении является неотъемлемой частью турбулентного движения, обеспечивающее распространение кинетической энергии и восполнение энергии движения жидкости, которая, превращаясь в тепло, расходуется на преодоление силы трения. Турбулентность

весьма хаотична. Однако величины амплитуд и частот конечны и имеют свои пределы отклонения, пропорциональные мощности источника энергии и, классически, величине шероховатости стенки труб.

В классической теории турбулентности сопротивление трубопровода пропорционально касательным напряжениям, которые зависят от величины и характера пограничного слоя, от динамической скорости, являющейся эквивалентом распределения скоростей потока. Классическая теория строится на осредненных значениях скоростей и давления жидкости в конкретной точке и конкретном сечении. Пульсационные составляющие при стационарном движении осредняются и не принимаются в расчет [Шлихтинг, 1974], однако сами пульсации давления и скорости являются следствием турбулентности.

Наряду с эмпирико-теоретическими исследованиями гидравлического сопротивления [Альтшуль, 1982] существуют статистические теории турбулентности. И. Бюргерс как один из первых ученых, использовавших статистические методы в изучении турбулентности, отмечал, что постоянное рассеивание энергии движения требует постоянной работы внешних сил для поддержания постоянного значения осредненных скоростей потока. Кроме того, он говорит о возможности представления относительного (турбулентного) движения в виде спектра некоторых периодических функций, амплитуды и фазы которых непрерывно меняются. Этот спектр может состоять из вибраций различной длины волн. Максимальное значение длины волны зависит от диаметра. В случае шероховатой стенки величина выступов и впадин также будет оказывать влияние на эту длину волны [Бюргерс, 1936].

Возникает следующий вопрос. Возможно ли хотя бы в некоторой степени упорядочить смещение частиц аналогично ламинарному движению? Если при аналогичном уровне мощности источника синхронизовать смещения частиц жидкости, то возможно уменьшить турбулентность и снизить потери энергии, связанные с хаотичными смещениями частиц, передающими энергию источника. Возможно, механизм действия противотурбулентных присадок основан именно на этом, но они достаточно дорогие, поэтому необходимо отыскать другой путь синхронизации смещения частиц — воздействия на трансформацию энергии, являющуюся отражением колебательного процесса в жидкости, относительного смещения частиц. Известны работы [Murakami et al., 1983], где действие центробежной силы упорядочивает течение, и сопротивление трубопровода снижается.

Работы [Shukurov et al., 2022; Наврузов и др., 2023], посвященные изучению пульсирующего движения раствора полимера в трубе с упругими стенками, показывают неразрывную связь частоты колебания жидкости и коэффициента затухания, который увеличивается с ростом частоты колебания. Исследования пульсирующего турбулентного движения [Sundstrom, Cervantes, 2018] показывают связь частоты пульсации и развития турбулентности, увеличивающейся при возрастании частоты выше определенного порога. Это означает, что внешним источником импульса возможно влиять на процесс турбулентности. Рост турбулентности и, как следствие, величина потерь энергии жидкости при увеличении расхода стационарной перекачки эквивалентны

возрастанию частоты вынужденных колебаний и возрастанию потерь энергии от этих колебаний. Все это указывает на взаимосвязь потерь энергии жидкости от ее собственных колебаний при относительном смещении ее частиц и вынужденных смещений от действия внешних сил.

Исследования, изучающие влияние воздействия пульсаций на стоячую и движущуюся жидкость в трубопроводе [Schultz-Grunow, 1940; Ohmi, Iguchi, 1980], посвящены в основном определению коэффициента затухания волн давления, распределению скорости потока по сечению, коэффициента гидравлического сопротивления, а также определению границ применимости квазистационарного подхода к зависимости потерь энергии на трение от расхода. В этих работах воздействие на жидкость создается с помощью пульсатора — поршня. Исследователи рассматривали возбуждение пульсаций в жидкости, перекачиваемой центробежным насосом, путем воздействия присоединенным поршнем и пульсации стоячей жидкости в непротяженном трубопроводе (простое воздействие поршня). В протяженных трубопроводах эксперименты не проводились. Поскольку любое тело, обладающее массой и упругостью, имеет собственную частоту колебания, представляет интерес возможность создания резонансных эффектов в трубопроводе с текущей жидкостью с целью синхронизации смещения частиц и действия сил источника энергии для увеличения расхода перекачки. В вышеупомянутых работах не обращалось внимание на данную возможность, а частоты воздействия не были каким-либо образом привязаны к собственным частотам колебания жидкости.

Существует множество подходов к математическому моделированию пульсовых волн. Основные работы по изучению и моделированию пульсовых волн относятся к области исследований сердечно-сосудистой системы. В работе [Меркулов, 2011] предлагается модель, основанная на решении телеграфных уравнений, предложенных И. А. Чарным с дополнительным параметром, отражающим упругие свойства сосудистой мускулатуры в соответствии с феноменом Остроумова–Бейлиса и законом Гука. Параметр сопротивления, так же как и у И. А. Чарного, считается постоянным, зависящим только от вязкости и определяющимся как для стационарного потока. В работе [Раднаев и др., 2017] предложена ARIMA-модель пульсового сигнала в виде временного ряда по методологии Бокс–Дженкинса. Помимо этого, хорошие результаты соответствия модели и реальным замерам показывает простая модель на основе гармонических функций [Акулов, 2006]. Обзор работ [Симаков, 2018; Федотов, 2015] демонстрирует возможность использования, наряду с методом электрогидравлической аналогии, метода осреднения и асимптотического анализа уравнений Навье–Стокса по параметрам радиуса и длины сосудов, метода численного интегрирования уравнения Навье–Стокса и уравнения неразрывности по произвольному поперечному сечению. В работе [Усанов и др., 2017] для оценки периферического сопротивления сосудов используется двух-элементная модель Франка упругого резервуара в диастоле, основанная на уравнении неразрывности в виде

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{C_{SA}} \cdot \left(Q_L - \frac{P}{R_S} \right),$$

где P — артериальное давление; C_{SA} — эластичность системных артерий; Q_L — объемная скорость кровотока на выходе из левого желудочка; R_S — гидростатическое сопротивление со стороны мелких сосудов (общее периферическое сопротивление).

В нашей работе предложена модель, описывающая зависимость давления и расхода в начальной точке трубопровода на основе решения простых дифференциальных уравнений. Такой подход позволил упростить решение дифференциального уравнения и оказался достаточно приближенным к реальности. К тому же потери энергии жидкости предлагается определять в виде комплексного гидравлического сопротивления, зависящего не только от вязкости и шероховатости стенки трубопровода, но и от волновых свойств перекачиваемой жидкости и трубопровода, а также частоты вынужденных колебаний, накладывающих дополнительное влияние на величину гидравлического сопротивления.

Цель нашего эксперимента — попытка воздействия на движущуюся жидкость в трубопроводе переменным источником мощности с целью синхронизации смещения частиц при трансформации энергии и вынужденных смещений от внешней силы.

В случае стоячей жидкости в трубопроводе, воздействие на нее с резонансной частотой приводят к колебаниям давления большой амплитуды, что указывает на возможность синхронного воздействия внешней силы на жидкость. Возможно ли повторить такое в случае движущейся жидкости, если подачу жидкости в трубопровод и, соответственно, внешней силы к ней организовать с определенной частотой, равной или близкой к резонансной частоте трубопроводной системы?

Описание эксперимента и установки

Постановка эксперимента осуществлялась для двух трубопроводных систем: протяженной и непротяженной.

Если

$$\lambda_{СТАЦ} \cdot \frac{l_{ПР}}{d_0} \cdot \frac{v_{СТАЦ}}{2} < 2 \cdot c(t)_S,$$

где $\lambda_{СТАЦ}$ — коэффициент гидравлического сопротивления трубопровода (коэффициент Дарси–Вейсбаха) при стационарном режиме течения; d_0 — диаметр недеформированного трубопровода в начале системы координат; $l_{ПР}$ — приведенная длина трубопровода с учетом местных сопротивлений; то трубопровод считается *непротяженным*.

Если

$$\lambda_{СТАЦ} \cdot \frac{l_{ПР}}{d_0} \cdot \frac{v_{СТАЦ}}{2} > 2 \cdot c(t)_S,$$

то трубопровод предлагается относить к *протяженным*.

Общая схема стенда представлена на рис. 1. Стенд состоит из емкости; трех центробежных насосов, первые два (МНА-1, -2) из которых номинальной мощностью

630 Вт, третий (МНА-3) 1500 Вт; запорной арматуры (краны шаровые 3/4"); двух лопастных счетчиков с $Q_{НОМ} = 3,5 \text{ м}^3/\text{ч}$ ($\delta = \pm 2\%$); манометров точных измерений кл.т. 0,6 и 0,4; манометров, показывающих кл.т. 1,0; двух сетчатых фильтров, а также крана № 7, присоединенного к четырехполюсному электродвигателю номинальной частотой вращения 1500 об/мин, мощностью 250 Вт, подключенного к частотному преобразователю, позволяющему изменять частоту вращения вала двигателя от 0 до 3000 об/мин. Измерение температуры производилось в емкости датчиком с термопарой хромель–алюмель, а также спиртовым термометром. Основной трубопровод протяженной системы состоял из 250 м армированного поливинилхлоридного шланга фирмы Kercher с внутренним диаметром 19 мм, толщиной стенки 3 мм ($k_3 = 0,02 \text{ мм}$) и 13,3 м металлопластикового трубопровода с внутренним диаметром 20 мм, с толщиной стенки 3 мм ($k_3 = 0,0007 \text{ мм}$). Расстояния между манометрами: $L_{M3-M4} = 50 \text{ м}$, $L_{M4-M5} = 100 \text{ м}$, $L_{M5-M6} = 100 \text{ м}$. Для непротяженной системы оставалось только 50 м шланга и все металлопластиковые трубопроводы. Расстояния между манометрами для непротяженного трубопровода: $L_{M3-M4} = 10 \text{ м}$, $L_{M4-M5} = 20 \text{ м}$, $L_{M5-M6} = 20 \text{ м}$. В качестве жидкости использовалась родниковая вода. Каждый насос снабжался счетчиком электрической энергии кл.т. 1,0 (МНА-1) и 2,0 (МНА-2, МНА-3).

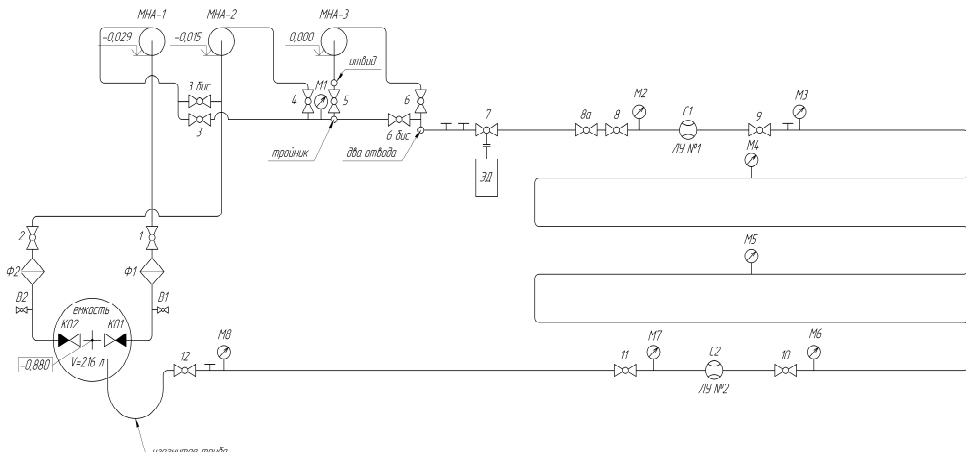


Рис. 1. Технологическая схема экспериментального стенда

Fig. 1. Technological diagram of the experimental bench

Путем изменения частоты вращения крана № 7 регулировалась подача жидкости в трубопровод и снимались амплитуды колебания давления. Перед включением и после остановки фиксировались показания счетчиков и температуры воды. Дополнительно определялись выходные напорные характеристики насосов с учетом обвязки, значения местных сопротивлений элементов стенда. Предусматривается только три режима работы системы. Режим № 1: включен один МНА-1 или МНА-2 ($p = 1$; $n = 1$; $m = 0$). Режим № 2: последовательно включены насосы МНА-1 и МНА-2 ($p = 2$; $n = 1$; $m = 0$). Режим № 3: параллельно включены насосы МНА-1 и МНА-2, последовательно с ними

включен насос МНА-3 ($p = 1; n = 2; m = 1$), где m, n, p — коэффициенты состояния насосов в формуле (2).

К сожалению, использование стандартного крана не позволяет создавать синусоидально изменяющуюся величину давления и подачи жидкости в трубопровод, поскольку пропускная способность крана нелинейна от степени его открытия (рис. 2).

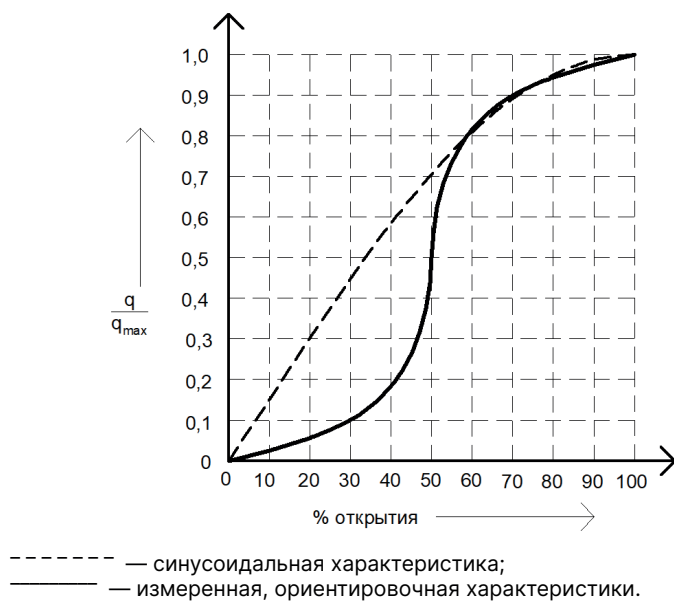


Рис. 2. Характеристика шарового крана по пропускной способности от степени открытия

Fig. 2. Ball valve flow rate characteristics depending on the degree of opening

Для проверки достоверности показаний расходомеров производилось измерение перекачиваемого объема в единицу времени по уровням взлива в емкостях.

Используемые методы для анализа и интерпретации данных

В качестве основного метода принято использование электрогидравлической аналогии, поскольку распространение и изменение энергии жидкости описывается теми же уравнениями, что и электрической энергии.

В качестве приближенной математической модели, на основе принятого метода, предлагается дифференциальное уравнение, описывающее изменение давления жидкости в трубопроводе при периодическом воздействии источника энергии, аналогичное изменению напряжения на конденсаторе последовательной RLC цепи

$$L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} + Z_{CM} \cdot C \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} + P = \frac{P_{MAX}}{2} \cdot [1 + \cos(\omega \cdot \tau)], \quad (1)$$

где L — параметр индуктивности или инерционности, отражает способность массы жидкости изменять количество движения [Коноплёв, Коробков, 2020]; C — емкостная характеристика трубопровода, отражает способность жидкости в трубопроводе запасать упругую энергию деформации [Коноплёв, Коробков, 2020]; Z_{CM} — комплексное гидравлическое сопротивление трубопровода при перекачке с переменным расходом; P — давление жидкости; τ — время; $\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$ — круговая частота вращения крана № 7 — круговая частота вынужденных колебаний жидкости; P_{MAX} — максимальное давление после крана № 7, соответствующее максимальному по времени расходу в начале трубопровода, в момент полного открытия крана № 7:

$$P_{MAX} = \rho(t) \cdot g \cdot \left\{ p \cdot \left[a_{203} - b_{203} \cdot \left(\frac{Q_{\Sigma}}{k} \right)^2 \right] + m \cdot (a_{405} - b_{405} \cdot Q_{\Sigma}^2) \right\}, \quad (2)$$

где $\rho(t)$ — плотность жидкости с учетом температуры; a_{203} , b_{203} — коэффициенты аппроксимации насоса Calpeda MXAM-203; a_{405} , b_{405} — коэффициенты аппроксимации насоса Calpeda MXAM-405; Q_{Σ} — подача насоса с учетом расхода деформации в трубопроводе; p — количество включенных последовательно насосов Calpeda MXAM-203; k — количество включенных параллельно насосов Calpeda MXAM-203; m — количество включенных насосов Calpeda MXAM-405.

Коэффициенты аппроксимации характеристик насосов определены экспериментально для точки М2 (см. рис. 1) с учетом потерь давления в обвязке насосов и высотного расположения насосов (см. рис. 3).

При стационарном режиме давление P_{MAX} соответствует выходному давлению насоса(-ов) при постоянном расходе $Q_{СТАЦ}$ и соответствует потерям давления по длине трубопровода и местным сопротивлениям:

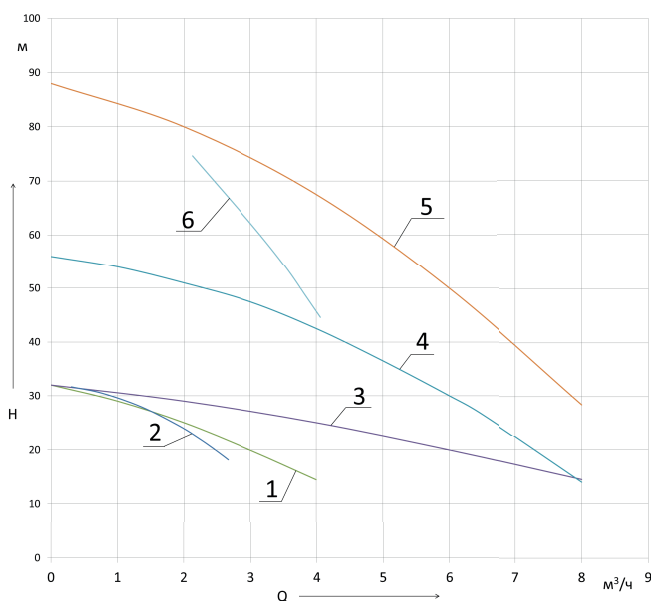
$$P_{MAX} = P_Z = Z \cdot Q_{СТАЦ}, \quad (3)$$

где Z — комплексное гидравлическое сопротивление трубопровода при стационарном движении жидкости, или параметр сопротивления, отражающий потери энергии на вязкое и турбулентное трение [Коноплёв, Коробков, 2020].

Расход деформации Q , отражающий относительное смещение частиц с учетом влияния вязкости, аналогично току смещения в электротехнике, записывается в виде

$$C \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} = Q. \quad (4)$$

Применяя полученные авторами результаты теоретических и экспериментальных исследований к случаю идеальной жидкости, можно утверждать, что расход жидкости в трубопроводе $Q_{ТР}$ в целом соответствует расходу деформации Q .



1 — паспортная характеристика насоса *Calpeda MXAM-203*; 2 — измеренная выходная характеристика в точке M2; 3 — паспортная характеристика включенных параллельно насосов *Calpeda MXAM-203*; 4 — паспортная характеристика насоса *Calpeda MXAM-405*; 5 — паспортная характеристика двух параллельных насосов *Calpeda MXAM-203* и одного последовательно соединенного с ними насоса *Calpeda MXAM-405*; 6 — измеренная суммарная выходная характеристика в точке M2

Рис. 3. Паспортные и измеренные в точке M2 напорные характеристики насосов *Calpeda MXAM-203* и *Calpeda MXAM-405*

Fig. 3. Nominal and measured pressure characteristics at point M2 of the *Calpeda MXAM-203* and *Calpeda MXAM-405* pumps

Расход всей массы жидкости в трубопроводе Q_{TP} определяется из следующего уравнения

$$L \cdot \frac{dQ_{TP}}{d\tau} + Z_{CM} \cdot Q_{TP} = \frac{P_{MAX}}{2} \cdot [1 + \cos(\omega \cdot \tau)]. \quad (5)$$

Это уравнение подразумевает, что жидкость недеформируемая, а приложенное давление насоса противодействует давлению от инерции всей массы жидкости, а также давлению от гидравлического сопротивления трубопровода.

Для стационарного режима течения

$$L \cdot \frac{dQ_{СТАЦ}}{d\tau} + Z \cdot Q_{СТАЦ} = P_{MAX}. \quad (6)$$

В уравнении (6) первый слева член актуален только для момента запуска трубопровода. Его можно опустить, если рассматривать только стационарный режим работы трубопровода. В этом случае уравнение (6) преобразуется в уравнение (3).

Величина комплексного гидравлического сопротивления Z , зависящая от расхода, является непостоянной, но в этих уравнениях она представлена в виде, имеющем такую постоянную величину, которая на всем промежутке времени определяет эквивалентное или действующее значение гидравлического сопротивления, приводящего к реальному изменению давления.

Решением уравнения (1) является функция:

— для непротяженных трубопроводов

$$P = \frac{P_{MAX}}{2} \cdot \frac{\zeta_S^2}{n_S} \cdot \left\{ \frac{n_S}{\zeta_S^2} + \frac{\cos(\omega_2^* \cdot \tau)}{2} \cdot \left[\frac{n_S - n_2^*}{(n_S - n_2^*)^2 + \alpha^2} + \frac{n_S + n_2^*}{(n_S + n_2^*)^2 + \alpha^2} \right] + \right. \\ \left. \frac{\sin(\omega_2^* \cdot \tau)}{2} \cdot \alpha \cdot \left[\frac{1}{(n_S + n_2^*)^2 + \alpha^2} - \frac{1}{(n_S - n_2^*)^2 + \alpha^2} \right] \right\} + \\ \exp(\alpha \cdot \tau) \cdot [C_1 \cdot \cos(\beta_S \cdot \tau) + C_2 \cdot \sin(\beta_S \cdot \tau)]. \quad (7)$$

или, с другой стороны,

$$P = \frac{P_{MAX}}{2} \cdot \left\{ 1 + \frac{X_{C2}^*}{Z_{CM}^2 + (X_{C2}^* - X_{L2}^*)^2} \cdot [\cos(\omega_2^* \cdot \tau) \cdot (X_{C2}^* - X_{L2}^*) + \sin(\omega_2^* \cdot \tau) \cdot Z_{CM}] \right\} + \\ \exp(\alpha \cdot \tau) \cdot [C_1 \cdot \cos(\beta_S \cdot \tau) + C_2 \cdot \sin(\beta_S \cdot \tau)]; \quad (8)$$

$$P = \frac{P_{MAX}}{2} \cdot \left\{ 1 + \frac{X_{C2}^*}{\sqrt{Z_{CM}^2 + (X_{C2}^* - X_{L2}^*)^2}} \cdot \cos(\omega_2^* \cdot \tau - \psi_2) \right\} + \\ \exp(\alpha \cdot \tau) \cdot [C_1 \cdot \cos(\beta_S \cdot \tau) + C_2 \cdot \sin(\beta_S \cdot \tau)], \quad (9)$$

где $X_{C2}^* = \frac{1}{n_2^* \cdot C}$ — параметр емкостного сопротивления трубопровода с жидкостью при частоте вынужденных колебаний жидкости; $X_{L2}^* = n_2^* \cdot L$ — параметр индуктивного сопротивления трубопровода с жидкостью при частоте вынужденных колебаний жидкости; $\alpha = -\frac{Z_{CM}}{2 \cdot L}$ — текущий коэффициент затухания колебаний жидкости; $\beta_S = \frac{\pi}{2} \cdot n_S$ — круговая собственная частота затухающих колебаний жидкости; n_S — собственная частота затухающих колебаний жидкости;

$$C_1 = P_1 - \frac{P_{MAX}}{2} \cdot \frac{\zeta_S^2}{n_S} \cdot \left\{ \frac{n_S}{\zeta_S^2} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{n_S - n_2^*}{(n_S - n_2^*)^2 + \alpha_S^2} + \frac{n_S + n_2^*}{(n_S + n_2^*)^2 + \alpha_S^2} \right] \right\} — первая$$

константа интегрирования;

$$C_2 = -\frac{P_{MAX}}{2} \cdot \frac{\zeta_S^2}{n_S^2} \cdot \left\{ \frac{\alpha \cdot n_2^*}{2} \cdot \left[\frac{1}{(n_S + n_2^*)^2 + \alpha^2} - \frac{1}{(n_S - n_2^*)^2 + \alpha^2} \right] + \right\} - C_1 \cdot \frac{\alpha}{n_S} — вторая$$

константа интегрирования;

$$\psi_2 = \arctg \left(\frac{Z_{CM}}{X_{C2}^* - X_{L2}^*} \right) — \text{смещение фазы колебания при } n \leq \zeta_S;$$

$$\psi_2 = \arctg \left(\frac{Z_{CM}}{X_{C2}^* - X_{L2}^*} \right) + \pi — \text{смещение фазы колебания при } n > \zeta_S, \zeta_S —$$

резонансная частота или собственная частота колебаний жидкости в трубопроводе:

$$\zeta_S = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{c(t)_S}{l_{TP}};$$

— для протяженных трубопроводов

$$P = \frac{P_{MAX}}{2} \cdot \frac{\zeta_S^2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left\{ \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\zeta_S^2} + \cos(\omega_1^* \cdot \tau) \cdot \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + (n_1^*)^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + (n_1^*)^2} \right] + \right. \\ \left. \sin(\omega \cdot \tau) \cdot n_1^* \cdot \left[\frac{1}{\lambda_2^2 + (n_1^*)^2} - \frac{1}{\lambda_1^2 + (n_1^*)^2} \right] \right\} + \\ C_3 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot \tau) + C_4 \cdot \exp(\lambda_2 \cdot \tau) \quad (10)$$

или, с другой стороны,

$$P = \frac{P_{MAX}}{2} \cdot \left\{ 1 + \frac{X_{C1}^*}{\sqrt{Z_{CM}^2 + (X_{C1}^* - X_{L1}^*)^2}} \cdot \left[\cos(\omega_1^* \cdot \tau) \cdot (X_{C1}^* - X_{L1}^*) - \sin(\omega_1^* \cdot \tau) \cdot Z_{CM} \right] \right\} + \\ C_3 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot \tau) + C_4 \cdot \exp(\lambda_2 \cdot \tau); \quad (11)$$

$$P = \frac{P_{MAX}}{2} \cdot \left\{ 1 - \frac{X_{C1}^*}{\sqrt{Z_{CM}^2 + (X_{C1}^* - X_{L1}^*)^2}} \cdot \cos(\omega_1^* \cdot \tau + \psi_1) \right\} +$$

$$C_3 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot \tau) + C_4 \cdot \exp(\lambda_2 \cdot \tau), \quad (12)$$

где X_{C1}^* , X_{L1}^* — то же, что и в формулах (8), (9), для частоты вынужденных колебаний жидкости n_1^* ;

$$C_3 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left\{ P_1 \cdot \lambda_2 - \frac{P_{MAX} \cdot \lambda_2}{2} \cdot \left[1 + \frac{\zeta_s^2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + (n_1^*)^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + (n_1^*)^2} \right) \right] \right\} +$$

$$\frac{P_{MAX}}{2} \cdot \frac{\zeta_s^2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot n_1^* \cdot \left\{ \frac{1}{\lambda_2^2 + (n_1^*)^2} - \frac{1}{\lambda_1^2 + (n_1^*)^2} \right\} \Bigg] \Bigg\} — первая константа интегрирования;$$

$$C_4 = P_1 - \frac{P_{MAX}}{2} \cdot \left[1 + \frac{\zeta_s^2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + (n_1^*)^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + (n_1^*)^2} \right) \right] - C_3 — вторая константа интегрирования;$$

$$\psi_1 = \arctg\left(\frac{Z_{CM}}{X_{L1}^* - X_{C1}^*}\right) — смещение фазы колебания при $n \geq \zeta_s$;$$

$$\psi_1 = \arctg\left(\frac{Z_{CM}}{X_{L1}^* - X_{C1}^*}\right) - \pi — смещение фазы колебания при $n < \zeta_s$.$$

Решением уравнения (5) является функция

$$Q_{TP} = \frac{P_{MAX}}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{Z_{CM}} + \frac{1}{Z_{CM}^2 + X_{L\text{ЭKB}}^2} \cdot [Z_{CM} \cdot \cos(\omega_{\text{ЭKB}} \cdot \tau) + X_{L\text{ЭKB}} \cdot \sin(\omega_{\text{ЭKB}} \cdot \tau)] \right\} +$$

$$C \cdot \exp\left(-\frac{Z_{CM}}{L} \cdot \tau\right), \quad (13)$$

где

$$C = Q_{TP.1} - \frac{P_{MAX}}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{Z_{CM}} + \frac{Z_{CM}}{Z_{CM}^2 + X_{L\text{ЭKB}}^2} \right\} — константа интегрирования.$$

Объемный расход жидкости в начале трубопровода Q_{Σ} будет складываться из расхода всей массы жидкости Q_{TP} и расхода деформации Q

$$Q_{\Sigma} = Q_{TP} + Q \quad (14)$$

С учетом (4) расход деформации будет определяться по формулам:

— для непротяженного трубопровода

$$Q = -\frac{P_{MAX}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{Z_{CM}^2 + (X_{C2}^* - X_{L2}^*)^2}} \cdot \sin(\omega_2^* \cdot \tau - \psi_2) + \\ \exp(\alpha \cdot \tau) \cdot \zeta_s \cdot [C_1 \cdot \cos(\beta_s \cdot \tau - \varphi_1) + C_2 \cdot \cos(\beta_s \cdot \tau - \varphi_2)], \quad (15)$$

где

$$\varphi_1 = \arctg\left(-\frac{n_s}{\alpha}\right); \quad \varphi_2 = \arctg\left(\frac{\alpha}{n_s}\right) \text{ — смещение фаз колебаний;}$$

— для протяженного

$$Q = \frac{P_{MAX}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{Z_{CM}^2 + (X_{C1}^* - X_{L1}^*)^2}} \cdot \sin(\omega_1^* \cdot \tau + \psi_1) + \\ \exp(\alpha \cdot \tau) \cdot \zeta_s \cdot [C_3 \cdot \cos(\beta_s \cdot \tau - \varphi_1) + C_4 \cdot \cos(\beta_s \cdot \tau - \varphi_2)]. \quad (16)$$

Резонансная частота трубопроводов при 20 °С:

$$\text{протяженного } \zeta_s = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{c(t)_s}{l_{TP}} = 0,422 \frac{1}{c};$$

$$\text{непротяженного } \zeta_s = 6,467 \frac{1}{c}.$$

Результаты эксперимента и их обсуждение

Результаты измерения давления по длине трубопровода при стационарном режиме течения, а также некоторые наиболее характерные осредненные величины давления при переменном расходе (давлении), амплитуды колебания давления по трассе представлены ниже (см. рис. 4, 5). Стоит отметить, что частота вращения крана менялась с шагом 0,1 Гц, однако действие потока жидкости и внутреннее трение крана отклоняло настраиваемую частоту.

На рисунках линии имеют следующее обозначение:

- изменение давления по длине на стационарном режиме;
- амплитуда колебания;
- осредненное изменение давления по длине на режиме с переменным расходом.

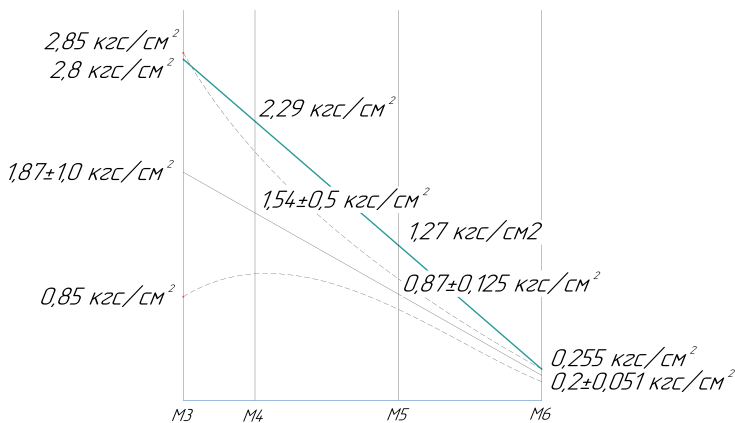


Рис. 4. Распределение давления при стационарном режиме и осредненное давление при переменном расходе с частотой 0,65 Гц (1,0 Гц) по длине экспериментального *протяженного трубопровода*. Режим № 1

Fig. 4. Distribution of pressure in the stationary mode and averaged pressure at a variable flow rate with a frequency of 0.65 Hz (1.0 Hz) along the length of the experimental *extended pipeline*. Mode no. 1

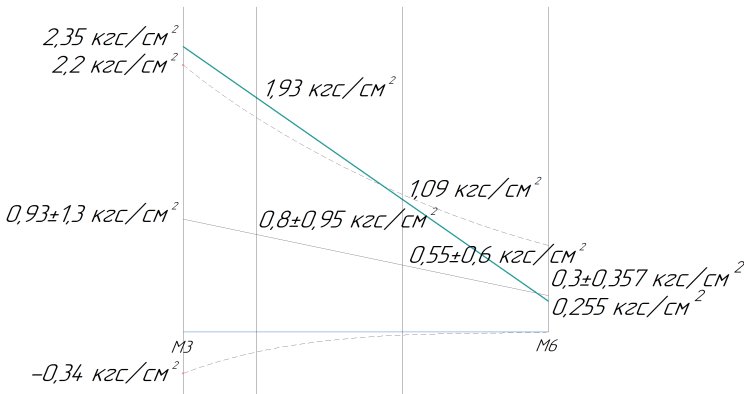


Рис. 5. Распределение давления при стационарном режиме и осредненное давление при переменном расходе с частотой 0,62 Гц (1,0 Гц) по длине экспериментального *непротяженного трубопровода*. Режим № 1

Fig. 5. Distribution of pressure in the stationary mode and averaged pressure at a variable flow rate with a frequency of 0.62 Hz (1.0 Hz) along the length of the experimental *non-extended pipeline*. Mode no. 1

Анализируя графики, можно отметить, что осредненная величина давления, как выяснилось, соотносится с противодействием от комплексного гидравлического сопротивления трубопровода $P_Z = Z \cdot Q_2$, соответствующего расходу на его конце Q_2 , определяемого как при стационарной перекачке. Таким образом, в трубопроводе организуется, условно говоря, стационарное движение с расходом, равным измеряемому приборами расходу на конце трубопровода. Этот расход предлагается называть *действующим значением расхода жидкости в трубопроводе* — Q_{TP} . На это условно стационарное движение накладывается волновое смещение частиц жидкости — *расход деформации* — Q , потребляющее энергию.

Экспериментально установлено, что при перекачке воды с переменным расходом значения расходов на разных концах трубопровода отличаются друг от друга на относительную величину, превышающую общую относительную погрешность измерений, составляющую не более 7%. Это говорит о том, что разница значений расходов на концах трубопровода носит неслучайный характер и не является погрешностью измерения. Причем для непротяженного трубопровода разность расходов более значительна — до 18%, чем для протяженного — до 11%. При стационарном режиме разность расходов не превышает 3%, что менее общей относительной погрешности измерений. Разность этих расходов объясняется существованием в трубопроводе расхода деформации, отражающего смещение частиц при волновом процессе и преобразующегося в расход всей массы жидкости — движение. Но из-за потерь энергии это преобразование идет не в полной мере.

В ходе исследования было произведено измерение потребляемой насосами мощности из сети, а также произведен расчет затраченной насосом гидравлической мощности по следующим формулам:

$$N_1 = P_{TP} \cdot Q_1, \quad (17)$$

$$N_2 = N_{TP} = P_{TP} \cdot Q_2, \quad (18)$$

$$N_Z = P_Z \cdot Q_2 = Z_{CM} \cdot Q_2^2, \quad (19)$$

где N_1 — затраченная насосом гидравлическая мощность в начале трубопровода, в том числе включающая в себя мощность, затрачиваемую на колебательный процесс жидкости; N_2 — затраченная насосом гидравлическая мощность; P_{TP} — *действующее значение противодействия комплексного гидравлического сопротивления*, это значение соответствует действующему значению давления насоса по формуле (2), в которой $Q_Z = Q_1$; N_Z — активная комплексная мощность — мощность, потребляемая комплексным гидравлическим сопротивлением (от сил вязкого трения — активная составляющая и турбулентного сопротивления — реактивная составляющая), не учитывающая воздействие вынужденных колебаний.

На основании соответствия осредненной величины давления в начале трубопровода при перекачке с переменным расходом и противодействия гидравлического сопротивления при стационарной перекачке $P_Z = Z \cdot Q_2$, вытекает равенство $Z_{CM} = Z$. Комплексное

гидравлическое сопротивление трубопровода от сил вязкого трения и турбулентного сопротивления при перекачке с переменным расходом равно такому при стационарной перекачке.

Установлено, что действующее значение противодействия комплексного гидравлического сопротивления P_{TP} возможно рассчитать по формуле

$$Z_{TP} \cdot Q_2 = P_{TP}, \quad (20)$$

где Z_{TP} — это гидравлическое сопротивление трубопровода от сил вязкого трения, турбулентного сопротивления, а также вынужденного колебания частиц жидкости:

$$Z_{TP} = \sqrt{Z^2 + (X_{C1(2)}^* - X_{L1(2)}^*)^2}, \quad (21)$$

где $Z = \sqrt{R^2 + (X_{C1(2)} - X_{L1(2)})^2}$ — комплексное гидравлическое сопротивление трубопровода от вязкого и турбулентного трения при стационарном режиме течения, в котором R — параметр вязкого (активного) сопротивления, отражающий потери энергии только на вязкое трение [Коноплёв, Коробков, 2020]; $X_{C1(2)}$, $X_{L1(2)}$ — то же, что и в формулах (8), (9), для частоты трансформации энергии жидкости $n_{1(2)}$, отражающей смещение частиц при турбулентном течении жидкости.

Эта величина как раз и есть комплексное гидравлическое сопротивление трубопровода при перекачке с переменным расходом из формулы (1), $Z_{CM} = Z_{TP}$.

Таким образом, выражение (1) можно представить через действующие значения расхода на конце трубопровода $Q_2 = Q_{TP}$ и противодействия комплексного гидравлического сопротивления P_{TP} . В этом случае потребляемая насосом мощность будет определяться по формуле

$$N_1 = Z_{CM} \cdot Q_2 \cdot Q_1. \quad (22)$$

Из проведенных измерений замечено, что $N_1 > N_2$. Это говорит о том, что часть мощности рассеивается при вынужденном волновом колебательном процессе жидкости и стенки трубопровода.

Наблюдения показывают, что если возбудить насосом с помощью крана колебания в начале трубопровода с частотой n , то *одновременно весь объем жидкости совместно со стенкой трубопровода* будет колебаться с совершенно другой частотой $n_{ЭКВ}$. Хотя пульсовая волна имеет ту же частоту n , что и источник колебания. При этом в жидкости возбуждаются дополнительные колебания от вынужденного смещения частиц при ее движении с частотами $n_{1(2)}^*$, которые накладываются на колебания частиц с частотами $n_{1(2)}$, порождающих турбулентность.

С другой стороны, затрачиваемую насосом гидравлическую мощность можно определить по классической формуле, в которой гидравлическое сопротивление будет представлять собой обобщенную величину $Z_{ОБЩ}$, учитывающую действие сил вязкости, турбулентного сопротивления, относительного смещения вынужденных колебаний жидкости, а также смещение от деформации жидкости и трубопровода:

$$N_1 = Z_{\text{ОБЩ}} \cdot Q_2^2, \quad (23)$$

где

$$Z_{\text{ОБЩ}} = \sqrt{Z_{\text{TP}}^2 + (X_{\text{C ЭКВ}} - X_{\text{Л ЭКВ}})^2}; \quad (24)$$

$$N_1 = \sqrt{R^2 + (X_{\text{C1(2)}} - X_{\text{L1(2)}})^2 + (X_{\text{C1(2)}}^* - X_{\text{L1(2)}}^*)^2 + (X_{\text{C ЭКВ}} - X_{\text{Л ЭКВ}})^2} \cdot Q_2^2;$$

$$N_1 = \sqrt{N_Z^2 + [(X_{\text{C1(2)}}^* - X_{\text{L1(2)}}^*)^2 + (X_{\text{C ЭКВ}} - X_{\text{Л ЭКВ}})^2] \cdot Q_2^4};$$

$$N_1 = \sqrt{N_2^2 + (X_{\text{C ЭКВ}} - X_{\text{Л ЭКВ}})^2 \cdot Q_2^4}.$$

Благодаря этим соотношениям и полученным данным, возможно определить все частоты колебательного процесса. Однако связи между частотой вынужденных колебаний и показанными в работе частотами установить пока не удалось.

В работе также проанализировано затухание амплитуды волн давления вынужденных колебаний — затухание пульсовой волны. Результаты показаны на рис. 6, 7.

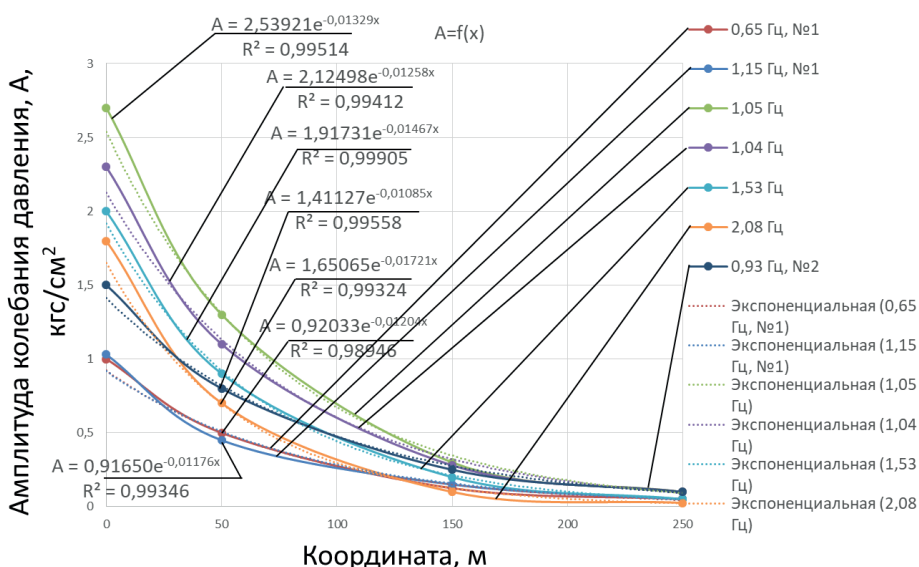


Рис. 6. Затухание амплитуды пульсовой волны по координате модели протяженного трубопровода (график 0,65, 1,15 Гц на Режиме № 1; 0,93 Гц на Режиме № 2; остальные графики на Режиме № 3)

Fig. 6. Damping of the pulse wave amplitude by the coordinate of the extended pipeline model (graph 0.65, 1.15 Hz in Mode no. 1; 0.93 Hz in Mode no. 2; other graphs in Mode no. 3)

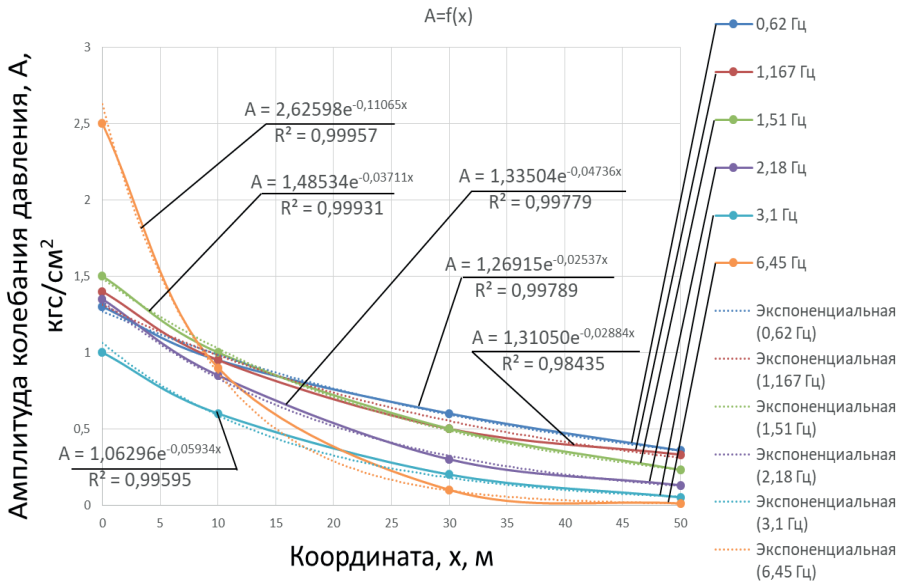


Рис. 7. Затухание амплитуды пульсовой волны на Режиме № 1 по координате модели непротяженного трубопровода

Fig. 7. Damping of the pulse wave amplitude in Mode no. 1 according to the coordinate of the *non-extended pipeline* model

На рис. 7 хорошо видно, что для непротяженного трубопровода существует возможность увеличения амплитуды колебания давления для движущейся жидкости. При этом обратная волна давления накладывается с возникающей волной давления от открытия крана в начале трубопровода. Эти две волны совпадают по своей фазе в начальной точке трубопровода.

Из рисунков хорошо прослеживается экспоненциальный закон затухания волн. Но можно видеть, что при увеличении частоты вынужденных колебаний скорость затухания выше. Закон, отражающий затухание волны, возможно представить в классическом виде

$$A_x = A_0 \cdot \exp[\alpha_x \cdot x], \quad (25)$$

где A_0 — амплитуда колебания в начале трубопровода; α_x — коэффициент затухания волны по координате.

Как установлено в исследовании, этот коэффициент линейно зависит от частоты вынужденных колебаний (рис. 8). Его возможно определить по полученной формуле

$$\alpha_x = \frac{\alpha}{c(t; Z)_{l(2)}} + h \cdot n, \quad (26)$$

где α — то же, что и в формуле (7); $c(t; Z)_{(2)}$ — скорость распространения колебания; h — постоянная, зависящая от физических характеристик трубопровода и жидкости (в работе не изучалась).

Зависимость коэффициента затухания волны α_x от частоты вынуждающих колебаний n представлена на рис. 8.

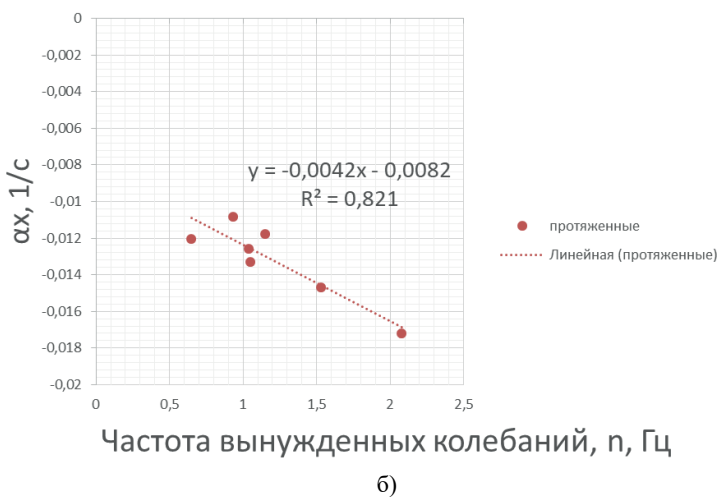
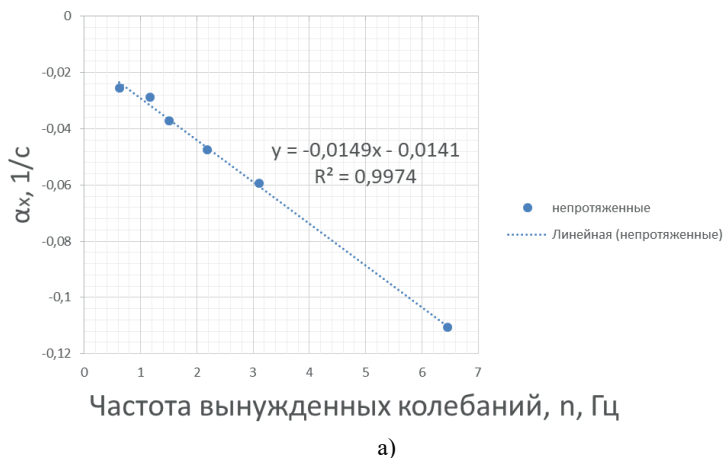


Рис. 8. Зависимость коэффициента затухания для экспериментального стенда от частоты вынужденных колебаний (а) — непротяженные; б) — протяженные)

Fig. 8. Dependence of the attenuation coefficient for an experimental bench on the frequency of forced oscillations (a) — non-extended; б) — extended)

Из формул (26), (25) и (7) вытекает тождественность потерь энергии жидкости при ее движении как тела и потерь энергии распространяющейся волны, переносящей энергию источника на расстояние.

В результате проведенного исследования установлено, что воздействие источника энергии переменной мощности, изменяющейся по гармоническому закону, приводит к появлению дополнительного волнового сопротивления, зависящего от частоты подводимой мощности. Это приводит к уменьшению расхода по сравнению со стационарной перекачкой в зависимости от частоты изменения мощности: на 18% и более для протяженного трубопровода и на 30% и более для непротяженного. При этом расход жидкости в начале трубопровода Q_1 оказывается выше, чем расход в конце Q_2 : на 10–12% для протяженного трубопровода и на 11–16% для непротяженного. С ростом частоты вынужденных колебаний разница увеличивается. Это указывает на существование расхода деформации жидкости при перекачке с переменным расходом — дополнительного относительного смещения частиц жидкости из-за вынужденных колебаний. В свою очередь, расход изменяется по закону, близкому к гармоническому с амплитудой, превышающей действующее (измеряемое) значение на 20–30%. Уменьшение осредненного или действующего значения расхода приводит к некоторому снижению частоты трансформации энергии, что обуславливает изменение распределения давления по длине трубопровода. Графики осредненных значений давления в сравнении со стационарным распределением показаны на рисунках. Из графиков видно, что осредненная величина давления, пропорциональная противодействию от комплексного гидравлического сопротивления трубопровода $P_Z = Z \cdot Q_2$, меньше таковой при стационарном режиме: на 35% и более для протяженного трубопровода, на 50% и более для непротяженного. Действующее значение давления $P_{TP} = Z_{TP} \cdot Q_2$ оказывается сопоставимо с противодействием комплексного гидравлического сопротивления трубопровода при стационарном режиме $P_Z = Z \cdot Q_{СТАЦ}$. Затраченная насосом гидравлическая мощность N_1 на перекачку с переменным расходом несколько меньше, чем при стационарном режиме, однако удельные затраты выше: на 10% и более для протяженного; на 30% и более для непротяженного трубопровода. С увеличением частоты вынужденных колебаний удельные затраты возрастают.

Воздействие на жидкость насоса с переменной мощностью, с частотой, равной или близкой к резонансной частоте колебаний жидкости в трубопроводе, не приводит к резонансным эффектам, вследствие значительного затухания волн давления и расхода от возрастающей частоты трансформации энергии и, соответственно, турбулентного сопротивления, связанного с дополнительным вынужденным смещением частиц жидкости.

Заключение

Полной синхронизации вынужденных колебаний и колебательного процесса, связанного с турбулентностью, добиться не удалось. При попытке подстраивания частоты вынужденных колебаний n , создающих в жидкости дополнительные колебания с частотой $n_{1(2)}^*$, расход жидкости изменялся, что приводило к изменению частоты трансформации энергии при турбулентном режиме течения $n_{1(2)}$. Таким способом резонанса частотных характеристик системы добиться не удалось и, следовательно, воздействовать так на турбулентность с целью ее уменьшения оказалось невозможно. Созданные искусственно

вынужденные колебания с эквивалентной частотой $n_{ЭКВ}$ привели к смещению частот трансформации энергии $n_{1(2)}$, возникновению дополнительного волнового процесса во всем объеме жидкости с частотой $n_{1(2)}^*$ и породили тем самым дополнительное реактивное сопротивление движущейся жидкости. При воздействии частоты изменения мощности насоса, близкой к резонансной частоте, в трубопроводе значительного изменения расхода и давления текущей жидкости не происходит. Объяснением этому может служить увеличение турбулентного сопротивления движущейся жидкости, которое связано с увеличением частоты трансформации ее энергии, а также отсутствие синхронизации этой частоты и резонансной частоты системы.

Описанная в работе математическая модель изменения давления в начале трубопровода показывает, что с ростом частоты вынужденных колебаний происходит уменьшение их амплитуды и установление осредненного давления по формуле $P_z = Z \cdot Q_2$. Однако использование стрелочных манометров, имеющих инерционность стрелки, не позволило проверить получаемое решение. Для малых частот вынужденных колебаний полученные амплитуды схожи с наблюдаемой, с погрешностью до 20%.

Благодаря этим опытам, оказалось возможным наблюдать расход деформации Q , отражающий деформацию жидкости и стенки трубопровода при переменном давлении насоса. Турбулентность хаотична, однако ее действие на гидравлическое сопротивление возможно представить в виде рассогласованной, несинхронной деформации и смещения с ускорением и торможением некоторого количества элементарных объемов, заполняющих трубопровод. Эти эксперименты демонстрируют аналогию смещения частиц жидкости от вынужденных колебаний и смещения частиц при турбулентном движении, при котором частота относительного несинхронного смещения частиц жидкости (колебательного процесса $n_{1(2)}$) порождает реактивное — турбулентное сопротивление. В исследовании частота вынужденных колебаний также порождала дополнительное реактивное сопротивление, увеличивая общее гидравлическое сопротивление и снижая расход жидкости.

Список источников

- Акулов В. А. 2006. Модель пульсовой волны и ее реализация в среде Excel // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Третьей Всероссийской научной конференции. Часть 4. Математические модели в информационных технологиях / редколлегия: В. П. Радченко (отв. ред.), Э. Я. Рапопорт, Е. Н. Огородников, М. Н. Саушкин (отв. секр.). Самара: Самарский государственный технический университет. С. 13–16.
- Альтшуль А. Д. 1982. Гидравлические сопротивления. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Недра. 224 с.
- Бюргерс И. 1936. О применении методов статистической механики к теории турбулентного движения жидкостей // Проблемы турбулентности. Сборник переводных статей / под ред. М. А. Великанова и Н. Т. Швейковского. М. — Ленинград: Онти. Глав. ред. общетехн. лит-ры и номографии. 332 с.
- Громека И. С. 1952. Собрание сочинений / [отв. ред. П. Я. Кочина]. М.: АН СССР. 296 с. URL: <http://books.e-heritage.ru/book/10079943> (дата обращения: 29.05.2026).

- Коноплёв Н. Г., Коробков Г. Е. 2020. Эффекты упругости и инерции жидкости при переходных процессах в трубопроводе // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. № 3. С. 44–53. <https://doi.org/10.24411/0131-4270-2020-10309>
- Коршак А. А., Хусаин М. Н. (2008). Условия эффективного применения противотурбулентной присадки на действующих нефтепроводах // Трубопроводный транспорт – 2008: материалы IV Международной учебно-научно-практической конференции / Редкол.: А. М. Шаммазов и др. Уфа: Типография УГНТУ. С. 68–69.
- Меркулов В. И. 2011. Распространение пульсовой волны по большим кровеносным сосудам // Актуальные проблемы современной науки. № 5 (61). С. 132–140.
- Наврузов К., Бегжанов А. Ш., Шарипова Ш. Б., Жумаев Ж. 2023. Математическое моделирование гидродинамического сопротивления в колебательном потоке вязкоупругой жидкости // Известия вузов. Математика. № 8. С. 45–55. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-8-45-55>
- Раднаев Б. Б., Цыбиков А. С., Хабитуев Б. В. 2017. ARIMA-модель пульсового сигнала // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. № 1. С. 78–85.
- Симаков С. С. 2018. Современные методы математического моделирования кровотока с помощью осредненных моделей // Компьютерные исследования и моделирование. Том 10. № 5. С. 581–604.
- Симоненко А. П. [и др.]. 2019. Гидродинамически-активные композиции в энергосбережении и экологии: монография / под общ. ред. д. т. н. А. П. Симоненко. Донецк: ДонНУ. 207 с.
- Умов Н. А. 1874. Уравнения движения энергии в телах. Одесса: Типография Ульриха и Шульце. 58 с.
- Усанов Д. А., Скрипаль А. В., Калинин М. Ю., Баатыров Р. Т. 2017 Оценка общего периферического сопротивления на основе модели упругого резервуара // Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине – 2017: материалы Всероссийской школы-семинара. Под ред. Д. А. Усанова. Саратов: Издательство «Саратовский источник». С. 23–25.
- Федотов А. А. 2015. Математическая модель гемодинамических процессов формирования периферической пульсовой волны // Биофизика. Том 60. № 2. С. 343–347.
- Шаубергер В. 2007. Энергия воды / под ред. А. Крысенко; [пер. с англ. М. Новиковой]. М.: Яуза, Эксмо. 318 с.
- Шлихтинг Г. 1974. Теория пограничного слоя / пер. Г. А. Вольперта с 5-го нем. изд., испр. по 6-му (амер.) изд., под ред. Л. Г. Лойцянского. М.: Наука. 711 с.
- Murakami M., Kikuyama K., Nishibori K. 1983. Flow in axially rotating pipes. Nagoya University, Faculty of Engineering // Memoirs. Vol. 35. Pp. 1–35.
- Ohmi M., Iguchi M. 1980. Flow pattern and frictional losses in pulsating pipe flow: Part 2, effect of pulsating frequency on the turbulent frictional losses // Bulletin of the JSME. Vol. 23. No. 186. Pp. 2021–2028. <https://doi.org/10.1299/jsme1958.23.2021>
- Schultz-Grunow F. 1940. Pulsierender Durchfluss durch Rohre // Forsch. Ing. Wes. 11. S. 170–187.
- Shukurov Z. K., Yuldoshev B. Sh., Begjanov A. 2022. Investigation of hydraulic resistance of pulsating flows of viscous fluid in elastic pipe // E3S Web of Conferences. Vol. 365. Article 03026. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202336503026>

Sundstrom L. R. J., Cervantes M. J. 2018. On the similarity of pulsating and accelerating turbulent pipe flows // *Flow, Turbulence and Combustion*. Vol. 100. Pp. 417–436. <https://doi.org/10.1007/s10494-017-9855-5>

References

- Akulov, V. A. Pulse wave model and its implementation in Excel. In E. A. Rapoport (ed.), *Mathematical Modeling and Boundary Value Problems. Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference. Part 4. Mathematical Models in Information Technology* (pp. 13–16). Samara State Technical University. [In Russian]
- Altshul, A. D. (1982). *Hydraulic Resistances* (2nd ed. revised and enlarged). Nedra. [In Russian]
- Burgers, J. (1936). On the application of statistical mechanics methods to the theory of turbulent fluid motion. In M. A. Velikanov, N. T. Shveikovskiy (eds.), *Turbulence Problems. Collection of Translated Articles*. Onti. Glav. red. obshchetekhn. lit-ry i nomographii. [In Russian]
- Gromeka, I. S. (1952). *Collected Works* (Exec. Ed. A. P. Kochina). Academy of Sciences of the USSR. Retrieved May 29, 2026, from <http://books.e-heritage.ru/book/10079943> [In Russian]
- Konoplev N. G. & Korobkov G. E. (2020). Resiliency and liquid inertia effects at transient process in the pipeline. *Transport and Storage of Oil Products and Hydrocarbons*, (3), 44–53. <https://doi.org/10.24411/0131-4270-2020-10309>
- Korshak, A. A., & Khusain, M. N. (2008). Conditions for effective use of anti-turbulence additives in existing oil pipelines. In Proceedings of the 4th International Educational, Scientific and Practical Conference “Pipeline Transport – 2008” (pp. 68–69). Ufa State Petroleum Technical University. [In Russian]
- Merkulov, V. I. (2011). Propagation of pulse wave through large blood vessels. *Actual Problems of Modern Science*, (5), 132–140. [In Russian]
- Navruzov, K., Begjanov, A. Sh., Sharipova, Sh. B., & Zhumaev, Zh. (2023). Mathematical modeling of hydrodynamic resistance in an oscillatory flow of a viscoelastic fluid. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, (8), 45–55. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-8-45-55> [In Russian]
- Radnaev, B. B., Tsybikov, A. S., & Khabituiev, B. V. (2017). ARIMA-model of pulse wave. *BSU Bulletin. Mathematics, Informatics*, (1), 78–85. [In Russian]
- Simakov, S. S. (2018). Modern methods of mathematical modeling of blood flow using reduced order methods. *Computer Research and Modeling*, 10(5), 581–604. [In Russian]
- Simonenko, A. P. [et al.]. (2019). *Hydrodynamically Active Compositions in Energy Saving and Ecology*. DonNU. [In Russian]
- Umov, N. A. (1874). *Equations of Motion of Energy in Bodies*. Printing house of Ulrich and Schulze. [In Russian]
- Usanov, D. A., Skripal, A. V., Kalinkin, M. Yu., & Baatyrov, R. T. (2017). Estimation of total peripheral resistance based on the elastic reservoir model. In D. A. Usanov (ed.), *Proceedings of the All-Russian School-Seminar “Methods of Computer Diagnostics in Biology and Medicine — 2017”* (pp. 23–25). Saratovskii istochnik. [In Russian]
- Fedotov, A. A. (2015). Mathematical model of hemodynamic processes of peripheral pulse wave formation. *Biophysics*, 60(2), 343–347. [In Russian]

- Schauberger, V. (2007). *Energy of Water* (Ed. by A. Krysenko). Yauza, Eksmo. [In Russian]
- Schlichting, G. (1974). *Boundary Layer Theory* (Transl. from German by G. A. Volper, ed. By L. G. Loitsyanski). Nauka. [In Russian]
- Murakami, M., Kikuyama, K., & Nishibori, K. (1983). Flow in axially rotating pipes. Nagoya University, Faculty of Engineering. *Memoirs*, 35, 1–35.
- Ohmi, M., & Iguchi, M. (1980). Flow pattern and frictional losses in pulsating pipe flow: Part 2, effect of pulsating frequency on the turbulent frictional losses. *Bulletin of the JSME*, 23(186), 2021–2028. <https://doi.org/10.1299/jsme1958.23.2021>
- Schultz-Grunow, F. (1940). Pulsierender Durchfluss durch Rohre. *Forsch. Ing. Wes*, 11, 170–187. [In German]
- Shukurov, Z. K., Yuldoshev, B. Sh., & Begjanov, A. (2022). Investigation of hydraulic resistance of pulsating flows of viscous fluid in elastic pipe. *E3S Web of Conferences*, 365, 03026. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202336503026>
- Sundstrom, L. R. J., & Cervantes, M. J. (2018). On the similarity of pulsating and accelerating turbulent pipe flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 100, 417–436. <https://doi.org/10.1007/s10494-017-9855-5>

Информация об авторах

- Николай Геннадьевич Коноплёв, старший преподаватель, кафедра транспорта и хранения нефти и газа, Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия
giipr2010@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6670-4738>
- Геннадий Евгеньевич Коробков, доктор технических наук, профессор, кафедра транспорта и хранения нефти и газа, Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия
korobkov45@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8507-6500>
- Анна Павловна Янчушка, кандидат экономических наук, доцент, кафедра математики, Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия
zlatitsa@yandex.ru

Information about the authors

- Nikolay G. Konoplev, Senior Lecturer, Department of Transport and Storage of Oil and Gas, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia
giipr2010@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6670-4738>
- Gennady E. Korobkov, Dr. Sci. (Tech.), Professor, Department of Transport and Storage of Oil and Gas, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia
korobkov45@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8507-6500>
- Anna P. Yanchushka, Cand. Sci (Econ.), Associate Professor, Department of Mathematics, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia
zlatitsa@yandex.ru

Исследование влияния неизотермических условий на расслоение эмульсии типа «вода в масле» методом математического моделирования

Ахат Вилевич Гимадеев , Айрат Ахматович Мусин,
Вилена Ильшатовна Валиуллина, Лиана Ароновна Ковалева

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
Контакт для переписки: arockerf@yandex.ru 

Аннотация. В настоящем исследовании изучается процесс неизотермического расслоения эмульсии типа «вода в масле» в прямоугольной полости. Модель учитывает зависимость вязкости несущей фазы от температуры, а также влияние стесненности осаждения капель. Решение одномерной задачи выполнено в рамках однотемпературного приближения на базе следующих допущений: эмульсия считается монодисперсной, конвективные потоки в системе отсутствуют. Численная реализация осуществлена в среде OpenFOAM с применением модифицированного решателя. Основное внимание уделено анализу влияния неизотермических граничных условий на динамику осаждения дисперсной фазы.

Ключевые слова: численное моделирование, водонефтяная эмульсия, OpenFOAM, неизотермические условия, осаждение капель, одножидкостное приближение

Цитирование: Гимадеев А. В., Мусин А. А., Валиуллина В. И., Ковалева Л. А. 2026. Исследование влияния неизотермических условий на расслоение эмульсии типа «вода в масле» методом математического моделирования // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 12. № 2 (46). С. 87–104. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-87-104>

Поступила 30.03.2026; одобрена 14.04.2026; принята 15.04.2026

Study of the effect of non-isothermal conditions on the stratification of a water-in-oil emulsion using mathematical modeling

Akhat V. Gimadeev✉, Airat A. Musin,
Vilena I. Valiullina, Liana A. Kovaleva

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia
Corresponding author: arockerf@yandex.ru ✉

Abstract. This paper examines the process of non-isothermal stratification of a water-in-oil emulsion in a rectangular cavity. The model takes into account the dependence of the viscosity of the carrier phase on temperature, as well as the effect of the tightness of droplets settling. The solution of the one-dimensional problem is performed within the framework of a single-temperature approximation based on the following assumptions: the emulsion is considered monodisperse, there are no convective flows in the system. Numerical implementation is carried out in the OpenFOAM environment using a modified solver. The main focus is on the analysis of the influence of non-isothermal boundary conditions on the dynamics of the dispersed phase settling.

Keywords: numerical modeling, oil-water emulsion, OpenFOAM, nonisothermal conditions, droplet settling, one-fluid approximation

Citation: Gimadeev, A. V., Musin, A. A., Valiullina, V. I. & Kovaleva, L. A. (2026). Study of the effect of non-isothermal conditions on the stratification of a water-in-oil emulsion using mathematical modeling. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 12(2), 87–104. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-87-104>

Received Mar. 30, 2026; Reviewed Apr. 14, 2026; Accepted Apr. 15, 2026

Введение

Эмульсии типа «вода в масле» находят широкое применение в различных технологических процессах, в частности в металлургии, пищевой промышленности и медицине. Особую значимость проблема эффективного разделения таких систем приобретает в нефтегазовом секторе. Решение этой задачи не только способствует повышению качества товарной нефти и значительному снижению энергетических затрат на ее транспортировку, но и позволяет минимизировать накопление нефтяных шламов, что имеет критическое значение для экологической безопасности производства [Петровский и др., 2018].

Согласно общепринятой классификации, все методы разделения нефтяных эмульсий образуют несколько основных групп [Виноградов, Винокуров, 2007]: механические (гравитационное отстаивание, центрифугирование, фильтрация), термические (нагрев, промывка горячей водой), физико-химические, электрические. Механические методы разрушения водонефтяных эмульсий, включающие замораживание-оттаивание, центрифугирование, гравитационное отстаивание и ультразвуковую обработку, описаны в работах [Rajaković, Skala, 2006; Rehfeld, 1974; Romanova et al., 2022]. Физико-химические методы сепарации основаны на введении реагентов-деэмульгаторов [Бадикова и др., 2019; Hao et al., 2016; Razi et al., 2011; Хрисониди, Струева, 2020], которые, обладая более высокой поверхностной активностью, чем природные стабилизаторы, замещают последние на межфазной границе. Это приводит к ослаблению защитной оболочки водных глобул и снижению агрегативной устойчивости эмульсии. Электрическая обработка, широко применяемая в промышленности, заключается в воздействии на дисперсную систему постоянного или переменного электрического поля [Зиннатуллин и др., 2015; Hajivand, Vaziri, 2015; Elektorowicz et al., 2006; Perles et al., 2012; Rodionova et al., 2014; Tarantsev, Tarantseva, 2017]. Термическое разрушение эмульсий, реализуемое путем повышения температуры смеси [Tan et al., 2007; Fang, Lai, 1995; Kuzmenko et al., 2016; Kovaleva et al., 2021; Martínez-Palou et al., 2013], способствует снижению вязкости углеводородной фазы и увеличению разности плотностей контактирующих фаз, что интенсифицирует процесс седиментации капель воды.

В вычислительной гидродинамике многофазных систем с развитой свободной поверхностью ключевыми подходами при моделировании являются метод объема жидкости (VOF) [Osher, Sethian, 1988] и метод отслеживания фронта [Копысов и др., 2015]. В зависимости от масштаба рассмотрения выделяют также двухконтинуальный и одножидкостный методы приближения. Применение двухконтинуального подхода в программном комплексе ANSYS Fluent для моделирования разделения водонефтяных эмульсий продемонстрировано в исследовании [Дмитриев, 2018]. Альтернативный одножидкостный подход был реализован в работах [Мусин и др., 2017; Гимадеев и др., 2021] в среде OpenFOAM при изучении процессов гравитационного расслоения.

Для моделирования расслоения водонефтяной эмульсии в неизотермических условиях в настоящей работе применялся одножидкостный подход в сочетании с методом конечных объемов (FVM).

Целью работы является численное исследование расслоения водонефтяной эмульсии в прямоугольной полости в неизотермических начальных и граничных условиях с учетом стесненного осаждения капель.

Математическая постановка задачи

Рассматривалось неизотермическое расслоение эмульсии типа «вода в масле» в прямоугольной полости высотой h в поле силы тяжести (см. рис. 1). Дисперсионной средой являлось вазелиновое масло, а дисперсной фазой — вода. Начальное объемное содержание капель воды в эмульсии составило C_0 .

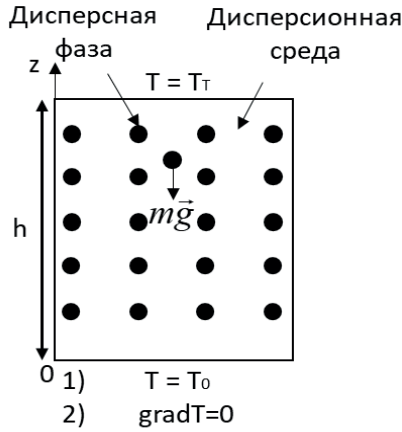


Рис. 1. Схема расчетной области

Fig. 1. Computational area scheme

Численное моделирование проведено в одномерной постановке с использованием одножидкостного приближения. Ось координат направлена вверх и параллельна линии действия силы тяжести (рис. 1). Система рассматривалась как монодисперсная эмульсия. С целью исключения возникновения свободноконвективных течений нагрев осуществлялся со стороны верхней границы. Исследовались два тепловых режима: с заданной постоянной температурой на нижней стенке и при условии ее теплоизоляции (рис. 1). Базовую математическую модель составили уравнение переноса объемной концентрации капельной фазы и уравнение теплопроводности, в которых учитывались силы, воздействующие на капли эмульсии:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(CU_d f(C)) = \frac{\partial}{\partial z}(D_d f(C) \frac{\partial C}{\partial z}); \quad (1)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho_d c_{pd} - \rho_f c_{pf}) \frac{\partial}{\partial z}(TCU_d f(C)) = \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}); \quad (2)$$

$$U_d = -\frac{2}{9} \frac{(\rho_d - \rho_f) r^2 g}{\mu_f} \frac{3\mu_f + 3\mu_d}{2\mu_f + 3\mu_d}; \quad (3)$$

$$\lambda = \lambda_d C + \lambda_f (1 - C); \quad (4)$$

$$\rho c_p = \rho_d c_{pd} C + \rho_f c_{pf} (1 - C); \quad (5)$$

$$f(C) = (1 - \frac{C}{C_{\max}})^\alpha, \quad (6)$$

где U_d — скорость осаждения капель воды в эмульсии по Рыбчинскому–Адамару; D_d — коэффициент диффузии; $f(C)$ — функция стесненного осаждения; ρ_d — плот-

ность дисперсной фазы; ρ_f — плотность дисперсионной среды; c_{pd} — теплоемкость дисперсной фазы; c_{pf} — теплоемкость дисперсионной среды; r — радиус капель воды; μ_d — динамическая вязкость дисперсной фазы; μ_f — динамическая вязкость дисперсионной среды; T — температура эмульсии; λ — коэффициент теплопроводности смеси; ρc_p — коэффициент объемной теплоемкости смеси; $C_{\max}$ — максимально возможная концентрация при плотной упаковке капель; α — эмпирический коэффициент. Индексами d и f обозначены величины, относящиеся к дисперсной фазе и дисперсионной среде соответственно.

Учитывается зависимость динамической вязкости вазелинового масла от температуры (маркеры на рис. 2). Табличные данные аппроксимированы эмпирической зависимостью (сплошная кривая на рис. 2):

$$\mu_f = \mu_{f0} e^{-\gamma(T-T_m)}, \quad (7)$$

где γ — температурный коэффициент вязкости, μ_{f0} — вязкость дисперсионной среды при температуре T_m . Зависимость остальных параметров от температуры не учитывается.

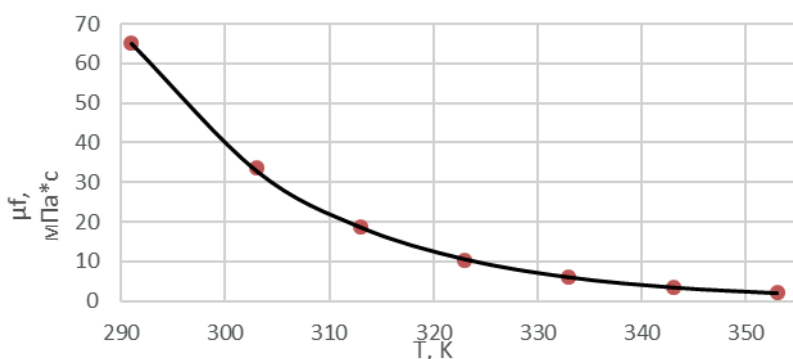


Рис. 2. Зависимость динамической вязкости вазелинового масла от температуры: точки — табличные значения, кривая — аппроксимация табличных данных

Fig. 2. Dependence of the dynamic viscosity of vaseline oil on temperature: dots — table values, curve — approximation of table data

Начальные условия:

$$C(z, t = 0) = C_0; T(z, t = 0) = T_0. \quad (8)$$

Граничные условия (на всех твердых границах задано условие отсутствия потока):

$$CU_d - D_d \nabla C = 0. \quad (9)$$

В рамках исследования задавались следующие граничные условия: на верхней стенке фиксировалась постоянная температура; на нижней стенке рассматривалось два режима — изотермический и адиабатический (теплоизолированный):

$$\begin{aligned} T(z=h) &= T_T; \\ 1) T(z=0) &= T_B = T_0; \quad 2) \nabla T(z=0) = 0; \\ T_T &\geq T_B. \end{aligned} \tag{10}$$

Численное моделирование

Решение сформулированной задачи (1)–(10) проводилось численно с использованием метода контрольных объемов. Дискретизация по времени осуществлялась по неявной схеме. Расчеты выполнялись в пакете OpenFOAM с использованием модифицированного решателя, адаптированного под условия неизотермического расслоения. Исследование проведено для модельной системы «вода в вазелиновом масле» со следующими физическими параметрами, представленными в табл. 1.

Таблица 1. Физические параметры дисперсной системы
Table 1. Physical parameters of the emulsion

Название физической величины	Единица измерения	Значение физической величины
ρ_f — плотность дисперсионной среды	кг/м ³	861
ρ_d — плотность дисперсной фазы	кг/м ³	1000
μ_{fo} — вязкость дисперсионной среды	мПа·с	65
μ_d — вязкость дисперсной фазы	мПа·с	1
λ_f — коэффициент теплопроводности дисперсионной среды	Вт/(м·К)	0,6
λ_d — коэффициент теплопроводности дисперсной фазы	Вт/(м·К)	0,125
c_{pf} — теплоемкость дисперсионной среды	Дж/(кг·К)	2130
c_{pd} — теплоемкость дисперсной фазы	Дж/(кг·К)	4200
C_{max} — максимально возможная концентрация при плотной упаковке		0,64
α — эмпирический коэффициент		3
γ — температурный коэффициент вязкости	1/К	0,057
r — радиус капель	мкм	15, 50
T_T — температура верхней грани ячейки	К	303÷313
T_0 — начальная температура эмульсии	К	293÷303
h — высота полости	м	0,08

Анализ динамики распределения капель воды в эмульсии проводился с учетом трех ключевых факторов: температурного режима, размера дисперсных частиц и типа гра-

нических условий на стенках расчетной области. Начальная концентрация капель воды в эмульсии была $C_0 = 0,05$. Разница температур ΔT между верхней гранью и начальной температурой эмульсии в полости составила 10 К.

На рис. 3 и 4 представлены распределения концентрации и температуры по высоте расчетной области для моментов времени 14500 и 22000 секунд для капель радиусом $r = 15$ мкм и при начальной температуре эмульсии $T_0 = 303$ К. Следует отметить, что распределение концентрации показано для интервала высот от 0 до 0,04 м (нижняя половина полости), так как к моменту времени 14000 с все капли воды уже опустились ниже указанной отметки в результате гравитационного осаждения.

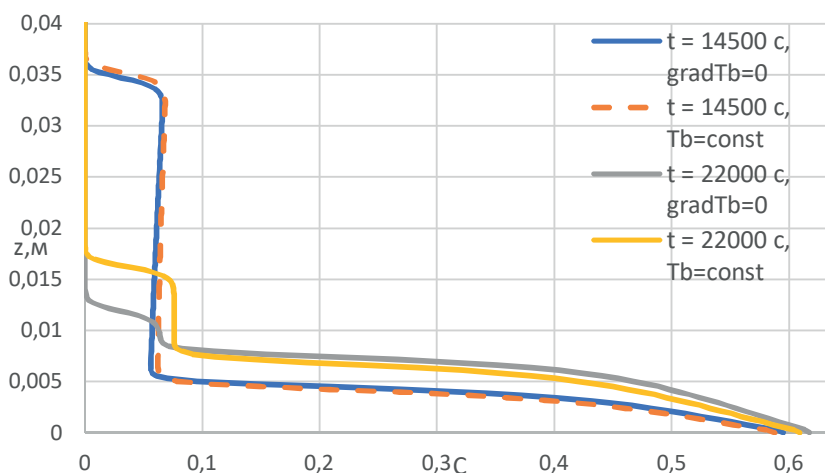


Рис. 3. Распределение концентрации капель воды в эмульсии по высоте в моменты времени 14500 и 22000 с при постоянной температуре на нижней грани ($T_b = \text{const}$) и теплоизолированной стенке ($\text{grad}T_b = 0$) для капель радиусом 15 мкм при начальной температуре 303 К

Fig. 3. Distribution of the concentration of water droplets in the emulsion along the height at time points of 14500 and 22000 s at a constant temperature on the lower face ($T_b = \text{const}$) and a thermally insulated wall ($\text{grad}T_b = 0$) for drops with a radius of 15 μm at the initial temperature 303 K

Начиная с момента времени 14500 с, фиксируется расхождение профилей для двух рассматриваемых случаев (рис. 3). Данное расхождение проявляется на высоте приблизительно 0,035 м, где разность температур между изотермическим (случай 1) и адиабатическим (случай 2) режимами достигает 1,2 К (см. рис. 4). Таким образом, в случае теплоизолированной нижней стенки вязкость масла, окружающего капли воды, оказывается ниже, что способствует более интенсивному осаждению дисперсной фазы.

Вследствие более высокой скорости осаждения в адиабатическом режиме число Пекле (11) составило 0,91, тогда как для изотермического случая его значение равно 0,83.

$$Pe = \frac{c_p U_d \rho h}{\lambda} . \quad (11)$$

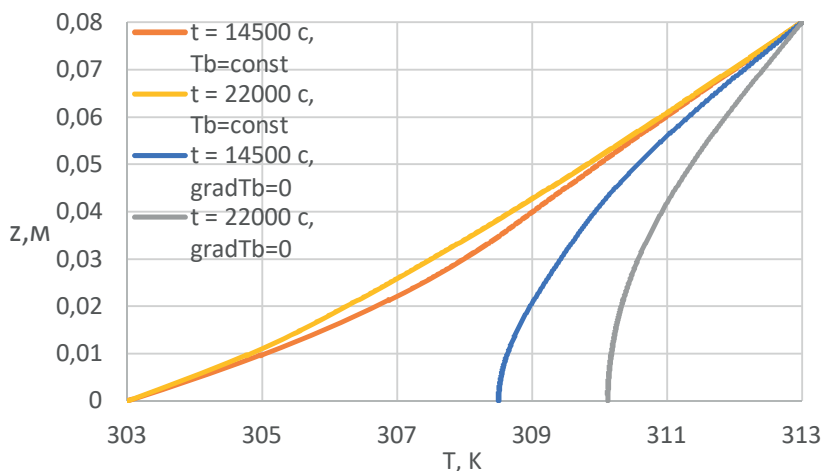


Рис. 4. Распределение температуры в эмульсии по высоте в моменты времени 14500 и 22000 с при постоянной температуре на нижней грани ($T_b = \text{const}$) и теплоизолированной стенке ($\text{grad}T_b = 0$) для капель радиусом 15 мкм в полости при начальной температуре 303 К

Fig. 4. Temperature distribution in the emulsion along the height at time points of 14500 and 22000 s at a constant temperature on the lower face ($T_b = \text{const}$) and a thermally insulated wall ($\text{grad}T_b = 0$) for drops with a radius of 15 μm at an initial temperature of 303 K

По мере развития процесса различия в распределении концентрации капель возрастают: к моменту времени 22000 с фронт концентрации в случае теплоизолированной стенки располагается на 0,005 м ниже, чем при фиксированной температуре на нижней границе.

На рис. 4 отчетливо проявляется нелинейный характер распределения температуры для случая с фиксированной температурой на нижней границе. Данное отклонение от линейного профиля обусловлено оседанием нагретых капель воды, температура которых превышает температуру окружающего масла. В момент времени 14500 с максимальное отклонение от линейности наблюдается на высоте 0,032 м (рис. 4), что соответствует положению фронта нагретых капель (см. рис. 3). К моменту времени 22000 с зона максимального отклонения смещается на высоту 0,015 м (рис. 4), также совпадающую с локализацией капельного фронта (см. рис. 3). Для случая с фиксированной температурой на нижней границе средняя температура эмульсии к моменту времени 22000 с оказывается ниже, чем к 14500 с. Данное снижение объясняется охлаждением осевших капель воды до температуры, поддерживаемой на нижней стенке, что приводит к понижению осредненной температуры всей системы.

На рис. 5 и 6 представлены распределения концентрации и температуры соответственно в полости по высоте в моменты времени 23000 и 36500 с для капель размером 15 мкм и при начальной температуре эмульсии 293 К.

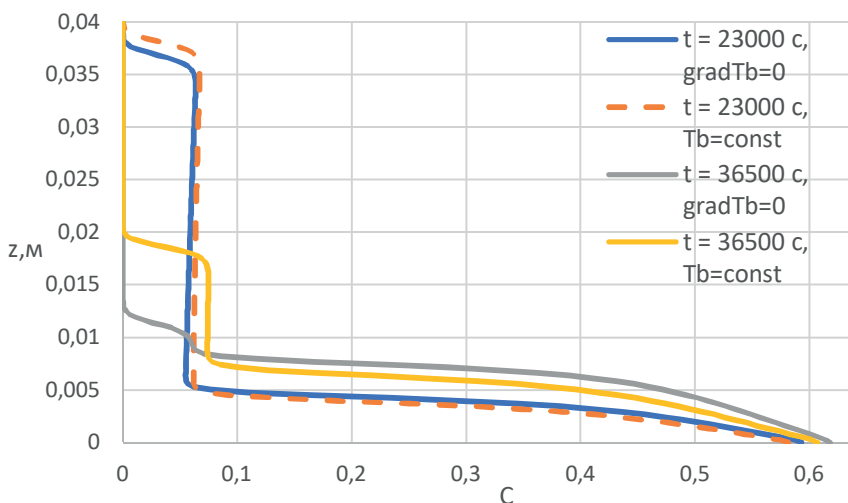


Рис. 5. Распределение концентрации капель воды в эмульсии по высоте в моменты времени 23000 и 36500 с при постоянной температуре на нижней грани ($T_b = \text{const}$) и теплоизолированной стенке ($\text{grad}T_b = 0$) для капель радиусом 15 мкм в полости при начальной температуре 293 К

Fig. 5. The distribution of the concentration of water droplets in the emulsion in height at time points of 23000 and 36500 s at a constant temperature on the lower face ($T_b = \text{const}$) and a thermally insulated wall ($\text{grad}T_b = 0$) for drops with a radius of 15 μm at the initial temperature 293 K

К моменту времени 23000 с фиксируется устойчивое расхождение профилей для двух рассматриваемых случаев (рис. 5). На высоте 0,0375 м, соответствующей положению фронта концентрации капель, разность температур между изотермическим (случай 1) и адиабатическим (случай 2) режимами достигает 2 К (см. рис. 6).

По мере развития процесса различия в распределении капельной фазы усиливаются: к моменту 36500 с фронт осаждения в случае теплоизолированной стенки располагается на 0,01 м ниже, чем при фиксированной температуре на нижней границе.

Аналогично ранее рассмотренному случаю с начальной температурой 303 К, для режима с постоянной температурой на нижней стенке наблюдается нелинейность температурного профиля (см. рис. 6). Максимальные отклонения от линейного распределения соответствуют положению фронта нагретых капель: на высоте 0,035 м в момент времени 23000 с и на высоте 0,02 м в момент времени 36500 с (сопоставление с рис. 5).

Число Пекле для данной начальной температуры имеет значения 0,55 и 0,48 для случаев с теплоизолированной стенкой и постоянной температурой соответственно. По сравнению с результатами моделирования для начальной температуры 303 К (см. рис. 3), где были более высокие числа Пекле, в данном случае (см. рис. 4), мы видим большую разницу в положении фронта капель между первым и вторым случаями. Это вызвано тем, что скорость осаждения капель становится практически в два раза меньше скорости распространения теплового фронта, о чем можно судить по значению числа Пекле.

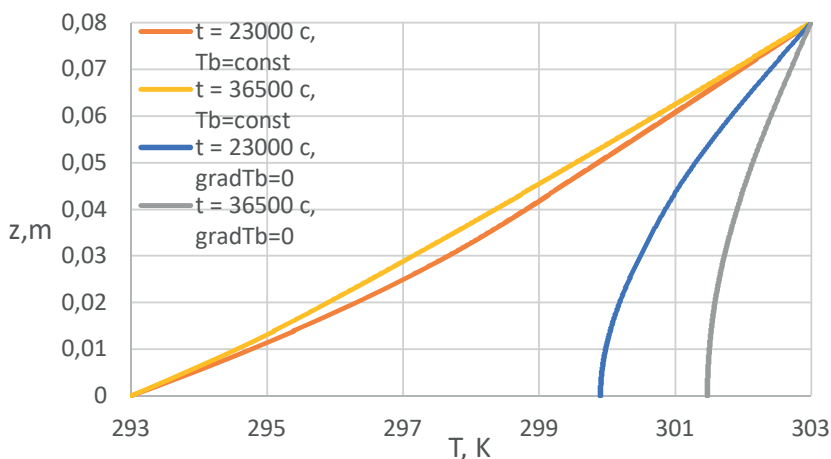


Рис. 6. Распределение температуры в эмульсии по высоте в моменты времени 23000 и 36500 с при постоянной температуре на нижней грани ($T_b = \text{const}$) и теплоизолированной стенке ($\text{grad}T_b = 0$) для капель радиусом 15 мкм в полости при начальной температуре 293 К

Fig. 6. Temperature distribution in the emulsion along the height at time points of 23000 and 36500 s at a constant temperature on the lower face ($T_b = \text{const}$) and a thermally insulated wall ($\text{grad}T_b = 0$) for drops with a radius of 15 μm at an initial temperature of 293 K

Видно, что в случае фиксированной температуры на нижней грани полости в момент времени 36500 с температура эмульсии ниже, чем в момент времени 23000 с, так как осевшие капли начинают остывать до температуры, зафиксированной на нижней грани, отдавая тепло окружающему их маслу. Таким образом, происходит распределение более низкой температуры в эмульсии.

На рис. 7 и 8 представлена динамика изменения положения фронта капель размером 15 мкм по высоте ячейки для случая с постоянной температурой на нижней грани и теплоизолированной нижней стенкой для начальных температур 293 и 303 К соответственно.

Видно, что в случае для капель размером 15 мкм и начальной температуры 293 К заметное различие в положении фронта концентрации начинается с 20000 с (см. рис. 7). До этого момента скорость осаждения капель в обоих случаях была одинакова. В этот момент времени начинается влияние распределения более высокой температуры в полости в случае с теплоизолированной стенкой, в сравнении с постоянной температурой на нижней грани (см. рис. 5). С течением времени скорость осаждения капель для случая с теплоизолированной стенкой увеличивается, что можно заметить по более крутой кривой на графике для данного случая в нижней части ячейки. Полное осаждение капель в случае с теплоизолированной стенкой, по сравнению с фиксированной температурой на нижней грани, происходит примерно на 6000–7000 с быстрее.

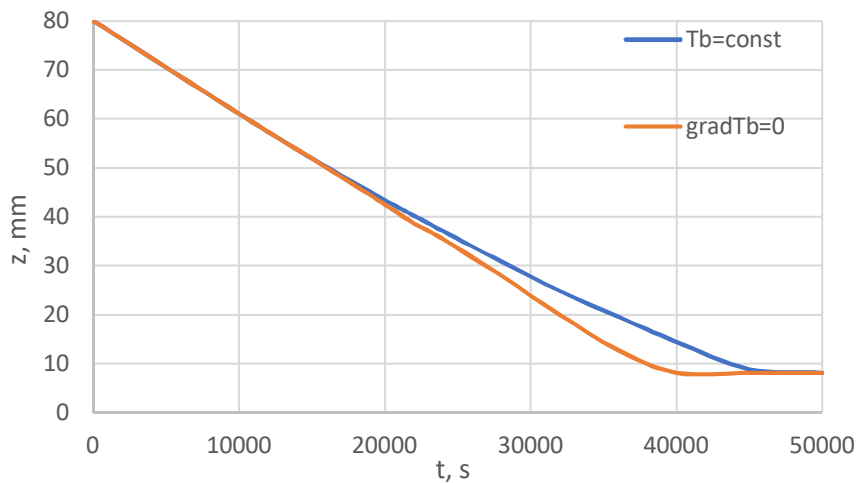


Рис. 7. Динамика положения фронта капель воды по времени для капель размером 15 мкм при начальной температуре 293 К при постоянной температуре на нижней грани ($T_b = \text{const}$) и теплоизолированной стенке ($\text{grad}T_b = 0$)

Fig. 7. Dynamics of the position of the front of water droplets over time for drops with a size of 15 μm at an initial temperature of 293 K at a constant temperature on the lower face ($T_b = \text{const}$) and a thermally insulated wall ($\text{grad}T_b = 0$)

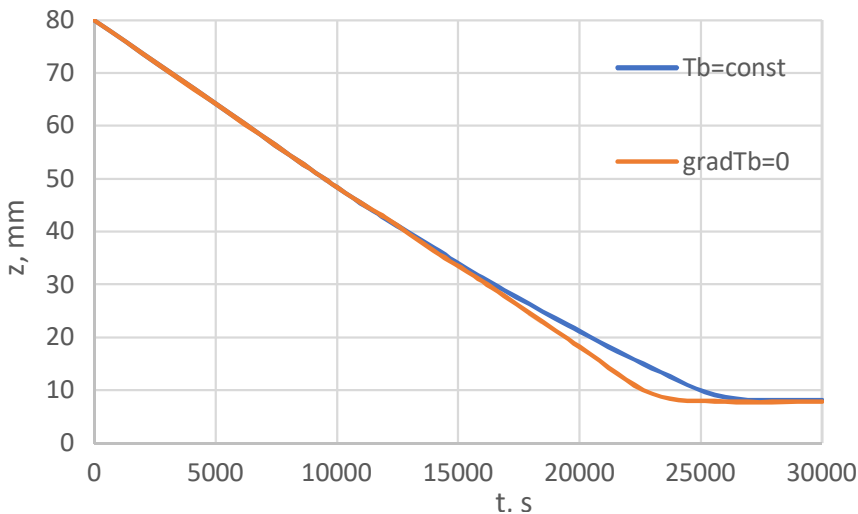


Рис. 8. Динамика положения фронта капель воды по времени для капель размером 15 мкм при начальной температуре 303 К при постоянной температуре на нижней грани ($T_b = \text{const}$) и теплоизолированной стенке ($\text{grad}T_b = 0$)

Fig. 8. Dynamics of the position of the front of water droplets over time for drops with a size of 15 μm at an initial temperature of 303 K at a constant temperature on the lower face ($T_b = \text{const}$) and a thermally insulated wall ($\text{grad}T_b = 0$)

Для случая с начальной температурой эмульсии 303 К различие в положении фронта концентрации начинается с 16000 с (см. рис. 8). Полное осаждение капель воды при данной температуре происходит быстрее на 3000 с для полости с теплоизолированной нижней стенкой по сравнению со случаем постоянной температуры на нижней грани.

Кроме того, рассматривался случай с осаждением капель радиусом 50 мкм и начальной концентрацией капель 10%. При этом был замечен эффект образования «волны» концентрации, который состоит в резком увеличении концентрации по сравнению с начальным значением из-за эффекта стесненного осаждения (рис. 9). На высоте 0,78 и 0,71 м хорошо виден этот эффект, который проявляется в виде скачка концентрации на уровне фронта осаждения капель. К моменту времени 2000 с пик скачка разглаживается, но при этом ниже высоты 0,05 м распределение концентрации имеет вид наклонной линии.

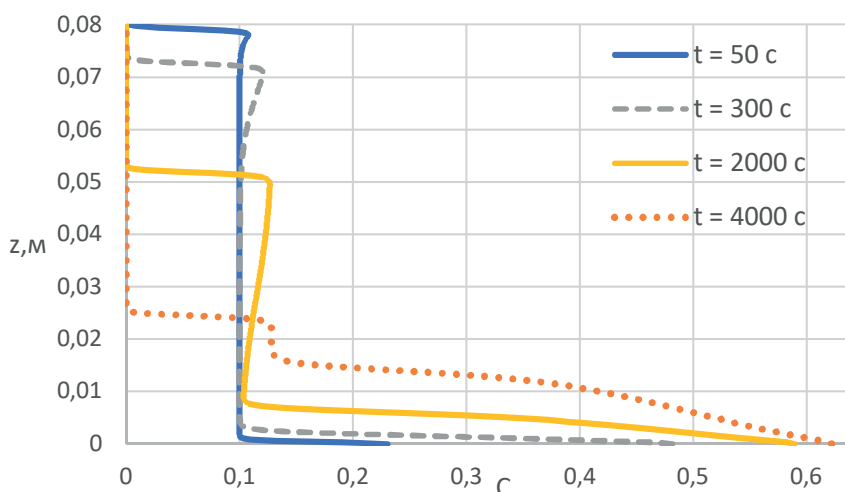


Рис. 9. Распределение концентрации капель воды в эмульсии по высоте в моменты времени 50, 300, 2000 и 4000 с при теплоизолированной стенке ($\text{grad}T_b = 0$) для капель радиусом 50 мкм в полости при начальной температуре 293 К

Fig. 9. Temperature distribution in the emulsion along the height at time points of 50, 300, 2000 and 4000 s at thermally insulated wall ($\text{grad}T_b = 0$) for drops with a radius of 50 μm at an initial temperature of 293 K

На графиках динамики положения фронта капель хорошо видно уменьшение скорости осаждения капель из-за их стесненного осаждения в моменты времени от 50 до 200 с на высоте 77÷79 мм (см. рис. 10 и 11).

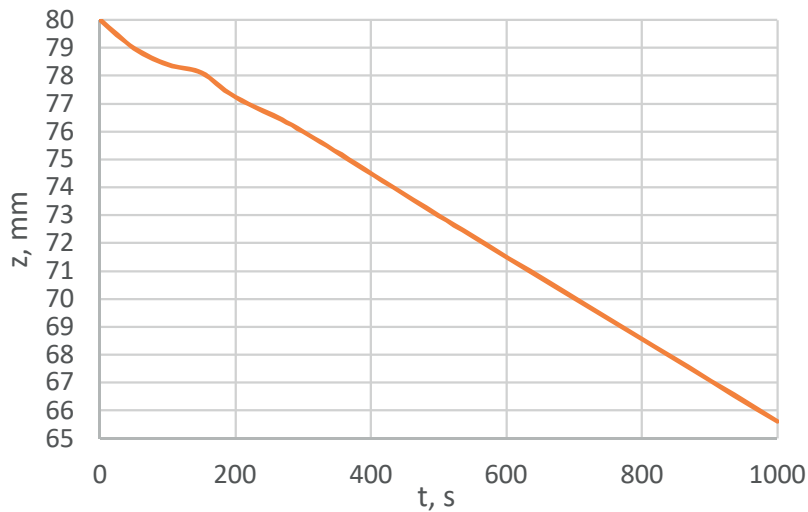


Рис. 10. Динамика положения фронта капель воды по времени для капель размером 50 мкм при начальной температуре 293 К при теплоизолированной стенке ($\text{grad}T_b = 0$) в первые 1000 с осаждения

Fig. 10. Dynamics of the position of the front of water droplets over time for drops with a size of 50 μm at an initial temperature of 293 K at a thermally insulated wall ($\text{grad}T_b = 0$) in the first 1000 s of settling

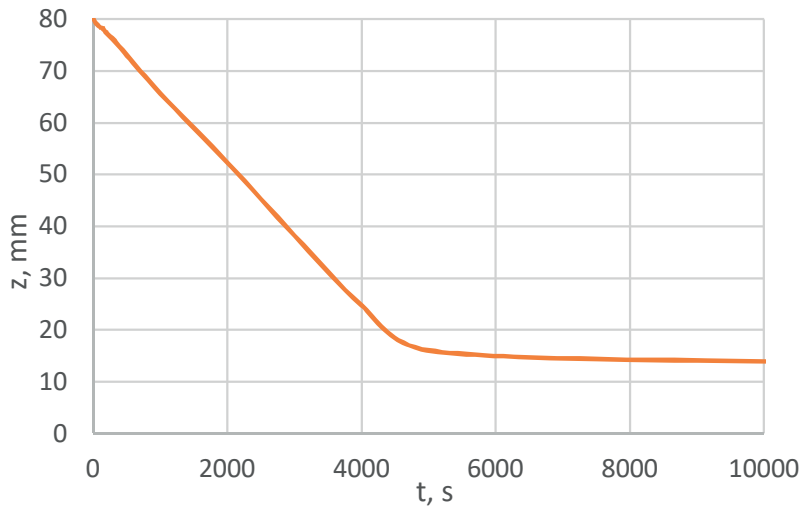


Рис. 11. Динамика положения фронта капель воды по времени для капель размером 50 мкм при начальной температуре 293 К при теплоизолированной стенке ($\text{grad}T_b = 0$)

Fig. 11. Dynamics of the position of the front of water droplets over time for drops with a size of 50 μm at an initial temperature of 293 K at a thermally insulated wall ($\text{grad}T_b = 0$)

Заключение

В работе выполнено сравнение процессов осаждения капель в прямоугольной полости с верхним подогревом для двух типов граничных условий на нижней стенке: изотермического (постоянная температура) и адиабатического (теплоизоляция).

Установлено, что в случае теплоизолированной нижней стенки средняя температура эмульсии в полости оказывается выше, чем при фиксированной температуре на границе. Это обуславливает более интенсивное осаждение водной фазы. Количественный анализ показал, что для капель диаметром 15 мкм средняя скорость осаждения в адиабатическом режиме превышает изотермический на 10% при начальной температуре 303 К и на 15% при 293 К. Для капель радиусом 50 мкм и более зафиксирован эффект стесненного осаждения, проявляющийся в резком снижении скорости осаждения в течение первых 200 с процесса.

Список источников

- Бадикова А. Д., Изиялова Д. Л., Мухамадеев Р. У. 2019. Особенности разделения водонефтяных эмульсий с использованием химических реагентов // *Universum: технические науки*. № 12-2 (69). С. 71–75.
- Виноградов В. М., Винокуров, В. А. 2007. Образование, свойства и методы разрушения нефтяных эмульсий. Москва: «Нефть и газ», РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина. 31 с.
- Гимадеев А. В., Мусин А. А., Ковалева Л. А. 2021. Численное исследование неизотермического осаждения капель воды в эмульсии // *Вестник Башкирского университета*. Том 26. № 4. С. 871–876.
- Дмитриев А. В., Зинуров В. Э., Дмитриева О. С., Данг С. В. 2018. Моделирование процесса разделения водонефтяной эмульсии в прямоугольном сепараторе // *Вестник Казанского государственного энергетического университета*. № 3 (39). С. 65–71.
- Зиннатуллин Р. Р., Муллаянов А. И., Амекачев Р. М. 2015. Исследование особенностей коагуляции и коалесценции эмульсионных капель в электромагнитном поле // *Вестник Башкирского университета*. Том 20. № 3. С. 822–825.
- Копысов С. П., Тонков Л. Е., Чернова А. А. 2015. Применение методов VOF и SPH для решения задач с развитой свободной поверхностью // *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*. № 2 (46). С. 76–84.
- Мусин А. А., Тухбатова Э. Р., Анисенкова Н. А. 2017. Исследование интенсивности расслоения высоковязкой водонефтяной эмульсии в емкости с нагретыми боковыми стенками // *Вестник Башкирского университета*. Том 22. № 3. С. 622–626.
- Петровский Э. А., Соловьёв Е. А., Коленчуков О. А. 2018. Современные технологии переработки нефтешламов // *Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова*. Том 3. № 4. С. 124–132. https://doi.org/10.12737/article_5ac24a32b29f22.54931659
- Хрисониди В. А., Струева В. А. 2020. Современные методы разрушения водонефтяных эмульсий // *The Scientific Heritage*. № 50-3. С. 38–41.
- Elektorowicz M., Habibi S., Chifrina R. 2006. Effect of electrical potential on the electrodemulsification of oily sludge // *Journal of Colloid and Interface Science*. Vol. 295. No. 2. Pp. 535–541. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2005.08.042>

- Fang C. S., Lai P. M. C. 1995. Microwave heating and separation of water-in-oil emulsions // *Journal of Microwave Power and Electromagnetic Energy*. Vol. 30(1). Pp. 46–57. <https://doi.org/10.15446/dyna.v81n183.34802>
- Hajivand P., Vaziri A. (2015). Optimization of demulsifier formulation for separation of water from crude oil emulsions // *Brazilian Journal of Chemical Engineering*. Vol. 32. No. 1. Pp. 107–118. <https://doi.org/10.1590/0104-6632.20150321s000002755>
- Hao L., Jiang B., Zhang L., Yang H., Sun Y., Wang B., Yang N. 2016. Efficient demulsification of diesel-in-water emulsions by different structural dendrimer-based demulsifiers // *Industrial & Engineering Chemistry Research*. Vol. 55. No. 6. Pp. 1748–1759. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.5b04401>
- Kovaleva L., Zinnatullin R., Musin A., Gabdrafikov A., Sultanguzhin R., Kireev V. 2021. Influence of radio-frequency and microwave electromagnetic treatment on water-in-oil emulsion separation // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. Vol. 614. Article 126081. <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2020.126081>
- Kuzmenko E. A., Usheva N. V., Moyzes O. E., Polyakova, K. A. 2016. Dynamics of water separation in destruction of water-in-oil emulsions // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. Vol. 43. Article 012059. IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/43/1/012059>
- Martínez-Palou R., Cerón-Camacho R., Chávez B., et al. 2013. Demulsification of heavy crude oil-in-water emulsions: A comparative study between microwave and thermal heating // *Fuel*. Vol. 113. Pp. 407–414. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2013.05.094>
- Osher S., Sethian J. A. 1988. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations // *Journal of Computational Physics*. Vol. 79. No. 1. Pp. 12–49. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(88\)90002-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(88)90002-2)
- Perles C. E., Volpe P. L. O., Bombard A. J. 2012. Study of the cation and salinity effect on electrocoalescence of water/crude oil emulsions // *Energy & Fuels*. Vol. 26. No. 11. Pp. 6914–6924. <https://doi.org/10.1021/ef301433m>
- Rajaković V., Skala D. 2006. Separation of water-in-oil emulsions by freeze/thaw method and microwave radiation // *Separation and Purification Technology*. Vol. 49. No. 2. Pp. 192–196. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2005.09.012>
- Razi M., Rahimpour M. R., Jahanmiri A., Azad F. 2011. Effect of a different formulation of demulsifiers on the efficiency of chemical demulsification of heavy crude oil // *Journal of Chemical & Engineering Data*. Vol. 56. No. 6. Pp. 2936–2945. <https://doi.org/10.1021/je2001733>
- Rehfeld S. J. 1974. Stability of hydrocarbon-in-water emulsions during centrifugation. Influence of dispersed phase composition // *Journal of Colloid and Interface Science*. Vol. 46. No. 3. Pp. 448–459. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(74\)90055-1](https://doi.org/10.1016/0021-9797(74)90055-1)
- Rodionova G., Keleşoğlu S., Sjöblom J. 2014. AC field induced destabilization of water-in-oil emulsions based on North Sea acidic crude oil // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. Vol. 448. Pp. 60–66. <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2014.01.019>
- Romanova Yu. N., Maryutina T. A., Musina N. S., Spivakov B. Y. 2022. Application of ultrasonic treatment for demulsification of stable water-in-oil emulsions // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. Vol. 209. Article 109977. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109977>

- Tan W., Yang X. G., Tan X. F. 2007. Study on demulsification of crude oil emulsions by microwave chemical method // *Separation Science and Technology*. Vol. 42. Pp. 1367–1377. <https://doi.org/10.1080/01496390701193736>
- Tarantsev K. V., Tarantseva K. R. 2017. Influence of electric field frequency on the process of destruction of water-oil emulsions in electric dehydrators // *Chemical and Petroleum Engineering*. Vol. 53(7). Pp. 515–518. <https://doi.org/10.1007/s10556-017-0373-z>

References

- Badikova, A. D., Izilyanova, D. L., & Mukhamadeev, R. U. (2019). Features of water-in-oil emulsions separation by chemical reagents. *Universum: Technical Sciences*, (12-2), 71–75. [In Russian]
- Vinogradov, V. M., & Vinokurov, V. A. (2007). *Formation, Properties, and Methods of Destruction of Oil Emulsions*. Publishing House “Oil and Gas” of National University of Oil and Gas “Gubkin University”. [In Russian]
- Gimadeev, A. V., Musin, A. A., & Kovaleva, L. A. (2021). Numerical study of non-isothermal sedimentation of water droplets in emulsion. *Bulletin of Bashkir University*, 26(4), 871–876. [In Russian]
- Dmitriev, A. V., Zinurov, V. E., Dmitrieva, O. S., & Dang, S. V. (2018). Modeling of separation process of water-oil emulsion in a rectangular separator. *Kazan State Power Engineering University Bulletin*, (3), 65–71. [In Russian]
- Zinnatullin, R. R., Mullayanov, A. I., & Amekachev, R. M. (2015). Study of the features of coagulation and coalescence of emulsion droplets in an electromagnetic field. *Bulletin of Bashkir State University*, 20(3), 822–825. [In Russian]
- Kopysov, S. P., Tonkov, L. E., & Chernova, A. A. (2015). Application of VOF and SPH to solve problems with a developed free surface. *Bulletin of the Institute of Mathematics and Informatics of Udmurt State University*, (2), 76–84. [In Russian]
- Musin, A. A., Tukhbatova, E. R., & Anisenkova, N. A. (2017). Study of separation intensity of high-viscosity water-in-oil emulsions in a cavity with heated sidewalls. *Bulletin of Bashkir University*, 22(3), 622–626. [In Russian]
- Petrovskiy, E. A., Solovyov, E. A., & Kolenchukov, O. A. (2018). Modern technologies of oil sludge processing. *Bulletin of Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov*, 3(4), 124–132. https://doi.org/10.12737/article_5ac24a32b29f22.54931659 [In Russian]
- Khrisonidi, V. A., & Strueva, V. A. (2020). Modern methods for destroying water-oil emulsions. *The Scientific Heritage*, (50-3), 38–41. [In Russian]
- Elektorowicz, M., Habibi, S., & Chifrina, R. (2006). Effect of electrical potential on the electro-demulsification of oily sludge. *Journal of Colloid and Interface Science*, 295(2), 535–541. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2005.08.042>
- Fang, C. S., & Lai, P. M. C. (1995). Microwave heating and separation of water-in-oil emulsions. *Journal of Microwave Power and Electromagnetic Energy*, 30(1), 46–57. <https://doi.org/10.15446/dyna.v81n183.34802>
- Hajivand, P., & Vaziri, A. (2015). Optimization of demulsifier formulation for separation of water from crude oil emulsions. *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, 32(1), 107–118. <https://doi.org/10.1590/0104-6632.20150321s00002755>

- Hao, L., Jiang, B., Zhang, L., Yang, H., Sun, Y., Wang, B., & Yang, N. (2016). Efficient demulsification of diesel-in-water emulsions by different structural dendrimer-based demulsifiers. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 55(6), 1748–1759. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.5b04401>
- Kovaleva, L., Zinnatullin, R., Musin, A., Gabdrafikov, A., Sultanguzhin, R., & Kireev, V. (2021). Influence of radio-frequency and microwave electromagnetic treatment on water-in-oil emulsion separation. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 614, 126081. <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2020.126081>
- Kuzmenko, E. A., Usheva, N. V., Moyzes, O. E., & Polyakova, K. A. (2016). Dynamics of water separation in destruction of water-in-oil emulsions. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 43, 012059. IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/43/1/012059>
- Martínez-Palou, R., Cerón-Camacho, R., Chávez, B., et al. (2013). Demulsification of heavy crude oil-in-water emulsions: A comparative study between microwave and thermal heating. *Fuel*, 113, 407–414. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2013.05.094>
- Osher, S., & Sethian, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1), 12–49. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(88\)90002-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(88)90002-2)
- Perles, C. E., Volpe, P. L. O., & Bombard, A. J. (2012). Study of the cation and salinity effect on electrocoalescence of water/crude oil emulsions. *Energy & Fuels*, 26(11), 6914–6924. <https://doi.org/10.1021/ef301433m>
- Rajaković, V., & Skala, D. (2006). Separation of water-in-oil emulsions by freeze/thaw method and microwave radiation. *Separation and Purification Technology*, 49(2), 192–196. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2005.09.012>
- Razi, M., Rahimpour, M. R., Jahanmiri, A., & Azad, F. (2011). Effect of a different formulation of demulsifiers on the efficiency of chemical demulsification of heavy crude oil. *Journal of Chemical & Engineering Data*, 56(6), 2936–2945. <https://doi.org/10.1021/jc2001733>
- Rehfeld, S. J. (1974). Stability of hydrocarbon-in-water emulsions during centrifugation. Influence of dispersed phase composition. *Journal of Colloid and Interface Science*, 46(3), 448–459.
- Rodionova, G., Keleşoğlu, S., & Sjöblom, J. (2014). AC field induced destabilization of water-in-oil emulsions based on North Sea acidic crude oil. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 448, 60–66. <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2014.01.019>
- Romanova, Yu. N., Maryutina, T. A., Musina, N. S., & Spivakov, B. Y. (2022). Application of ultrasonic treatment for demulsification of stable water-in-oil emulsions. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 209, 109977. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109977>
- Tan, W., Yang, X. G., & Tan, X. F. (2007). Study on demulsification of crude oil emulsions by microwave chemical method. *Separation Science and Technology*, 42, 1367–1377. <https://doi.org/10.1080/01496390701193736>
- Tarantsev, K. V., & Tarantseva, K. R. (2017). Influence of electric field frequency on the process of destruction of water-oil emulsions in electric dehydrators. *Chemical and Petroleum Engineering*, 53(7), 515–518. <https://doi.org/10.1007/s10556-017-0373-z>

Информация об авторах

Ахат Вилевич Гимадеев, аспирант, кафедра прикладной физики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
arockerf@yandex.ru

Айрат Ахматович Мусин, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра физики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
mus-airat@yandex.ru

Вилена Ильшатовна Валиуллина, кандидат физико-математических наук, инженер, кафедра прикладной физики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
vilenches@gmail.com

Лиана Ароновна Ковалева, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной физики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
liana-kovaleva@yandex.ru

Information about the authors

Akhat V. Gimadeev, Postgraduate Student, Department of Applied Physics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia
arockerf@yandex.ru

Airat A. Musin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Applied Physics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia
mus-airat@yandex.ru

Vilena I. Valiullina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Engineer, Department of Applied Physics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia
vilenches@gmail.com

Liana A. Kovaleva, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Department of Applied Physics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia
liana-kovaleva@yandex.ru

Диагностика газового тракта центробежного нагнетателя природного газа с приводом от свободной турбины

Дмитрий Александрович Иноземцев¹✉, Алексей Вадимович Бунякин²,
Владислав Игоревич Дунаев¹

¹ Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия

² Майкопский государственный технологический университет,

филиал в п. Яблоновский, Республика Адыгея, Россия

Контакт для переписки: d.a.inozemtsev@mail.ru✉

Аннотация. Газогенератор и центробежный нагнетатель с приводом от свободной турбины представляет собой кинематически незамкнутую механическую систему. Сам газогенератор является кинематически замкнутой системой, поскольку компрессор и турбина находятся на одном валу, но его связь с нагнетателем только лишь газодинамическая. Это определяет специфику математической модели данного агрегата, позволяющую проводить его диагностику методами неразрушающего контроля, в частности вычисление мощности привода нагнетателя возможно только с помощью измерения частот вращения газогенератора и свободной турбины отдельно и одновременно. Целью представленной работы является построение зависимости мощности от этих частот на основе обработки экспериментальных данных из паспорта, представленного заводом изготовителем. Эта зависимость позволяет вывести безразмерный диагностический параметр, имеющий физический смысл, аналогичный КПД нагнетателя, а отклонение его значения от того, что характеризует нормальный (штатный) режим работы агрегата, является признаком развития внештатной ситуации.

Ключевые слова: нагнетатель природного газа, привод от свободной турбины, безразмерный диагностический параметр, мощностная характеристика газотурбинного двигателя

Цитирование: Иноземцев Д. А., Бунякин А. В., Дунаев В. И. 2026. Диагностика газового тракта центробежного нагнетателя природного газа с приводом от свободной турбины // Вестник Тюменского государственного университета. Фи-

зико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 12. № 2 (46).
С. 105–116. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-105-116>

Поступила 08.12.2025; одобрена 10.03.2026; принята 11.03.2026

Diagnostics of the gas path of a centrifugal supercharger of natural gas with a drive from a free turbine

Dmitry A. Inozemtsev¹✉, Aleksey V. Bunyakin², Vladislav I. Dunaev¹

¹ Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia

² Maykop State Technological University, branch in Yablonovsky village, Republic of Adygea, Russia

Corresponding author: d.a.inozemtsev@mail.ru✉

Abstract. A gas generator and a centrifugal supercharger driven by a free turbine represent kinematically open mechanical system. The gas generator itself is a kinematically closed system, since the compressor and turbine are located on the same shaft, but its connection to the supercharger is purely gas-dynamic. This determines the specificity of the mathematical model of this unit, which allows its diagnostics to be carried out using non-destructive testing methods; in particular, the calculation of the supercharger drive power is possible only by measuring the rotation frequencies of the gas generator and the free turbine separately and simultaneously. The purpose of this work is to construct the dependence of power on these frequencies based on the processing of experimental data from the passport provided by the manufacturer. This dependence allows us to derive a dimensionless diagnostic parameter that has a physical meaning similar to the efficiency of a gas pump unit, and the deviation of its value from that which characterizes the normal (standard) operating mode of the unit is a sign of the development of an emergency situation.

Keywords: natural gas pump unit, free turbine drive, dimensionless diagnostic parameter, energy characteristic of a gas turbine engine

Citation: Inozemtsev, D. A., Bunyakin, A. V. & Dunaev, V. I. (2026). Diagnostics of the gas path of a centrifugal supercharger of natural gas with a drive from a free turbine. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 12(2), 105–116. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-105-116>

Received Dec. 8, 2025; Reviewed Mar. 10, 2026; Accepted Mar. 11, 2026

Введение и обзор литературы

Важнейшим методом определения текущего технического состояния газотурбинного агрегата является параметрическая диагностика, опирающаяся на математическое моделирование процессов, протекающих в его тракте, см., например, работы [Смирнов и др., 2018; Иноземцев и др., 2025].

В некоторых работах [Перевошиков, 2014; Перевошиков, 2019] при помощи корреляционных матриц получена зависимость политропного КПД от газодинамических параметров в тракте газоперекачивающего агрегата. Это позволяет осуществлять диагностику компрессора высокого давления.

Кроме того, доказано, что загрязнение лопаток агрегата влияет на параметры газотурбинного двигателя (ГТД) [Струговец и др., 2010]. Для диагностики технического состояния ГТД также используются методы, опирающиеся на прямое измерение мощности и крутящего момента на валу [Чичутин, Носков, 2011]. Для анализа совокупности параметров ГТД используется эффективный метод построения фазовых портретов [Аверьянов, 2006]. Для описания отклонения текущего режима от режима работы при нулевой наработке вводится комплексный критерий [Кривошеев и др., 2017], позволяющий эффективно обрабатывать данные измерения. Этому созвучно применение нейронных сетей с выборкой большого числа обучающих показателей [Раэиндзатуву, Гишваров, 2017].

Достаточную эффективность имеет статистический метод оценки времени до разрушения элементов агрегата по параметру Ларсона–Миллера [Чекардовский, Демура, 2013]. Помимо этого, следует отметить статистическую методику диагностики, предложенную в работе [Стельмах и др., 2015].

Математическое описание некоторых зависимостей, моделирующих работу газоперекачивающего агрегата (ГПА) с учетом паспортных характеристик центробежного компрессора (нагнетателя природного газа), позволяет рассчитать затрачиваемую мощность при ухудшении технического состояния и изменения параметров внешней среды [Багерман и др., 2015]. В работе [Гилязиев, Васильев, 2018] предлагается диагностический параметр, характеризующий уровень потребления топливного газа.

Математическое моделирование параметров газового тракта, непосредственное измерение которых затруднительно, открывает возможности проводить диагностику агрегата методами неразрушающего контроля [Иванов, 2012; Заславский, Блинов, 2018; Кампти, 2000].

Методы исследования

Построение математической модели агрегата, в котором связь между газогенератором и нагнетателем газодинамическая, а не жесткая, не представляется возможным на основе приравнивания мощностей компрессора и турбины, как делается, например, в работах [Галиуллин, Леонтьев, 1991; Бунякин, Торбеев, 2006]. При этом необходимо измерение частот вращения двух валов — газогенератора и свободной турбины — отдельно и одновременно. В данной работе рассматривается именно такая газодинамическая

связка, и в основу диагностического моделирования агрегатов такого типа положена обработка эмпирических данных из паспорта, предоставляемого заводом изготовителем. Подобная методика построения зависимостей описана в работах [Лефевр, 1986]. Отклонение от нормального (штатного) режима отслеживается посредством значения безразмерного диагностического параметра, имеющего физический смысл, аналогичный КПД агрегата.

Построение математической модели течения газа через тракт газотурбинного двигателя

Текущая мощность N_0 на валу свободной турбины определяется равенством:

$$N_0 = m_0 N \left(\frac{n_{zz}}{n_0}, \frac{n_{cm}}{n_0} \right) \frac{P_{\text{воз}}}{P_0} \sqrt{\frac{T_0}{T_{\text{воз}}}}. \quad (1)$$

В равенстве (1) введены следующие обозначения: $N \left(\frac{n_{zz}}{n_0}, \frac{n_{cm}}{n_0} \right)$ — приведенная мощность на валу свободной турбины; n_{zz} — частота вращения вала газогенератора (рад/с); n_{cm} — частота вращения вала свободной турбины (рад/с); $m_0 = 100$ кВт — масштабирующий множитель для мощности; $n_0 = 1000$ рад/с — масштабирующие множитель для частот вращения n_{cm} и n_{zz} ; $P_{\text{воз}}$, $T_{\text{воз}}$ — текущие атмосферное давление воздуха (Па) и температура атмосферного воздуха (К) соответственно; P_0 , T_0 — параметры нормальной атмосферы, где $P_0 = 101325$ Па, $T_0 = 293$ К.

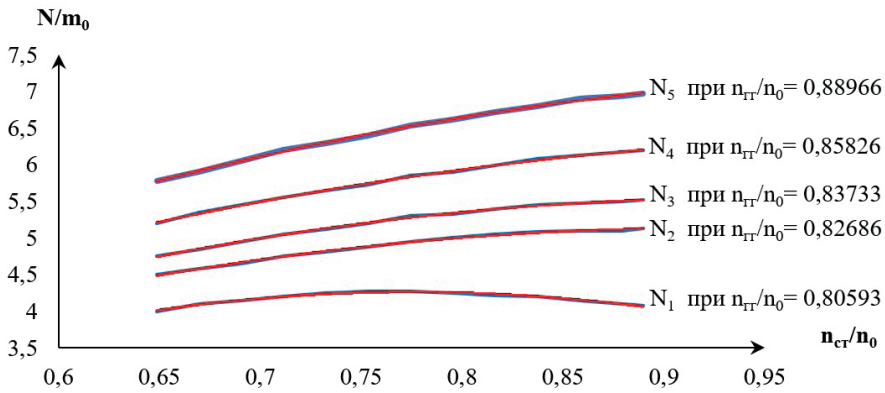


Рис. 1. Приведенная мощность свободной турбины (ГТД «НК-12»)

Fig. 1. Relative power of the free turbine (gas turbine engine "NK-12")

На рис. 1 изображены графики функции $N \left(\frac{n_{zz}}{n_0}, \frac{n_{cm}}{n_0} \right)$ в зависимости от масштабированных частот вращения вала свободной турбины n_{zz}/n_0 и газогенератора n_{cm}/n_0 вала

ГТД (приведенная мощность, построенная по данным испытаний на гидротормозном стенде в стационарных условиях).

Данные графики получены по данным, представленным в инструкции по эксплуатации и техническому обслуживанию двигателя НК-12 СТ, для связки «газогенератор – свободная турбина», когда свободная турбина находится на одном валу с нагнетателем (маркировка «НК-12») [Двигатель НК-12СТ..., 1984].

Определим величину приведенной мощности $N\left(\frac{n_{zz}}{n_0}, \frac{n_{cm}}{n_0}\right)$ как функцию от n_{cm}/n_0 при различных n_{zz}/n_0 . Уравнения зависимостей, изображенных на рис. 1, аппроксимированы методом наименьших квадратов [Прохоров, 1988] по двенадцати точкам:

$$\begin{aligned}\frac{N_1}{1000} &= -15,415 \left(\frac{n_{cm}}{n_0}\right)^2 + 23,916 \frac{n_{cm}}{n_0} - 5,013 \quad \text{при} \quad \frac{n_{zz}}{n_0} = 0,80593, \\ \frac{N_2}{1000} &= -8,6406 \left(\frac{n_{cm}}{n_0}\right)^2 + 15,961 \frac{n_{cm}}{n_0} - 2,2342 \quad \text{при} \quad \frac{n_{zz}}{n_0} = 0,82686, \\ \frac{N_3}{1000} &= -9,0232 \left(\frac{n_{cm}}{n_0}\right)^2 + 17,112 \frac{n_{cm}}{n_0} - 2,5613 \quad \text{при} \quad \frac{n_{zz}}{n_0} = 0,83733, \\ \frac{N_4}{1000} &= -7,3092 \left(\frac{n_{cm}}{n_0}\right)^2 + 15,366 \frac{n_{cm}}{n_0} - 1,6815 \quad \text{при} \quad \frac{n_{zz}}{n_0} = 0,85826, \\ \frac{N_5}{1000} &= -8,4508 \left(\frac{n_{cm}}{n_0}\right)^2 + 18,008 \frac{n_{cm}}{n_0} - 2,3536 \quad \text{при} \quad \frac{n_{zz}}{n_0} = 0,88966.\end{aligned}\tag{2}$$

Отметим, что в выражениях (2) коэффициенты при степенях n_{cm}/n_0 имеют одинаковый порядок — это результат нормировки на $n_0 = 1000$ рад/с.

Будем искать зависимость $N\left(\frac{n_{zz}}{n_0}, \frac{n_{cm}}{n_0}\right)$ от $x = \frac{n_{cm}}{n_0}$, $y = \frac{n_{zz}}{n_0}$ в виде:

$$N\left(\frac{n_{zz}}{n_0}, \frac{n_{cm}}{n_0}\right) = ax^2 + bx + c,\tag{3}$$

$$a = \alpha_1 y^2 + \beta_1 y + \gamma_1, \quad b = \alpha_2 y^2 + \beta_2 y + \gamma_2, \quad c = \alpha_3 y^2 + \beta_3 y + \gamma_3.$$

Аппроксимация зависимостей коэффициентов парабол a, b, c от $y = \frac{n_{zz}}{n_0}$

$$\begin{aligned}
 a &= -2545y^2 + 4390,6y - 1900,4, \\
 b &= 3214,2y^2 - 5510,9y + 2377, \\
 c &= -1060,3y^2 - 1826,9y + 788,47,
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

производится также методом наименьших квадратов по пяти точкам $y = \frac{n_{\text{сз}}}{n_0}$, которые соответствуют на графиках рис. 2 точкам излома сплошной линии.

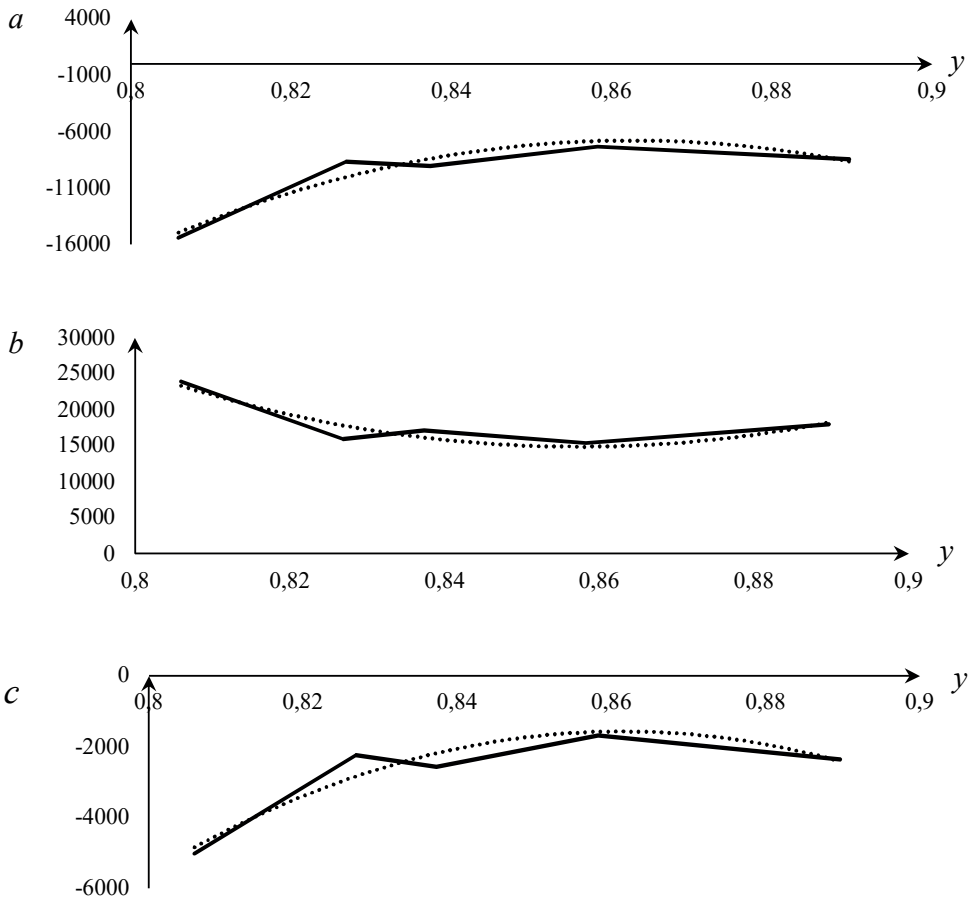


Рис. 2. Графики зависимостей коэффициентов a , b , c от частот вращения газогенератора

Fig. 2. Graphs of the coefficients' dependence on the rotational speed of the gas generator

Подставляя в формулу (3) коэффициенты a , b , c , вычисленные по формуле (4), получим аппроксимацию приведенной мощности:

$$N(x,y)=\left[\begin{matrix}(-2545y^2+4390,6y-1900,4)x^2+\\+(3214,2y^2-5510,9y+2377)x+\\+1060,3y^2-1826,9y+788,5\end{matrix}\right].\tag{5}$$

Значения приведенной мощности от масштабированных частот в точках аппроксимации представлены в табл. 1.

Таблица 1. Значения приведенной мощности от масштабированных частот в точках аппроксимации
Table 1. Values of the relative power from scaled frequencies at the approximation points

N_0/m_0	n_{rr}/n_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$n_{сг}/n_0$		0,805933	0,826867	0,837333	0,858267	0,889667
x_1	0,64893	4,0297367	4,535208	4,772744	5,217425	5,808471
x_2	0,66987	4,1055387	4,631749	4,878676	5,340185	5,951583
x_3	0,69080	4,1682653	4,719529	4,977271	5,456989	6,087145
x_4	0,71173	4,2179165	4,798547	5,068529	5,567836	6,215157
x_5	0,73267	4,2544922	4,868803	5,152448	5,672727	6,335619
x_6	0,75360	4,2779924	4,930297	5,229029	5,771661	6,448532
x_7	0,77453	4,2884173	4,98303	5,298272	5,864638	6,553896
x_8	0,79547	4,2857667	5,027001	5,360177	5,95166	6,651709
x_9	0,81640	4,2700406	5,06221	5,414744	6,032724	6,741973
x_{10}	0,83733	4,2412392	5,088658	5,461973	6,107832	6,824688
x_{11}	0,85827	4,1993623	5,106344	5,501865	6,176983	6,899852
x_{12}	0,87920	4,1444099	5,115268	5,534418	6,240178	6,967468

Такой способ аппроксимации экспериментальных данных для нахождения величины N_0 по формуле (1) с учетом формулы (5) позволяет определить безразмерный диагностический параметр (БДП), имеющий физически смысл аналогичный КПД нагнетателя по формуле:

$$\eta_{наг}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{\mu}\frac{Q_m}{N_0}(T_{вых}-T_{вх}).\tag{6}$$

В формуле (6) обозначено:

$\gamma = 1,31$ — показатель адиабаты перекачиваемого (природного с основной метановой фракцией) газа.

$\mu = 0,016$ кг/моль — молярная масса газа с основной метановой фракцией.

Величины γ и μ могут считаться постоянными в течение диагностического периода и меняться лишь при существенном изменении состава перекачиваемого газа.

$R = 8,31$ Дж/град · моль — универсальная газовая постоянная.

Q_m (кг/с) — массовый расход перекачиваемого газа на каждом из нагнетателей связан с объемным расходом Q_v (нм³/час) зависимостью $Q_m = Q_v \frac{\rho_0}{3600}$.

Общий расход всего компрессорного цеха может быть разделен между агрегатами пропорционально их частотам вращения.

$(T_{\text{вых}} - T_{\text{вх}})$ — разность температур газа на выходе и входе нагнетателя.

$\rho_0 = 0,68$ кг/м³ — плотность метана при нормальных условиях (считается постоянной).

Отметим, что подобные БДП были введены в работе [Иноземцев и др., 2025] для диагностики осевого компрессора и турбины ГТД отдельно, находящихся в жесткой кинематической связке (на одном валу). В такой схеме измеряется частота вращения вала, почти вся мощность, вырабатываемая турбиной, затрачивается на компрессоре, и задача сводится к нахождению расхода воздуха через тракт ГТД. Задача же, рассматриваемая в данной работе, отличается тем, что связка ГТД — свободная турбина нагнетателя не кинематическая, а газодинамическая, поэтому мощность приходится вычислять посредством измерения двух частот, а расход газа через нагнетатель находится отдельно.

Результаты и обсуждение

В работе введен безразмерный диагностический параметр $\eta_{\text{наг}}$ являющийся функцией от масштабированных частот вращения газогенератора, свободной турбины, расхода перекачиваемого газа и нагнетаемой разницы температур (режимные параметры), а также условно постоянных величин. Параметр $\eta_{\text{наг}}$ определенный в начальный период эксплуатации (после планового техобслуживания), характеризует штатную работу центробежного нагнетателя в составе газоперекачивающего агрегата со свободной турбиной. Установление границ отклонения параметра $\eta_{\text{наг}}$ от штатных значений производится для каждого конкретного агрегата в условиях его эксплуатации.

Уменьшение параметра $\eta_{\text{наг}}$ позволяет диагностировать такие нарушения в тракте центробежного нагнетателя, как отложения на стенках каналов рабочего колеса (уменьшение расхода при сохранении перепада температур), а также предпомпажные режимы. Кроме того, диагностике поддаются эрозионный износ рабочих колес, увеличение зазора в уплотнениях покрывающего диска, увеличение механических примесей в газе.

Список источников

- Аверьянов А. Б. 2006. Совершенствование методов параметрической диагностики компрессора высокого давления // Научный вестник МГТУ ГА. № 109. С. 85–89. EDN KPHFGL.
- Багерман А. З., Конопатова А. В., Леонова И. П., Шитков В. Н. 2015. От параметрической диагностики до прогнозирования жизненного цикла газотурбинного двигателя // Труды Центрального научно-исследовательского института им. академика А. Н. Крылова. № 89 (373). С. 81–84. EDN JRZVWA.

- Бунякин А. В., Торбеев С. А. 2006. Диагностика проточной части авиационных газотурбинных двигателей на примере ТРДД Д-36 // Научный вестник МГТУ ГА. № 109. С. 30–37.
- Галиуллин З. Т., Леонтьев Е. В. 1991. Интенсификация магистрального транспорта газа. М.: Недра. 271 с.
- Гилязиев М. Г., Васильев Э. Р. 2018. Параметрическая диагностика газоперекачивающих агрегатов ГПА-Ц-25 НК-РС // Новые направления инновационной деятельности на предприятиях газовой промышленности: сборник докладов расширенного совещания Научно-технического совета и Совета молодых ученых и специалистов ООО «Газпром трансгаз Казань». Казань: ООО «КОНВЕРТ». С. 30–38. – EDN YRPIIX.
- Двигатель НК-12СТ: инструкция по эксплуатации и техническому обслуживанию. Куйбышев: Изд. Куйбышевского обкома КПСС, 1984. — 323 с. + [1] отд. л. схем.
- Заславский Е. А., Блинов В. А. 2018. Параметрическая диагностика и оценка технического состояния газотурбинных газоперекачивающих агрегатов // Энерго- и ресурсосбережение. Энергообеспечение. Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии. Атомная энергетика: материалы Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной памяти проф. Данилова Н. И. (1945–2015) — Даниловских чтений, Екатеринбург, 10–14 декабря 2018 г. Екатеринбург: Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина. С. 203–206. EDN CFYVKM.
- Иванов Э. С. 2012. Особенности моделирования режимов работы газоперекачивающих агрегатов компрессорных станций магистрального транспорта газа в современных условиях эксплуатации // Нефтегазовое дело. № 5. С. 99–123. EDN RLOAKH.
- Иноземцев Д. А., Бунякин А. В., Дунаев В. И. 2025. Моделирование течения в тракте газотурбинного двигателя для диагностирования его технического состояния // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 11. № 3 (43). С. 130–146. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2025-11-3-130-146>
- Кампсти Н. 2000. Аэродинамика компрессоров / пер. с англ. М.: Мир. 688 с.
- Кривошеев И. А., Рожков К. Е., Симонов Н. Б. 2017. Применение метода параметрической диагностики с использованием комплексных показателей для оценки состояния газотурбинного привода в составе газоперекачивающего агрегата // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. № 3 (50). С. 46–57.
- Лефевр А. 1986. Процессы в камерах сгорания ГТД / пер. с англ. М.: Мир. 566 с.
- Перевощиков С. И. 2014. Диагностика газотурбинных двигателей по их эффективной мощности // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. № 3. С. 112–121.
- Перевощиков С. И. 2019. Анализ методик параметрической диагностики технического состояния газотурбинных установок // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. № 1. С. 101–112.
- Прохоров Ю. В. (глав. ред.). 1988. Математический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия. 847 с.
- Разриндзатуву Ж. С., Гишваров А. С. 2017. Параметрическая диагностика одновального ГТД на основе нейросетевого моделирования рабочих процессов // Вестник УГАТУ. № 4 (78). С. 86–96.

- Смирнов Е. А., Толстихин Ю. Ю., Блинов Ф. В., Шишов А. В. 2018. Решение актуальных задач параметрической диагностики газоперекачивающих агрегатов ГТК-25ИР // Газовая промышленность. № 2 (764). С. 62–65. EDN YPOSAW.
- Стедьмах М. В., Кривошеев И. А., Горюнов И. М. 2015. Совершенствование методов технической диагностики газоперекачивающих агрегатов с авиационным газотурбинным приводом АЛ-31СТ(Н) // Современные проблемы науки и образования. № 1-1. С. 333. EDN VIDYBR.
- Струговец С. А., Кривошеев И. А., Галиулин Р. М., Камаева Р. Ф., Рожков К. Е. 2010. Разработка метода параметрической диагностики технического состояния ГТД на основе анализа эрозии лопаток и закономерностей протекания характеристик компрессора // Вестник УГАТУ. № 4 (39). С. 3–10.
- Чекардовский С. М., Демура М. Н. 2013. Параметрическая диагностика газоперекачивающего агрегата // Нефть и газ Западной Сибири: материалы Международной научно-технической конференции, посвященной 50-летию Тюменского индустриального института, Тюмень, 17 октября 2013 г. / отв. ред. О. А. Новоселов. Тюмень: Тюменский государственный нефтегазовый университет. Том 1. С. 117–120. EDN SYVJUH.
- Чичугин В. А., Носков С. В. 2011. Методика оперативной параметрической диагностики газоперекачивающего агрегата при эксплуатации. Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. № 5 (89). С. 62–70. EDN OQPKYF.

References

- Averyanov, A. B. (2006). Improvement of methods of parametric diagnostics of a high-pressure compressor. *Civil Aviation High Technologies*, (109), 85–89. EDN KPHFGL [In Russian]
- Bagerman, A. Z., Konopatova, A. V., Leonova, I. P., & Shitkov, V. N. (2015). From parametric diagnostics to prediction of gas-turbine engine lifecycle. *Transactions of the Krylov Shipbuilding Research Institute*, (89), 81–84. EDN JRZVWA. [In Russian]
- Bunyakin, A. V., & Torbeev, S. A. (2006). Diagnostics of the flow part of aviation gas-turbine engines using the example of the D-36 turbofan engine. *Civil Aviation High Technologies*, (109), 30–37. [In Russian]
- Galiullin, Z. T., & Leontiev, E. V. (1991). Intensification of the Main Gas Transport. *Nedra*. [In Russian]
- Gilyaziev, M. G., & Vasiliev, E. R. (2018). Parametric diagnostics of GPA-C-25 NK-RS gas pumping units. In *Collection of Reports of the Expanded Meeting of the Scientific and Technical Council and the Council of Young Scientists and Specialists of Gazprom Transgaz Kazan LLC “New Directions of Innovation Activity at Gas Industry Enterprises”* (pp. 30–38). KONVERT LLC. EDN YRPIIX. [In Russian]
- NK-12ST Engine: Operation and Maintenance Manual*. 1984. Publishing House of the Kuibyshev Regional Committee of the CPSU. [In Russian]
- Zaslavsky, E. A., & Blinov, V. L. (2018). Parametric diagnostics and technical condition estimation of gas pumping units. In *Proceedings of the International Scientific and Practical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists dedicated to the memory of Prof. Danilov N. I. (1945–2015) — Danilovsky Readings “Energy and resource conservation. Energy supply. Non-traditional and renewable energy sources. Atomic Energy”* (pp. 203–

- 206). Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin. EDN CFYBKM. [In Russian]
- Ivanov, E. S. (2012). Modeling details of the performance modes of gas transmittal units at gas transmission compressor stations in modern operational conditions. *Petroleum Engineering*, (5), 99–123. EDN RLOAKH. [In Russian]
- Inozemtsev D. A., Bunyakin A. V., & Dunaev V. I. 2025. Modeling of the flow in the gas turbine engine path for technical state diagnostics. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 11 (3), 130–146. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2025-11-3-130-146> [In Russian]
- Cumpsty, N. (2000). *Compressor Aerodynamics* (Transl. from English). Mir. [In Russian]
- Krivosheev, I. A., Rozhkov, K. E., & Simonov, N. B. (2017). Application of the parametric diagnostic method using complex indicators to assess the state of the gas turbine drive in the gas pumping unit. *PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*, (3), 46–57. [In Russian]
- Lefebvre, A. (1986). *Processes in the Combustion Chambers of the Gas-Turbine Engine* (Transl. from English). Mir. [In Russian]
- Perevoshchikov, S. I. (2014). Diagnostics of gas turbine engines by their effective capacity. *Oil and Gas Studies*, (3), 112–121. [In Russian].
- Perevoshchikov, S. I. (2019). Analysis of methods for parametric diagnostics of technical condition of gas turbine units. *Oil and Gas Studies*, (1), 101–112. [In Russian]
- Prokhorov, Yu. V. (1988). *Mathematical Encyclopedic Dictionary*. Sov. Encyclopedia. [In Russian]
- Raherinjatovo, J. C., & Gishvarov, A. S. (2017). Parametric diagnostics of single-GTE on the basis of on neural network modeling workflows. *Vestnik USATU*, (4), 86–96. [In Russian]
- Smirnov, E. A., Tolstikhin, Yu. Yu., Blinov, F. V., & Shishov, A. V. (2018). Solution of the actual problems of parametric diagnostics of GTK-25IR gas compressor units. *Gas Industry*, (2), 62–65. EDN YPOSAW. [In Russian]
- Stelmakh, M. V., Krivosheev, I. A., & Goryunov, I. M. (2015). Perfecting methods of technical diagnostics of gas compressor plants with gas turbine drive AL-31ST(N). *Modern Problems of Science and Education*, (1-1), 333. EDN VIDYBR. [In Russian]
- Strugovets, S. A., Krivosheev, I. A., Galiulin, R. M., Kamaeva, R. F., & Rozhkov, K. E. (2010). Development of a method for parametric diagnostics of the technical condition of a gas turbine engine based on the analysis of blade erosion and patterns of compressor characteristics. *Vestnik USATU*, (4), 3–10. [In Russian].
- Chekardovsky, S. M., & Demura, M. N. (2013). Parametric diagnostics of a gas pumping unit. In O. A. Novoselov (Ed.), *Proceedings of the International Scientific and Technical Conference Dedicated to the 50th Anniversary of the Tyumen Industrial Institute “Oil and Gas of Western Siberia”* (Vol. 1, pp. 117–120). Tyumen Industrial University. EDN SYVJUH. [In Russian]
- Chichugin, V. A., & Noskov, S. V. (2011). Method of on-line parametric diagnostics of a gas-pumping aggregate during its operation. *Oil and Gas Studies*, (5), 62–70. EDN OQPKYF. [In Russian]

Информация об авторах

Дмитрий Александрович Иноземцев, старший преподаватель, кафедра газонефтетранспортных систем и оборудования нефтяной и газовой промышленности, Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия
d.a.inozemtsev@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3855-3204>

Алексей Вадимович Бунякин, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра нефтегазового дела, Майкопский государственный технологический университет, филиал в п. Яблоновский, Республика Адыгея, Россия
alex.bunyakina@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1849-1667>

Владислав Игоревич Дунаев, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра газонефтетранспортных систем и оборудования нефтяной и газовой промышленности, Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия
dunayev1964@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4166-6808>

Information about the authors

Dmitry A. Inozemtsev, Senior Lecturer, Department of Gas and Oil Transportation Systems and Equipment of the Oil and Gas Industry, Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia
d.a.inozemtsev@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3855-3204>

Aleksei V. Bunyakin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Oil and Gas Industry, Maykop State Technological University, branch in Yablonovsky village, Republic of Adygea, Russia
alex.bunyakina@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1849-1667>

Vladislav I. Dunaev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Gas and Oil Transportation Systems and Equipment of the Oil and Gas Industry, Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia
dunayev1964@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4166-6808>

Нелинейная задача Дарси–Стефана для радиальной фильтрации в пористой среде при закачке холодного агента

Артем Алексеевич Тарасенко¹✉, Евгения Викторовна Прокопенко²,
Алёна Сергеевна Ащеулова²

¹ Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева, филиал
в г. Новокузнецке, Новокузнецк, Россия

² Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева,
Кемерово, Россия

Контакт для переписки: gamenk987@gmail.com✉

Аннотация. Рассматривается радиально-симметричная задача замерзания насыщенной пористой среды у нагнетательной скважины при закачке холодного агента. Актуальность исследования связана с необходимостью описания фазовых переходов в окколоскважинной зоне с учетом радиальной фильтрации и движения свободной границы. Цель работы — построить и исследовать редуцированную модель Дарси–Стефана. Задача записывается через переменную переохлаждения. Для нее получено автомодельное решение, выраженное через неполные гамма-функции. Параметр фронта определяется трансцендентным уравнением; доказано, что оно имеет положительный корень, а в частном случае получена явная формула. Для численной проверки применена полунейная энтальпийная схема. Показано, что с ростом безразмерного параметра β , характеризующего отношение конвективного переноса, обусловленного фильтрацией, к диффузионному теплопереносу, фронт замерзания движется быстрее; при $\beta \geq 1$ ошибка по положению фронта к концу расчета ниже, чем при $\beta = 0,5$. При $\beta = 0,5$ максимальное расхождение наблюдается в начале расчета из-за влияния внутренней границы, сеточной аппроксимации и выбора критерия выделения фронта.

Ключевые слова: задача Дарси–Стефана, пористая среда, радиальная фильтрация, фазовый переход, свободная граница, переохлаждение, автомодельное решение, неполные гамма-функции, энтальпийная схема, вычислительный эксперимент

Благодарности: исследование выполнено без внешнего финансирования.

Цитирование: Тарасенко А. А., Прокопенко Е. В., Ащеулова А. С. 2026. Нелинейная задача Дарси–Стефана для радиальной фильтрации в пористой среде при закачке холодного агента // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 12. № 2 (46). С. 117–135. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-117-135>

Поступила 28.03.2026; одобрена 04.05.2026; принята 05.05.2026

Nonlinear Darcy–Stefan problem for radial Darcy flow in a porous medium during cold-fluid injection

Artem A. Tarasenko^{1✉}, Evgeniya V. Prokopenko², Alyona S. Ashcheulova²

¹ T. F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Branch in Novokuznetsk, Novokuznetsk, Russia

² T. F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russia
Corresponding author: gamenk987@gmail.com ✉

Abstract. A radially symmetric freezing problem for a saturated porous medium near an injection well during cold-fluid injection is examined. The relevance of the research is in the need to describe phase-change processes in the near-wellbore zone while accounting for radial flow and a moving boundary. The aim of the work is to develop and analyze a reduced Darcy–Stefan model for this setting. The problem is formulated in terms of the supercooling variable. A self-similar solution is obtained and expressed in terms of incomplete gamma functions. The front parameter is determined by a transcendental equation; the existence of a positive root is proved, and an explicit formula is derived for a particular case. A semi-implicit enthalpy scheme is used for numerical verification. An increase in the dimensionless filtration parameter β , which characterizes the ratio of filtration-induced convective transport to diffusive heat transfer, accelerates the freezing front; by the end of the simulation, the front-position error is lower for $\beta \geq 1$ than for $\beta = 0.5$. For $\beta = 0.5$, the maximum discrepancy is observed at the beginning of the simulation due to the influence of the inner boundary, the grid approximation, and the choice of the front-detection criterion.

Keywords: Darcy–Stefan problem, porous medium, radial Darcy flow, phase change, free boundary, supercooling, self-similar solution, incomplete gamma functions, enthalpy scheme, computational experiment

Acknowledgements: the study was carried out without external funding.

Citation: Tarasenko, A. A., Prokopenko, E. V. & Ashcheulova, A. S. (2026). Nonlinear Darcy–Stefan problem for radial Darcy flow in a porous medium during cold-fluid injection. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 12(2), 117–135. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-117-135>

Received Mar. 28, 2026; Reviewed May 4, 2026; Accepted May 5, 2026

Введение

Моделирование фазовых переходов в насыщенных пористых средах приводит к широкому классу задач со свободной границей. К ним относятся промерзание и оттаивание грунтов, работа геотермальных систем и тепловые процессы у скважины при закачке холодного агента. Для углеметановых пластов это особенно важно, поскольку свойства пласта, дебит скважины и состояние призабойной зоны тесно связаны [Тайлаков и др., 2014; Ли и др., 2024; Шишляев, Пименов, 2024]. В такой постановке возникает задача Дарси–Стефана: закон Дарси описывает движение жидкости, а условие Стефана — движение межфазной границы.

Теоретическую основу таких моделей заложили Х. Ф. Родригес и Х. М. Урбано [Rodrigues, Urbano, 1999], а также С. А. Саженков [Sazhenkov, 2004]. В первой работе дана трактовка задачи для насыщенной пористой среды с замерзшей зоной. Во второй предложена кинетическая формулировка задачи Коши. Там же доказано существование слабых энтропийных решений. Общую рамку задач Стефана и свободных границ задают и классические монографии [Crank, 1984; Rubinstein, 1971; Alexiades, Solomon, 1993].

В околоскважинной задаче многое определяет радиальная геометрия. Вблизи нагнетательной скважины скорость фильтрации обратно пропорциональна радиусу, т. е. имеет вид $v(r) \sim \frac{1}{r}$. Поэтому при $r \rightarrow 0$ в предельной модели возникает сингулярность. Из-за этого процесс заметно отличается от плоской схемы. Для теплопереноса без фазового перехода этот механизм подробно разобран в работе [Rees, Bassom, 2010]. Близкие модели фильтрации и массопереноса у одиночной скважины рассмотрены и в [Елкин, 2010; Шевченко и др., 2016; Хямяляйнен и др., 2017; Ширяев, 2019].

Для мерзлых пород и пористых пластов с фазовыми превращениями предложены радиальные модели и вычислительные схемы [Мусакаев и др., 2014; Бородин, 2015; Мусакаев, Хасанов, 2014; Li и др., 2018; Хи и др., 2020; Хи и др., 2021]. Однако аналитическое решение радиальной задачи Дарси–Стефана с законом Дарси, пригодное для прямой проверки численной схемы, представлено ограниченно. Поэтому ниже строится такая редуцированная модель: сначала получаем автомодельное решение, затем по нему проверяем полуэвную энтальпийную схему.

Постановка задачи и методы исследования

Редуцированная радиальная модель описывает рост зоны замерзания у нагнетательной скважины. Учитываются два механизма: радиальная фильтрация по закону Дар-

си и теплоперенос с фазовым переходом. Скважина рассматривается как предельная внутренняя граница нулевого радиуса; среда однородна, коэффициенты постоянны, температура флюида и скелета одинакова.

Предполагаем осесимметричное течение, однородную среду и несжимаемую жидкую фазу. Тогда из закона сохранения расхода через цилиндрическую поверхность получаем выражение для радиальной скорости фильтрации:

$$u_r(r) = \frac{Q}{2\pi\phi hr}. \quad (1)$$

В формуле (1) Q — расход, ϕ — пористость, h — эффективная мощность пласта. Далее объединим эти параметры в один постоянный коэффициент.

$$a = \frac{Q}{2\pi\phi h} > 0, u_r(r) = \frac{a}{r}. \quad (2)$$

Этот коэффициент объединяет постоянные параметры и сокращает запись. Сингулярный множитель при этом сохраняется, поэтому задача остается радиальной.

В области $0 < r < s(t)$, где задано поле переохлаждения, запишем редуцированное уравнение теплопереноса. При локальном тепловом равновесии и постоянных эффективных коэффициентах получаем

$$C \frac{\partial T}{\partial t} + Cu_r(r) \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_{\text{эф}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), 0 < r < s(t), t > 0, \quad (3)$$

где T — температура; $s(t)$ — радиус фронта фазового перехода; C — эффективная объемная теплоемкость; k — эффективная теплопроводность среды.

В редуцированной постановке конвективный перенос записан с тем же коэффициентом C , что и накопительный член; это упрощение нужно для автомодельного решения и не является полной двухфазной моделью теплопереноса в пористой среде.

Однотемпературная аппроксимация допустима, если температура флюида и скелета выравнивается быстрее, чем движется фронт. Зависимость коэффициентов от ледонасыщенности и дополнительный нелинейный вклад с производной фазовой доли здесь не учитываются [Rees, Bassom, 2010; Gerasimov, 2022].

Чтобы выделить холодную область, введем переменную переохлаждения

$$U(r, t) = T_f - T(r, t) \geq 0, \quad (4)$$

где T_f — температура фазового перехода, принимаемая постоянной. Тогда уравнение энергии принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{Q}{2\pi\phi hr} \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\lambda_{\text{эф}}}{C} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right). \quad (5)$$

Обозначим через температуропроводность среды

$$\chi = \frac{\lambda_{\text{эф}}}{C}. \quad (6)$$

Тогда уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = \chi \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), 0 < r < s(t), t > 0. \quad (7)$$

В уравнении (7) первый член описывает радиальную конвекцию, а оператор справа — радиальную теплопроводность.

Параметр $\beta = \frac{a}{2\chi}$ — безразмерная мера отношения конвективного переноса, связанного с фильтрацией, к диффузионному теплопереносу.

Замкнем задачу условиями на свободной границе. На фронте замерзания переохлаждение обращается в ноль

$$U(s(t), t) = 0. \quad (8)$$

Тем самым положение фронта связывается с температурой фазового перехода.

Скорость границы определяет условие Стефана

$$\Lambda \frac{ds}{dt} = -\lambda_{эф} \frac{\partial U}{\partial r}(s(t), t). \quad (9)$$

Знак минус задает направление теплового потока к межфазной поверхности. Запись $(s(t) - 0, t)$ означает предел при подходе к фронту со стороны замерзшей области $r < s(t)$.

Объемная плотность скрытой теплоты определяется формулой

$$\Lambda = \phi \rho_i L, \quad (10)$$

где L — удельная теплота фазового перехода, а Λ — объемная плотность скрытой теплоты, связанная с образованием льда в поровом пространстве.

В пределе скважины нулевого радиуса получаем граничные и начальные условия

$$r \rightarrow 0+: U(r, t) \rightarrow U_w > 0, r \rightarrow \infty: U(r, t) \rightarrow 0, U(r, 0) = 0. \quad (11)$$

Первое условие задает U_w — постоянное переохлаждение на внутренней границе скважины в предельном смысле при $r \rightarrow 0$; второе описывает невозмущенное состояние среды вдали от источника, третье фиксирует начальное распределение. Вместе с (7)–(9) условия (11) замыкают редуцированную постановку.

Аналитическое решение

Ищем автомодельное решение с диффузионным масштабом движения фронта.

Пусть фронт замерзания движется по закону

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\chi t}, \lambda > 0, \quad (12)$$

где $\lambda > 0$ — безразмерный параметр, определяющий скорость движения фазовой границы.

Поле переохлаждения ищем в автомодельном виде

$$U(r, t) = U_w F(\eta), \eta = \frac{r^2}{4\chi t}. \quad (13)$$

Представление (13) включает переохлаждение на внутренней границе, безразмерный профиль и автомодельную переменную.

При $\beta > 0$ редуцированная задача (7), (8), (9), (11) допускает автомодельное решение вида (12), (13). Профиль можно записать в интегральной форме. Его можно записать и через специальные функции:

$$F(\eta) = 1 - \frac{\int_0^\eta \xi^{\beta-1} e^{-\xi} d\xi}{\int_0^{\lambda^2} \xi^{\beta-1} e^{-\xi} d\xi} = \frac{\Gamma(\beta, \eta) - \Gamma(\beta, \lambda^2)}{\gamma(\beta, \lambda^2)}, 0 \leq \eta \leq \lambda^2. \quad (14)$$

Здесь используются верхняя и нижняя неполные гамма-функции. Параметр β учитывает влияние фильтрации. Условие Стефана дает уравнение на параметр фронта:

$$\Gamma(\beta, \eta) = \int_\eta^\infty \xi^{\beta-1} e^{-\xi} d\xi, \gamma(\beta, \eta) = \int_0^\eta \xi^{\beta-1} e^{-\xi} d\xi. \quad (15)$$

$$Ste \lambda^{2\beta-2} e^{-\lambda^2} = \gamma(\beta, \lambda^2). \quad (16)$$

Введем число Стефана

$$Ste = \frac{cU_w}{\Lambda} = \frac{cU_w}{\phi \rho_i L}. \quad (17)$$

Оно характеризует соотношение явной и скрытой теплоты.

Покажем, что уравнение (16) имеет хотя бы один положительный корень при любом положительном значении параметра фильтрации. Сначала выпишем производные автомодельной переменной:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{-r^2}{4\chi t^2} = \frac{-\eta}{t}, \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{r}{2\chi t}. \quad (18)$$

По правилу цепочки

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U_w F'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{-U_w \eta}{t} F'(\eta), \quad (19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = U_w F'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{U_w r}{2\chi t} F'(\eta), \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{U_w}{2\chi t} F'(\eta) + \frac{U_w r^2}{4\chi^2 t^2} F''(\eta). \quad (21)$$

Подставим (19)–(21) в уравнение (7):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{U_w}{t} [-\eta F'(\eta) + \beta F'(\eta)], \beta = \frac{a}{2\chi}, \quad (22)$$

$$\chi \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{U_w}{t} [\eta F''(\eta) + F'(\eta)]. \quad (23)$$

Отсюда следует обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\eta F''(\eta) + (\eta + 1 - \beta) F'(\eta) = 0. \quad (24)$$

После разделения переменных имеем

$$\frac{d}{d\eta} \ln |F'(\eta)| = -1 - \frac{1-\beta}{\eta}. \quad (25)$$

Интегрирование дает

$$F'(\eta) = C_1 \eta^{\beta-1} e^{-\eta}. \quad (26)$$

Из условий (11) и (8) следует

$$F(0) = 1, F(\lambda^2) = 0. \quad (27)$$

Отсюда следует нормированное интегральное представление профиля

$$F(\eta) = 1 - \frac{\int_0^\eta \xi^{\beta-1} e^{-\xi} d\xi}{\int_0^{\lambda^2} \xi^{\beta-1} e^{-\xi} d\xi}. \quad (28)$$

В физических переменных радиальная производная на фронте равна

$$\frac{\partial U}{\partial r} (s(t) - 0, t) = U_w F'(\lambda^2) \frac{s(t)}{2\chi t} = U_w F'(\lambda^2) \frac{\lambda}{\sqrt{\chi t}}. \quad (29)$$

Устраним постоянную интегрирования с помощью (26) и (28):

$$F'(\eta) = \frac{-\eta^{\beta-1} e^{-\eta}}{\gamma(\beta, \lambda^2)}. \quad (30)$$

На фронте производная равна

$$F'(\lambda^2) = \frac{-\lambda^{2\beta-2} e^{-\lambda^2}}{\gamma(\beta, \lambda^2)}. \quad (31)$$

Тогда градиент переохлаждения на фронте равен

$$\frac{\partial U}{\partial r} (s(t) - 0, t) = \frac{-U_w \lambda^{2\beta-1} e^{-\lambda^2}}{\gamma(\beta, \lambda^2) \sqrt{\chi t}}. \quad (32)$$

Из закона (12) находим скорость фазовой границы

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} (2\lambda \sqrt{\chi t}) = \lambda \sqrt{\frac{\chi}{t}}. \quad (33)$$

Подставляя эти выражения в условие Стефана, имеем

$$\Lambda \lambda \sqrt{\frac{\chi}{t}} = \lambda_{\text{эф}} \frac{U_w \lambda^{2\beta-1} e^{-\lambda^2}}{\gamma(\beta, \lambda^2) \sqrt{\chi t}}, \quad (34)$$

$$\Lambda\lambda = \frac{\lambda_{\text{эф}}}{\chi} \frac{U_w \lambda^{2\beta-1} e^{-\lambda^2}}{\gamma(\beta, \lambda^2)}, \quad (35)$$

$$\gamma(\beta, \lambda^2) = \frac{\lambda_{\text{эф}}}{\chi} \frac{U_w}{\Lambda} \lambda^{2\beta-2} e^{-\lambda^2}. \quad (36)$$

С учетом определения (6) имеем

$$\frac{\lambda_{\text{эф}}}{\chi} = C. \quad (37)$$

Для исследования корня введем функцию

$$\Psi(\lambda) = Ste \lambda^{2\beta-2} e^{-\lambda^2} - \gamma(\beta, \lambda^2). \quad (38)$$

При малых значениях параметра имеем асимптотику

$$\gamma(\beta, \lambda^2) = \frac{\lambda^{2\beta}}{\beta} + o(\lambda^{2\beta}), \quad (39)$$

$$\gamma(\beta, \lambda^2) \rightarrow \Gamma(\beta) > 0, Ste \lambda^{2\beta-2} e^{-\lambda^2} \rightarrow 0. \quad (40)$$

При больших значениях параметра правая часть уравнения стремится к нулю, тогда как интегральный вклад остается положительным. Значит, функция меняет знак на интервале $(0, +\infty)$. По теореме о промежуточном значении уравнение (16) имеет хотя бы один положительный корень.

Тогда переохлаждение записывается в кусочной форме

$$U(r, t) = \begin{cases} U_w \frac{\Gamma(\beta, \frac{r^2}{4\chi t}) - \gamma(\beta, \lambda^2)}{\gamma(\beta, \lambda^2)}, & 0 < r \leq 2\lambda\sqrt{\chi t}, \\ 0, & r > 2\lambda\sqrt{\chi t}. \end{cases} \quad (41)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0+} U(r, t) = U_w. \quad (42)$$

На оси источника предельное значение равно исходному переохлаждению. В частном случае $\beta = 1$, формулы дополнительно упрощаются:

$$\gamma(1, \lambda^2) = \int_0^{\lambda^2} e^{-\xi} d\xi = 1 - e^{-\lambda^2}. \quad (43)$$

Из (16) находим явную формулу для параметра фронта

$$\lambda = \sqrt{\ln(1 + Ste)}. \quad (44)$$

$$U(r, t) = \begin{cases} U_w \frac{\exp(\frac{-r^2}{4\chi t}) - \exp(-\lambda^2)}{1 - \exp(-\lambda^2)}, & 0 < r \leq 2\lambda\sqrt{\chi t}, \\ 0, & r > 2\lambda\sqrt{\chi t}. \end{cases} \quad (45)$$

При $\beta = 1$ решение записывается в явном виде и может служить эталоном для численной проверки.

Численная реализация

Для численной проверки точного решения используем полунеявную энтальпийную схему [Voller и др., 1987; Voller, Prakash, 1987]. Диффузионный оператор берем на новом временном слое. Это повышает устойчивость и подавляет паразитические осцилляции.

Введем радиальную сетку и временные слои:

$$r_i = r_w + i h_r, t^n = n \tau, i = 0, 1, \dots, N. \quad (46)$$

Здесь введены шаги по радиусу и времени, а также индексы узла и временного слоя. Во внутренней области схема имеет вид

$$\frac{c_i^{(n)}}{\tau} (U_i^{n+1} - U_i^n) + C \frac{a}{r_i} \frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{h_r} = \lambda_{\text{эф}} \left(\frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h_r} \right). \quad (47)$$

Аппроксимация конвекции, направленная против потока, стабилизирует расчет фронта. Неявная диффузионная часть дополнительно повышает устойчивость.

В коэффициентной форме схема сводится к трехдиагональной системе

$$A_i U_{i-1}^{n+1} + B_i U_i^{n+1} + D_i U_{i+1}^{n+1} = f_i^n. \quad (48)$$

Коэффициенты системы в формулах (49)–(52) имеют вид:

$$A_i = \frac{-\lambda_{\text{эф}}}{h_r^2} + \frac{\lambda_{\text{эф}}}{2r_i h_r} - \frac{Ca}{r_i h_r}, \quad (49)$$

$$B_i = \frac{c_i^{(n)}}{\tau} + \frac{2\lambda_{\text{эф}}}{h_r^2} + \frac{Ca}{r_i h_r}, \quad (50)$$

$$D_i = \frac{-\lambda_{\text{эф}}}{h_r^2} - \frac{\lambda_{\text{эф}}}{2r_i h_r}, \quad (51)$$

$$f_i^n = \frac{c_i^{(n)}}{\tau} U_i^n. \quad (52)$$

Скрытую теплоту учитываем через эффективную теплоемкость [Basu, Date, 1988; Voller и др., 1990]:

$$c_i^{(n)} = \begin{cases} C, & U_i^n \leq 0, \\ C + \frac{A}{\delta}, & 0 < U_i^n < \delta, \\ C, & U_i^n \geq \delta. \end{cases} \quad (53)$$

Параметр сглаживания определяет ширину переходной зоны. Далее принимаем его равным 0,2. Такая регуляризация включает скрытую теплоту в накопительный член и не меняет конвективную часть.

На усеченной области используем граничные условия

$$U(r_w, t) = U_w, U(R, t) = 0. \quad (54)$$

На внутренней границе задаем переохлаждение, а на внешней сохраняем невозмущенное состояние среды. Положение фронта затем определяется по температурному критерию, заданному в разделе вычислительного эксперимента.

Результаты вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент использует теплофизические параметры открытой эталонной задачи OpenGeoSys для осесимметричного замерзания насыщенной пористой среды вокруг скважины-теплообменника [Gerasimov, 2022]. Из этой постановки берутся только параметры среды; геометрия, время расчета, шаг по времени и граничное переохлаждение задаются отдельно для редуцированной тестовой задачи.

Модель ограничена однотемпературной гипотезой: при быстром охлаждении и слабом межфазном теплообмене температура жидкости может временно отличаться от температуры твердого скелета. Поэтому результаты относятся к режиму быстрого теплового выравнивания [Rees, Bassom, 2010; Alzoubi и др., 2020].

Исходный набор теплофизических параметров задается системой

$$\begin{cases} \phi = 0,5, \\ \rho_s = 2000 \text{ кг/м}^3, c_s = 900 \text{ Дж/(кгК)}, \\ \lambda_s = 1,1 \text{ Вт/(мК)}, \\ \rho_l = 1000 \text{ кг/м}^3, c_l = 4190 \text{ Дж/(кгК)}, \\ \lambda_l = 0,58 \text{ Вт/(мК)}, \\ \rho_i = 920 \text{ кг/м}^3, L = 3,34 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}, \\ U_w = 10 \text{ К}. \end{cases} \quad (55)$$

В (55) приведены пористость, параметры твердого скелета, жидкости и льда; значение $U_w = 10 \text{ К}$ выбрано как тестовое граничное переохлаждение для редуцированной задачи.

Из (55) находим эффективную объемную теплоемкость, теплопроводность, температуропроводность, объемную скрытую теплоту и число Стефана:

$$C = (1 - \phi)\rho_s c_s + \phi \rho_l c_l. \quad (56)$$

Все величины используются в объемной форме. Смешение массовых и объемных характеристик меняет число Стефана и ведет к систематической ошибке в положении фронта.

$$\lambda_{эф} = (1 - \phi)\lambda_s + \phi \lambda_l, \quad (57)$$

$$\chi = \frac{\lambda_{эф}}{C}, \quad (58)$$

$$\Lambda = \phi \rho_i L, \quad (59)$$

$$Ste = \frac{CU_w}{\Lambda} = \frac{CU_w}{\phi \rho_i L}. \quad (60)$$

После подстановки параметров из [Gerasimov, 2022] получаем рабочие значения величин для расчета:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = (1 - \phi) \rho_s c_s + \phi \rho_l c_l, \\ C = (1 - 0,5) \cdot 2000 \cdot 900 + 0,5 \cdot 1000 \cdot 4190 = 2,995 \cdot 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \text{К}), \\ \lambda_{эф} = (1 - \phi) \lambda_s + \phi \lambda_l, \\ \lambda_{эф} = (1 - 0,5) \cdot 1,1 + 0,5 \cdot 0,58 = 0,84 \text{ Вт}/(\text{мК}), \\ \chi = \frac{\lambda_{эф}}{C} = \frac{0,84}{2,995 \cdot 10^6} = 2,8047 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}, \\ \Lambda = \phi \rho_i L = 0,5 \cdot 920 \cdot 3,34 \cdot 10^5 = 1,5364 \cdot 10^8 \text{ Дж}/\text{м}^3, \\ Ste = \frac{CU_w}{\Lambda} = \frac{2,995 \cdot 10^6 \cdot 10}{1,5364 \cdot 10^8} = 0,19494. \end{array} \right. \quad (61)$$

Система (61) содержит рабочие значения для расчета. Эффективная теплопроводность фиксируется по исходной насыщенной смеси и не описывает рост теплопроводности при замещении воды льдом.

В расчетах рассматриваем интервал 0–48 ч и область 0–10 м при 2000 узлах и шаге по времени 60 с. Предельная граница $r = 0$ в численной сетке заменяется внутренним радиусом $r_w = 0,0001$ м.

$$\beta \in \{0,5, 1,0, 2,0\}. \quad (62)$$

В (62) рассмотрены три режима фильтрации — слабый, умеренный и интенсивный. Так оцениваем влияние параметра β на движение фронта и на ошибку схемы.

Основной показатель точности — положение фронта. Численный фронт определяется как положение изотермы $U = 0,1$ К и сравнивается с аналитической границей Стефана $U = 0$, т. е. с $r = s(t)$.

$$\varepsilon_{48} = \frac{s_{\text{числ}}(48\text{ч}) - s_{\text{точн}}(48\text{ч})}{s_{\text{точн}}(48\text{ч})} \cdot 100\%, \varepsilon_{\max} = \max_{0 < t \leq 48\text{ч}} \left| \frac{s_{\text{числ}}(t) - s_{\text{точн}}(t)}{s_{\text{точн}}(t)} \right| \cdot 100\%. \quad (63)$$

В (63) приведены численное и точное положения фронта, ошибка в конечный момент и максимальная ошибка после начального участка расчета. Максимум считается начиная с $t_{\min} = 1$ ч, когда фронт уже разрешается сеткой.

Итоговые расчетные данные собраны в системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = 0,5: \lambda = 0,302749, s_{\text{точн}}(48\text{ч}) = 0,133298 \text{ м}, \\ \quad \varepsilon_{48} = 3,851\%, \varepsilon_{\text{max}} = 14,657\%, \\ \beta = 1,0: \lambda = 0,422010, s_{\text{точн}}(48\text{ч}) = 0,185809 \text{ м}, \\ \quad \varepsilon_{48} = 0,230\%, \varepsilon_{\text{max}} = 4,907\%, \\ \beta = 2,0: \lambda = 0,588394, s_{\text{точн}}(48\text{ч}) = 0,259066 \text{ м}, \\ \quad \varepsilon_{48} = -0,248\%, \varepsilon_{\text{max}} = 1,532\%. \end{array} \right. \quad (64)$$

При росте β параметр фронта увеличивается. За 48 часов фронт проходит больший путь. При $\beta \geq 1$ ошибка к концу расчета ниже, чем при $\beta = 0,5$; для слабой фильтрации максимум ошибки связан с начальным участком.

На рис. 1 точная и численная траектории фронта почти совпадают при $\beta = 1$ и $\beta = 2$. Расхождение заметнее при $\beta = 0,5$. Это видно на начальном участке расчета, когда фронт еще только формируется.

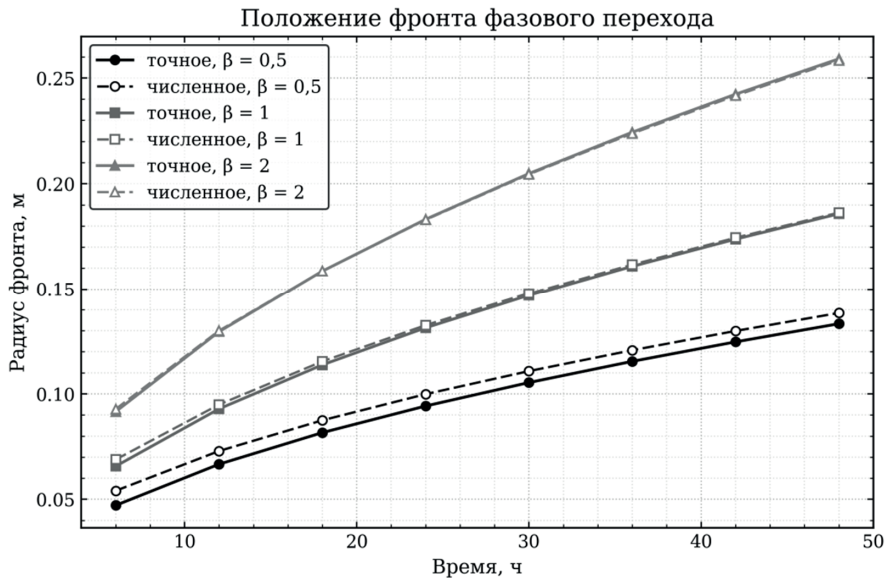


Рис. 1. Сопоставление точной и численной траекторий фронта фазового перехода при $\beta = 0,5; 1; 2$

Fig. 1. Comparison of the exact and numerical phase-change front trajectories for $\beta = 0.5, 1$, and 2

На рис. 2 видно, что основная часть профиля переохлаждения воспроизводится почти без расхождений. Остаточная погрешность сосредоточена в узкой переходной зоне у фронта фазового перехода.

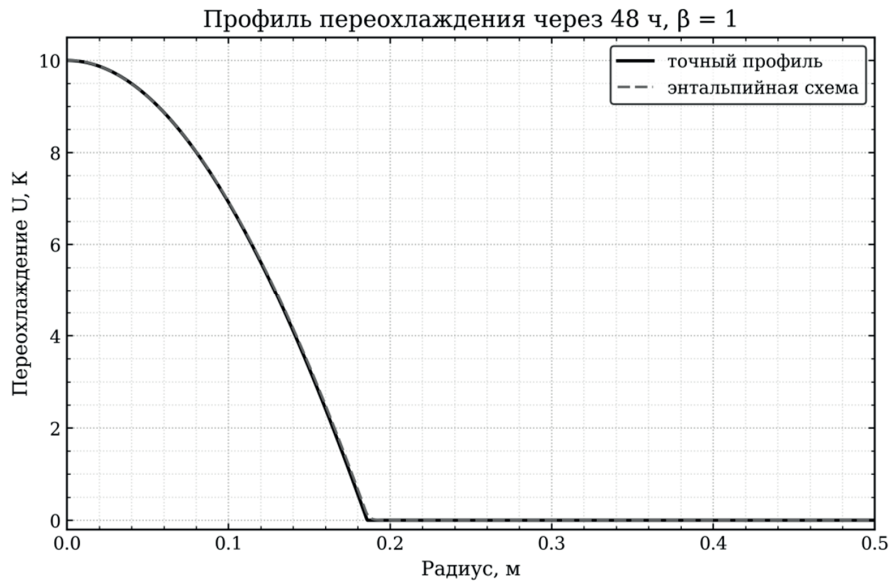


Рис. 2. Сопоставление точного и численного профилей переохлаждения через 48 часов

Fig. 2. Comparison of the exact and numerical supercooling profiles after 48 hours

На рис. 3 параметр λ монотонно растет с увеличением β . Значит, усиление фильтрации ускоряет движение фронта замерзания.

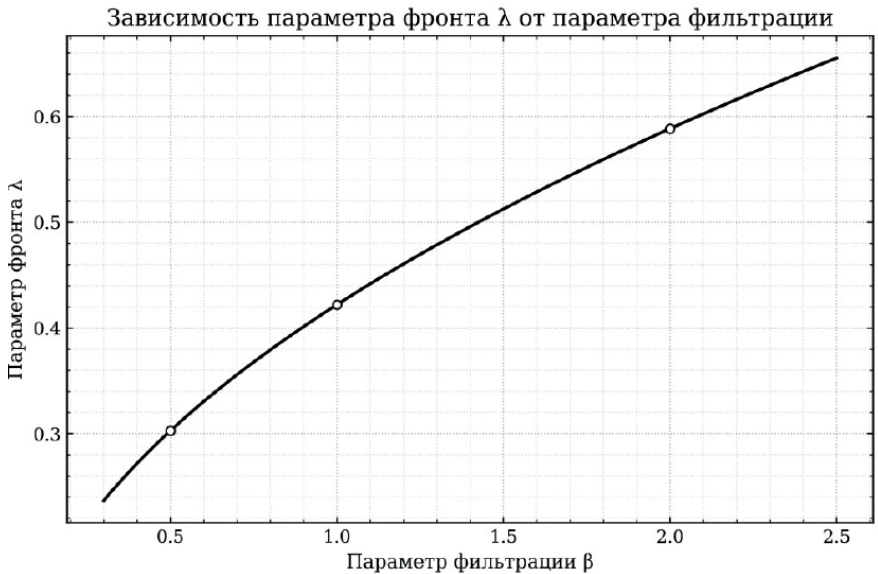


Рис. 3. Зависимость параметра автомодельного фронта от параметра фильтрации

Fig. 3. Dependence of the self-similar front parameter on the filtration parameter

Обсуждение

В радиальной геометрии фронт замерзания сохраняет диффузионный масштаб. Однако параметр фронта уже не является чисто диффузионной константой.

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\chi t} \propto \sqrt{t}. \quad (65)$$

Параметр фронта определяется уравнением (16) и зависит от β . Значит, фильтрация входит в сам закон движения фронта. Это и есть главный результат работы.

Структура оператора показывает, что фильтрация влияет не только на перенос потока, но и на коэффициент при радиальном члене. С учетом связи $\alpha = 2\chi\beta$ уравнение (7) можно записать в виде:

$$U_t = \chi \left(U_{rr} + \frac{1-2\beta}{r} U_r \right). \quad (66)$$

Правая часть имеет вид радиального оператора теплопроводности в формальной эффективной размерности:

$$d_{\text{eff}} = 2(1 - \beta). \quad (67)$$

Действительно, для радиального оператора в размерности d коэффициент при $\frac{U_r}{r}$ равен $d - 1$. В данном случае $d - 1 = 1 - 2\beta$, откуда следует выражение (67). Поэтому параметр β меняет не только интенсивность переноса, но и формальный тип радиального оператора.

Особый случай соответствует $\beta = 0,5$. Тогда d_{eff} коэффициент при $\frac{U_r}{r}$ обращается в нуль, и уравнение по структуре переходит к одномерному теплопроводному случаю. При $\beta = 0,5$ радиальный геометрический член сохраняет положительный знак, а при $\beta > 0,5$ его вклад становится отрицательным. Таким образом, значение $\beta = 0,5$ можно рассматривать как переход между режимом с выраженным радиальным влиянием и режимом, где фильтрационная составляющая сильнее меняет структуру оператора.

Большее расхождение численного и аналитического решений при $\beta = 0,5$ можно объяснить тем, что фронт дольше остается вблизи внутренней границы. В этой области особенно заметны влияние члена $\frac{1}{r}$, сеточной аппроксимации, численной диффузии и выбора изотермы, по которой определяется положение фронта.

Редуцированная постановка удобна для анализа, поскольку допускает точное решение. Это позволяет отделить ошибку численной схемы от неопределенностей физической модели. При этом задача сохраняет основные механизмы процесса: радиальную геометрию, фильтрацию по закону Дарси и условие Стефана на движущемся фронте. В более полной модели можно дополнительно учитывать конечный радиус скважины, температурную зависимость коэффициентов и связь фильтрации с полем давления.

Заключение

Построена редуцированная радиальная задача Дарси–Стефана для переменной переохлаждения. Для нее найдено точное автомодельное решение. Профиль выражается через неполные гамма-функции. Положение фронта задается трансцендентным уравнением.

Полунеявная энтальпийная схема проверена на точном решении: при $\beta \geq 1$ ошибка по положению фронта к концу расчета ниже, чем в режиме $\beta = 0,5$; максимальное расхождение для слабой фильтрации возникает на раннем этапе. При $\beta = 1$ решение записывается явно и может служить эталоном для проверки численных моделей.

Вычислительный эксперимент проведен на теплофизических параметрах OpenGeoSys [Gerasimov, 2022], но геометрия, время расчета и граничное переохлаждение заданы отдельно для редуцированной задачи. Рост параметра β увеличивает параметр автомодельного фронта, поэтому граница замерзания движется быстрее.

Постановка остается редуцированной: не учитываются конечный радиус скважины, изменение проницаемости при льдообразовании, сжимаемость среды, различие температур жидкой и твердой фаз, температурная зависимость коэффициентов и связь фильтрации с давлением. Поэтому решение следует использовать как эталон для проверки более полных радиальных моделей Дарси–Стефана, а не как универсальное описание околоскважинного промерзания.

Список литературы

- Бородин С. А. 2015. Численные методы решения задачи Стефана // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Т. 1. № 3 (3). С. 164–175. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2015-1-3-164-175>
- Елкин И. С. 2010. Моделирование процесса массопереноса в угольном массиве при увлажнении // Вестник Кузбасского государственного технического университета. № 1 (77). С. 25–28.
- Ли К. Х., Казанцев В. Г., Тайлаков О. В., Ли Х. У., Фомин А. И. 2024. Модель накопления повреждений угольнопородного массива у дегазационных скважин угольных шахт // Вестник Кузбасского государственного технического университета. № 1 (161). С. 52–65. <https://doi.org/10.26730/1999-4125-2024-1-52-65>
- Мусакаев Н. Г., Бородин С. А., Романюк С. Н. 2014. Методы решения одномерной радиальной задачи теплопередачи в окружающие скважину мерзлые породы // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. № 7. С. 19–26.
- Мусакаев Н. Г., Хасанов М. К. 2014. Математическое моделирование процесса добычи газа из газогидратной залежи с учетом образования льда // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. № 7. С. 43–50.
- Тайлаков О. В., Уткаев Е. А., Смыслов А. И., Кормин А. Н. 2014. Физическое моделирование изменения фильтрационных свойств угольных пластов // Вестник Кузбасского государственного технического университета. № 6 (106). С. 13–16.

- Хмяляйнен В. А., Баёв М. А., Шевцов А. Г. 2017. О влиянии напряженно-деформированного состояния угольного пласта на проницаемость закреплённой трещины гидроразрыва // Вестник Кузбасского государственного технического университета. № 6 (124). С. 121–126. <https://doi.org/10.26730/1999-4125-2017-6-121-126>
- Шевченко Л. А., Ткаченко Д. А., Астраков С. Н. 2016. Математическое моделирование газодинамического состояния угольного массива в зоне влияния скважины в процессе бурения // Вестник Кузбасского государственного технического университета. № 1 (113). С. 67–70.
- Ширяев С. Н. 2019. Многостадийная дегазация углеметановых пластов при взаимодействии процессов фильтрации газа и деформирования массива горных пород // Вестник Кузбасского государственного технического университета. № 5 (135). С. 64–73. <https://doi.org/10.26730/1999-4125-2019-5-64-73>
- Шишляев В. В., Пименов В. П. 2024. Оценка фильтрационных свойств угольного пласта и длины трещины гидроразрыва по результатам количественной интерпретации инъекционных тестов // Вестник Кузбасского государственного технического университета. № 2 (162). С. 35–44. <https://doi.org/10.26730/1999-4125-2024-2-35-44>
- Alexiades V., Solomon A. D. 1993. Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes. Washington, DC: Hemisphere Publishing Corporation. 323 p.
- Alzoubi M. A., Xu M., Hassani F. P., Poncet S., Sasmito A. P. 2020. Artificial ground freezing: A review of thermal and hydraulic aspects // Tunnelling and Underground Space Technology. Vol. 104. Art. 103534. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2020.103534>
- Basu B., Date A. W. 1988. Numerical modelling of melting and solidification problems — A review // Sadhana. Vol. 13. No. 3. Pp. 169–213. <https://doi.org/10.1007/BF02812200>
- Crank J. 1984. Free and Moving Boundary Problems. Oxford: Clarendon Press. 425 p.
- Gerasimov T. 2022. Benchmark test for the heat conduction equation with phase change: 3D axisymmetric problem of soil freezing around a BHE // OpenGeoSys Documentation. URL: https://www.opengeosys.org/stable/docs/benchmarks/heatconduction/heatconduction-soil-freezing/Heat_conduction_phase_change_%28soil_freezing_around_BHE%29.pdf (дата обращения: 28.03.2026).
- Li T., Zhou Y., Shi X., Hu X., Zhou G. 2018. Analytical solution for the soil freezing process induced by an infinite line sink // International Journal of Thermal Sciences. Vol. 127. Pp. 232–241. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.01.013>
- Rees D. A. S., Bassom A. P. 2010. Radial injection of a hot fluid into a cold porous medium: The effects of local thermal nonequilibrium // Computational Thermal Sciences. Vol. 2. No. 3. Pp. 221–230. <https://doi.org/10.1615/ComputThermalScien.v2.i3.20>
- Rodrigues J. F., Urbano J. M. 1999. On a Darcy–Stefan problem arising in freezing and thawing of saturated porous media // Continuum Mechanics and Thermodynamics. Vol. 11. No. 3. Pp. 181–191. <https://doi.org/10.1007/s001610050110>
- Rubinstein L. I. 1971. The Stefan Problem. Providence, RI: American Mathematical Society. 419 p.
- Sazhenkov S. A. 2004. Application of the method of kinetic equation to the Darcy–Stefan problem // Conservation Laws Preprint Server. No. 2004-006. 24 p.

- Voller V. R., Cross M., Markatos N. C. 1987. An enthalpy method for convection/diffusion phase change // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 24. No. 1. Pp. 271–284. <https://doi.org/10.1002/nme.1620240119>
- Voller V. R., Prakash C. 1987. A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Vol. 30. No. 8. Pp. 1709–1719. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(87\)90317-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(87)90317-6)
- Voller V. R., Swaminathan C. R., Thomas B. G. 1990. Fixed grid techniques for phase change problems: A review // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 30. No. 4. Pp. 875–898. <https://doi.org/10.1002/nme.1620300419>
- Xu M., Akhtar S., Zueter A. F., Auger V., Alzoubi M. A., Sasmito A. P. 2020. Development of analytical solution for a two-phase Stefan problem in artificial ground freezing using singular perturbation theory // *Journal of Heat Transfer*. Vol. 142. No. 12. Art. 122401. <https://doi.org/10.1115/1.4048137>
- Xu M., Akhtar S., Zueter A., Alzoubi M. A., Sushama L., Sasmito A. P. 2021. Asymptotic analysis of a two-phase Stefan problem in annulus: Application to outward solidification in phase change materials // *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 408. Art. 126343. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126343>

References

- Borodin, S. L. (2015). Numerical solution of the Stefan's problem. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 1(3), 164–175. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2015-1-3-164-175> [In Russian]
- Elkin, I. S. (2010). Process modeling of mass carry in a coal massif at humidification. *Bulletin of the Kuzbass State Technical University*, (1), 25–28. [In Russian]
- Lee, K. Kh., Kazantsev, V. G., Tailakov, O. V., Lee, Kh. U., & Fomin, A. I. (2024). Coal formation damage accumulation model at coal mine degassing wells. *Bulletin of the Kuzbass State Technical University*, (1), 52–65. <https://doi.org/10.26730/1999-4125-2024-1-52-65> [In Russian]
- Musakaev, N. G., Borodin, S. L., & Romanyuk, S. N. (2014). Methods for solving the one-dimensional radial heat-transfer problem in frozen rocks surrounding a well. *Bulletin of Tyumen State University. Physics and Mathematics. Informatics*, (7), 19–26. [In Russian]
- Musakaev, N. G., & Khasanov, M. K. (2014). Mathematical modeling of gas extraction from a gas-hydrate reservoir with account of the ice formation. *Bulletin of Tyumen State University. Physics and Mathematics. Informatics*, (7), 43–50. [In Russian]
- Tailakov, O. V., Utkae, E. A., Smyslov, A. I., & Kormin, A. N. (2014). Physical modelling of coal seams filtration properties fluctuation. *Bulletin of the Kuzbass State Technical University*, (6), 13–16. [In Russian]
- Khyamyalaynen, V. A., Baev, M. A., & Shevtsov, A. G. (2017). About the influence of the strain-stress state of coal seam on the propped fracture permeability. *Bulletin of the Kuzbass State Technical University*, (6), 121–126. <https://doi.org/10.26730/1999-4125-2017-6-121-126> [In Russian]
- Shevchenko, L. A., Tkachenko, D. A., & Astrakov, S. N. (2016). Mathematical modeling gasdynamically state coal solid in zone borehole in the drilling process. *Bulletin of the Kuzbass State Technical University*, (1), 67–70. [In Russian]

- Shiryaev, S. N. (2019). Multistage degassing of coal-methane seams in the interaction of gas filtration processes and deformation of rock mass. *Bulletin of the Kuzbass State Technical University*, (5), 64–73. <https://doi.org/10.26730/1999-4125-2019-5-64-73> [In Russian]
- Shishlyaev, V. V., & Pimenov, V. P. (2024). Assessment of filtration properties of a coal seam and the length of a hydraulic fracturing crack based on the results of quantitative interpretation of injection falloff tests. *Bulletin of the Kuzbass State Technical University*, (2), 35–44. <https://doi.org/10.26730/1999-4125-2024-2-35-44> [In Russian]
- Alexiades, V., & Solomon, A. D. (1993). *Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes*. Hemisphere Publishing Corporation.
- Alzoubi, M. A., Xu, M., Hassani, F. P., Poncet, S., & Sasmito, A. P. (2020). Artificial ground freezing: A review of thermal and hydraulic aspects. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 104, 103534. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2020.103534>
- Basu, B., & Date, A. W. (1988). Numerical modelling of melting and solidification problems — A review. *Sadhana*, 13(3), 169–213. <https://doi.org/10.1007/BF02812200>
- Crank, J. (1984). *Free and Moving Boundary Problems*. Clarendon Press.
- Gerasimov, T. (2022, December 20). Benchmark test for the heat conduction equation with phase change: 3D axisymmetric problem of soil freezing around a BHE. *OpenGeoSys Documentation*. Retrieved March 28, 2026, from https://www.opengeosys.org/stable/docs/benchmarks/heatconduction/heatconduction-soil-freezing/Heat_conduction_phase_change_%28soil_freezing_around_BHE%29.pdf
- Li, T., Zhou, Y., Shi, X., Hu, X., & Zhou, G. (2018). Analytical solution for the soil freezing process induced by an infinite line sink. *International Journal of Thermal Sciences*, 127, 232–241. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.01.013>
- Rees, D. A. S., & Bassom, A. P. (2010). Radial injection of a hot fluid into a cold porous medium: The effects of local thermal nonequilibrium. *Computational Thermal Sciences*, 2(3), 221–230. <https://doi.org/10.1615/ComputThermalScien.v2.i3.20>
- Rodrigues, J. F., & Urbano, J. M. (1999). On a Darcy–Stefan problem arising in freezing and thawing of saturated porous media. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 11(3), 181–191. <https://doi.org/10.1007/s001610050110>
- Rubinstein, L. I. (1971). *The Stefan Problem*. American Mathematical Society.
- Sazhenkov, S. A. (2004). Application of the method of kinetic equation to the Darcy–Stefan problem. *Conservation Laws Preprint Server*, 2004-006.
- Voller, V. R., Cross, M., & Markatos, N. C. (1987). An enthalpy method for convection/diffusion phase change. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(1), 271–284. <https://doi.org/10.1002/nme.1620240119>
- Voller, V. R., & Prakash, C. (1987). A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 30(8), 1709–1719. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(87\)90317-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(87)90317-6)
- Voller, V. R., Swaminathan, C. R., & Thomas, B. G. (1990). Fixed grid techniques for phase change problems: A review. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30(4), 875–898. <https://doi.org/10.1002/nme.1620300419>

- Xu, M., Akhtar, S., Zueter, A. F., Auger, V., Alzoubi, M. A., & Sasmito, A. P. (2020). Development of analytical solution for a two-phase Stefan problem in artificial ground freezing using singular perturbation theory. *Journal of Heat Transfer*, 142(12), 122401. <https://doi.org/10.1115/1.4048137>
- Xu, M., Akhtar, S., Zueter, A., Alzoubi, M. A., Sushama, L., & Sasmito, A. P. (2021). Asymptotic analysis of a two-phase Stefan problem in annulus: Application to outward solidification in phase change materials. *Applied Mathematics and Computation*, 408, 126343. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126343>

Информация об авторах

Арте́м Алексе́евич Тарасе́нко, студент, Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева, филиал в г. Новокузнецке, Новокузнецк, Россия
gamenk987@gmail.com

Евге́ния Викто́ровна Проко́пенко, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информационной безопасности, Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева, Кемерово, Россия
pev.vtit@kuzstu.ru

Але́на Серге́евна Аще́улова, кандидат физико-математических наук, доцент, Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева, Кемерово, Россия
asheulovaas@kuzstu.ru

Information about the authors

Artem A. Tarasenko, Undergraduate Student, T. F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Branch in Novokuznetsk, Novokuznetsk, Russia
gamenk987@gmail.com

Evgeniya V. Prokopenko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Head of the Department of Information Security, T. F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russia
pev.vtit@kuzstu.ru

Alyona S. Ashcheulova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, T. F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russia
asheulovaas@kuzstu.ru

Моделирование нестационарных режимов работы турбокомпрессоров с учетом отложений, образованных в межлопаточных каналах проточной части

Михаил Сергеевич Степанов¹✉, Алексей Вадимович Бунякин²,
Владислав Игоревич Дунаев¹

¹ Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия

² Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Контакт для переписки: m.s.stepanov@mail.ru✉

Аннотация. Классическая модель Мура–Грейтцера, описывающая нестационарные режимы турбокомпрессоров, не учитывает неравномерное распределение отложений в межлопаточных каналах, что ограничивает ее применение в задачах диагностики. В работе предложена модификация модели, основанная на разделении каналов на две группы — чистые и содержащие отложения. Получена система дифференциальных уравнений третьего порядка, учитывающая перераспределение расходов между указанными группами каналов. Численное интегрирование модифицированной системы методом Рунге–Кутты и анализ сечений Пуанкаре показали, что при фиксированном числе загрязненных каналов наблюдается дрейф фазовой траектории при сохранении амплитуд колебаний степеней сжатия.

Введен диагностический параметр, равный отношению амплитуд колебаний степени сжатия в загрязненных каналах к аналогичной величине в чистых каналах. Установлена количественная связь диагностического параметра с числом загрязненных каналов. Для практической реализации разработана имитационная модель сигнала давления, регистрируемого датчиками на статоре. Спектральный анализ сигнала методом быстрого преобразования Фурье позволяет выделить две частотные составляющие, отношение амплитуд которых соответствует значению диагностического параметра.

Предложенный подход создает основу для оперативной диагностики состояния проточной части турбокомпрессора в процессе эксплуатации без остановки агрегата.

Ключевые слова: дисбаланс, отложения, модель Мура–Грейтцера, диагностика, сечение Пуанкаре, квазипериодические колебания

Цитирование: Степанов М. С., Бунякин А. В., Дунаев В. И. 2026. Моделирование нестационарных режимов работы турбокомпрессоров с учетом отложений, образованных в межлопаточных каналах проточной части // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 12. № 2 (46). С. 136–154. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-136-154>

Поступила 17.03.2026; одобрена 25.04.2026; принята 06.05.2026

Modeling of non-stationary modes of operation of turbo compressors taking into account deposits formed in the interblade channels of the flow part

Mikhail S. Stepanov¹✉, Aleksey V. Bunyakin², Vladislav I. Dunaev¹

¹ Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia

² Kuban State University, Krasnodar, Russia

Corresponding author: m.s.stepanov@mail.ru✉

Abstract. The classical Moore–Greitzer model, which describes the non-stationary modes of turbo compressors, does not take into account the uneven distribution of deposits in the interblade channels, which limits its application in diagnostic tasks. In this paper, a modification of the model is proposed based on the division of the channels into two groups: clean channels and channels containing deposits. A third-order system of equations is obtained, which takes into account the redistribution of flows between the groups. Numerical integration by the Runge–Kutta method and the analysis of Poincaré sections showed that at a fixed number of contaminated channels, there is a drift of the phase trajectory while maintaining the amplitudes of the pressure ratio.

A diagnostic parameter is introduced, equal to the ratio of the amplitudes of the pressure ratio in the contaminated channels to the similar value in the clean channels. A quantitative relation of the diagnostic parameter with the number of contaminated channels is established. For practical implementation, a simulation model of the pressure signal recorded by the sensor on the stator is developed. Spectral analysis of the signal by the fast Fourier transform allows distinguishing two frequency

components, the amplitude ratio of which corresponds to the value of the diagnostic parameter.

The proposed approach provides a basis for the operational diagnostics of the flow path of a turbo compressor during operation without stopping the unit.

Keywords: imbalance, deposits, Moore–Greitzer model, diagnostics, Poincaré section, quasi-periodic oscillations

Citation: Stepanov, M. S., Bunyakin, A. V. & Dunaev, V. I. (2026). Modeling of non-stationary modes of operation of turbo compressors taking into account deposits formed in the interblade channels of the flow part. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 12(2), 136–154. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-136-154>

Received Mar. 17, 2026; Reviewed Apr. 25, 2026; Accepted May 6, 2026

Введение

Динамика турбокомпрессоров, в частности нагнетателей природного газа, характеризуется рядом нестационарных и зачастую неустойчивых режимов. Эти явления не только снижают эффективность работы агрегата, но и могут привести к аварийным ситуациям. Для анализа и прогнозирования неустойчивых режимов широко используется модель Мура–Грейтцера [Moore, 1984], описывающая связь между расходом и степенью сжатия газа. В классическом виде модель представляет собой двумерную динамическую систему и позволяет качественно и количественно описывать развитие автоколебательных процессов [Willems, de Jager, 1998]. Фундаментальные аспекты устойчивости этой системы с позиций теории бифуркаций детально исследованы в работе [McCaughan, 1990], что заложило основу для анализа перехода к нестационарным режимам. Систематическое изложение методов моделирования и управления такими режимами представлено в монографии [Gravdahl, Egeland, 1999].

Развитие теоретических представлений о нестационарных режимах в компрессорах дано в работе [Greitzer, 1976], где предложена нелинейная модель для прогнозирования переходных процессов в компрессорной системе и введен критерий (параметр B), определяющий тип неустойчивости — помпаж или вращающийся срыв. Эта модель послужила основой для последующих исследований, включая вывод уравнений Мура–Грейтцера. Дальнейшее развитие идеи получили в работе [Moore, Greitzer, 1986], где представлена теория постсрывных переходных процессов в осевых компрессорах.

Модель Мура–Грейтцера применяется при решении различных прикладных задач. В частности, она используется для разработки систем активного подавления помпажа и вращающегося срыва [Epstein et al., 1989; Paduano et al., 2001]; в этих работах показана принципиальная возможность управления неустойчивыми режимами путем воздействия на параметры сети или самой машины. Экспериментальные исследования процессов зарождения срыва [Day, 1993] показывают, что модальные возмущения не всегда

предшествуют срыву, и выявляют важную роль возмущений малой пространственной протяженности, что впоследствии учитывается при модификации моделей. Обзор различных подходов к моделированию нестационарных течений в компрессорах представлен в работе [Longley, 1994], где проанализированы допущения и области применимости различных моделей. В исследовании [Hansen et al., 1981] модель адаптирована и верифицирована на экспериментальных данных для центробежного компрессора, что подтверждает её применимость для описания реальных агрегатов. Для анализа влияния конструктивных и режимных параметров на динамику системы используются экспериментальные исследования пульсаций давления [Hönen, 1999]. В работе [Badmus et al., 1996] исследовано нелинейное управление помпажом в осевых компрессорах на основе модели Мура–Грейтцера и показана эффективность бифуркационного подхода к синтезу регуляторов. В работе [Zhang et al., 2025] представлен обзор современных методов раннего предупреждения неустойчивости, включающих использование динамических моделей для диагностики состояния проточной части.

Дальнейшее развитие моделей на основе уравнений Мура–Грейтцера отражено в исследовании [Shahriyari et al., 2024], где предложена модифицированная модель, учитывающая вторую производную расхода и скорость дросселирования, а также дан обзор методов обнаружения неустойчивых режимов, включая спектральный анализ. Сравнительный анализ показал, что новая модель более адекватно описывает поведение системы при интенсивных возмущениях по сравнению с классической. Обзор подходов к моделированию и управлению помпажом, включая сравнение модели Мура–Грейтцера с интеллектуальными методами, выполнен в работе [Khosravi et al., 2024], где отмечено, что классическая модель имеет погрешности при долговременном моделировании, но остается базовой для анализа динамики.

В работе [Su et al., 2014] на основе модели Мура–Грейтцера проанализированы методы активного управления устойчивостью авиационных двигателей, включая модальное и нелинейное управление. Показано, что использование модели позволяет эффективно подавлять вращающийся срыв и расширять рабочий диапазон компрессора. Исследование [Hosseindokht, 2025] посвящено разработке адаптивного PD-регулятора для подавления помпажа на основе нелинейной модели Мура–Грейтцера; анализ устойчивости выполнен с использованием фазовой плоскости и матрицы Якоби.

В контексте задач диагностики модель Мура–Грейтцера применяется для анализа нестационарных сигналов давления. Подходы к созданию ориентированных на управление физических моделей, предсказывающих предел устойчивой работы, развиты в работе [SAE International, 2019], где одномерная модель компрессора интегрирована с уравнениями Мура–Грейтцера для расчета статических характеристик.

Одной из актуальных проблем, влияющих на работу турбокомпрессора, является образование отложений в его проточной части, что приводит к изменению характеристик каналов и, как следствие, к изменению всей картины нестационарных процессов. Существующие модели, включая классическую модель Мура–Грейтцера, не учитывают возможность неравномерного распределения отложений по каналам.

Целью настоящей работы является построение модифицированной модели Мура–Грейтцера, учитывающей неравномерность распределения отложений в межлопаточных каналах, что позволяет установить количественную связь между динамикой системы и числом каналов, содержащих отложения.

В работе [Степанов и др., 2025] получено выражение для момента силы на валу турбокомпрессора в зависимости от числа каналов с отложениями, их толщины, конструктивных параметров агрегата и режима его работы. При этом количество каналов с отложениями остается неизвестным и требует определения, что и является предметом настоящего исследования.

Модифицированная модель Мура–Грейтцера

Для прогнозирования и анализа динамики нестационарных режимов работы турбокомпрессоров используется двумерная модель Мура–Грейтцера (без учета вращающегося срыва), описываемая системой двух уравнений [Moore, 1984]:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{l_c}(\psi_c(\varphi) - \psi), \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{1}{4B^2 l_c}(\varphi - \varphi_\tau(\psi)).\end{aligned}\tag{1}$$

$$\psi_c(\varphi) = k_K \omega^2 + k_H \omega^2 \left(1 + 1,5 \left(\frac{\varphi}{k_W \omega} - 1 \right) - 0,5 \left(\frac{\varphi}{k_W \omega} - 1 \right)^3 \right).$$

$$\varphi_\tau(\psi) = \delta \sqrt{\psi}.$$

В системе (1) введены следующие обозначения: ψ — степень сжатия, $\psi = \frac{p}{p_0}$; p — текущее давление в турбокомпрессоре; p_0 — давление на входе в рабочие каналы (считается переменным); φ — относительный расход газа, $\varphi = \frac{q}{q_0}$; q — текущий расход газа в одном межлопаточном канале; q_0 — максимальный расход газа в одном межлопаточном канале; τ — безразмерное время, $\tau = \frac{tU}{R}$; t — время; U — тангенциальная скорость в среднем диаметре рабочего колеса; R — средний радиус нагнетателя; $\psi_c(\varphi)$ — характеристика взаимосвязи расхода и степени сжатия; $\varphi_\tau(\psi)$ — характеристика сети; δ — параметр дросселирования; l_c — эффективная длина нагнетателя; B — параметр Грейтцера; k_K , k_H , k_W — конструктивные параметры агрегата; ω — частота вращения ротора, рад/с.

Модель Мура–Грейтцера описывает возникновение и развитие автоколебательных режимов при компримировании газа в турбокомпрессоре. Это иллюстрируется фазо-

вым портретом с устойчивым предельным циклом со следующим набором параметров $l_C = 3, B = 2,23, \delta = 0,4$. Паспортные значения агрегата: $\omega = 540, k_K = 5 \cdot 10^{-6}, k_H = 9 \cdot 10^{-8}, k_W = 5 \cdot 10^{-4}, \varphi(0) = 1, \psi(0) = 1,43$ [Григорьев и др., 2019; Gravdahl, Egeland, 1997].

Для построения фазового портрета применяется метод Рунге–Кутты 4-го порядка аппроксимации с шагом по времени 0,001, $\tau \in [0; 1000]$ (рис. 1).

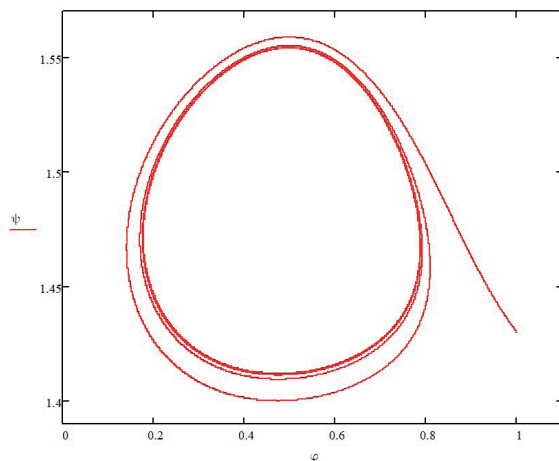


Рис. 1. Фазовый портрет решения двумерной системы уравнений Мура–Грейтцера с устойчивым (предельным) циклом — автоколебательный режим

Fig. 1. Phase portrait of the solution of the two-dimensional Moore–Greitzer system with a stable limit cycle — self-oscillating mode

Предлагается модификация классической модели (1), учитывающая неравномерность загрязнения проточной части турбокомпрессора. Модифицированная система Мура–Грейтцера моделирует динамику потоков в двух группах каналов, описывая расход и сжатие газа как в межлопаточных каналах с отложениями, так и без них. При этом размерность модифицированной системы увеличивается на единицу по отношению к классической.

Запишем уравнения (1) отдельно для межлопаточных каналов с отложениями и без них в виде расщепленной системы. Суть модификации состоит в том, что неизвестное давление на входе в рабочее колесо p_0 находится из условия постоянства общего расхода (который поддерживается АСУ агрегата):

$$Q = (k - j)q + jq_*, \quad (2)$$

где Q — общий эксплуатационный расход газа, k — количество межлопаточных каналов в рабочем колесе, j — количество межлопаточных каналов с наличием отложений, q_* — текущий расход газа в одном межлопаточном канале с наличием отложений.

Следуя (1), $\varphi_* = \frac{q_*}{q_0}$ — относительный расход газа в одном межлопаточном канале с наличием отложений.

Тогда из условия (2) имеем:

$$\varphi_* = \frac{1}{j} \left(k \frac{Q}{Q_0} - (k-j) \varphi \right),$$

где $Q_0 = q_0 k$ — максимальный расход газа на всем рабочем колесе.

Значит, расщепленная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{l_c} (\psi_c(\varphi) - \psi), \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{1}{4B^2 l_c} (\varphi - \varphi_\tau(\psi)), \\ \frac{d\psi_*}{d\tau} &= \frac{1}{4B^2 l_c} (\varphi_* - \varphi_\tau(\psi_*)). \end{aligned} \quad (3)$$

В системе (3) введены следующие обозначения: p_* — текущее давление в каналах с отложениями; $\psi_* = \frac{p_*}{p_0}$.

Дифференцируя (2), имеем:

$$(k-j) \frac{d\varphi}{d\tau} + j \frac{d\varphi_*}{d\tau} = 0.$$

Тогда с учетом двух первых выражений (3) получим:

$$(k-j) \left(\psi_c(\varphi) - \frac{p}{p_0} \right) + j \left(\psi_c(\varphi_*) - \frac{p_*}{p_0} \right) = 0$$

или

$$\frac{1}{p_0} = \frac{(k-j)\psi_c(\varphi) + j\psi_c(\varphi_*)}{(k-j)p + jp_*},$$

отсюда

$$\frac{p}{p_0} = \frac{(k-j)\psi_c(\varphi) + j\psi_c(\varphi_*)}{k-j + j\frac{\psi_*}{\psi}} = \psi$$

и

$$\frac{p_*}{p_0} = \frac{(k-j)\psi_c(\varphi) + j\psi_c(\varphi_*)}{(k-j)\frac{\psi}{\psi_*} + j} = \psi_*.$$

Подставляя значения ψ и ψ_* из двух последних выражений в расщепленную систему (3), получим модифицированную систему Мура–Грейтцера:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{l_c} \left(\psi_c(\varphi) - \psi \frac{(k-j)\psi_c(\varphi) + j\psi_c(\varphi_*)}{(k-j)\psi + j\psi_*} \right), \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{1}{4B^2 l_c} \left(\varphi - \varphi_\tau \left(\psi \frac{(k-j)\psi_c(\varphi) + j\psi_c(\varphi_*)}{(k-j)\psi + j\psi_*} \right) \right), \\ \frac{d\psi_*}{d\tau} &= \frac{1}{4B^2 l_c} \left(\varphi_* - \varphi_\tau \left(\psi_* \frac{(k-j)\psi_c(\varphi) + j\psi_c(\varphi_*)}{(k-j)\psi + j\psi_*} \right) \right), \\ \varphi_* &= \frac{1}{j} \left(k \frac{Q}{Q_0} - (k-j)\varphi \right).\end{aligned}\tag{4}$$

Система (4) численно решается методом Рунге–Кутты 4-го порядка аппроксимации с набором параметров $\varphi(0) = 0,5$, $\psi(0) = 1,43$, $\psi_*(0) = 1,44$ и шагом по времени 0,001, $\tau \in [0; 1000]$.

Построим фазовые портреты решения модифицированной системы Мура–Грейтцера для $j = 4, 5, 6$ при $\frac{Q}{Q_0} = 0,5$, что соответствует тому, что агрегат работает на половине допустимого расхода газа.

На рис. 2а наблюдается дрейф фазовой траектории вдоль осей ψ, ψ_* в сторону увеличения степеней сжатия. На рис. 2б отражается незначительный дрейф траектории вблизи неустойчивого цикла. На рис. 2с фазовая траектория дрейфует вдоль осей ψ, ψ_* в сторону уменьшения степеней сжатия.

Интервал численного интегрирования $\tau \in [0; 1000]$ позволяет визуализировать как выход на цикл (приближение к нему), так и дрейф траектории (уход от неустойчивого цикла) (см. рис. 2).

Основное качество, характеризующее данные дрейфы фазовых траекторий, состоит в том, что амплитуды колебания траекторий на одном витке $\Delta\psi$ и $\Delta\psi_*$ (максимальные диапазоны изменения на одном витке) как по вертикальной, так и по горизонтальной оси практически неизменны. Это дает возможность введения диагностического параметра D_j , представляющего собой отношение амплитуд колебания степеней сжатия в каналах с отложениями $\Delta\psi_*$ и без них $\Delta\psi$:

$$D_j = \frac{\Delta\psi_*}{\Delta\psi}.\tag{5}$$

Диагностический параметр D_j является отношением диапазонов колебания степеней сжатия в каналах с отложениями и без них и определяет целочисленный параметр j (при «дрейфе траектории» D_j почти постоянно, рис. 2 (а, б, с) и табл. 1).

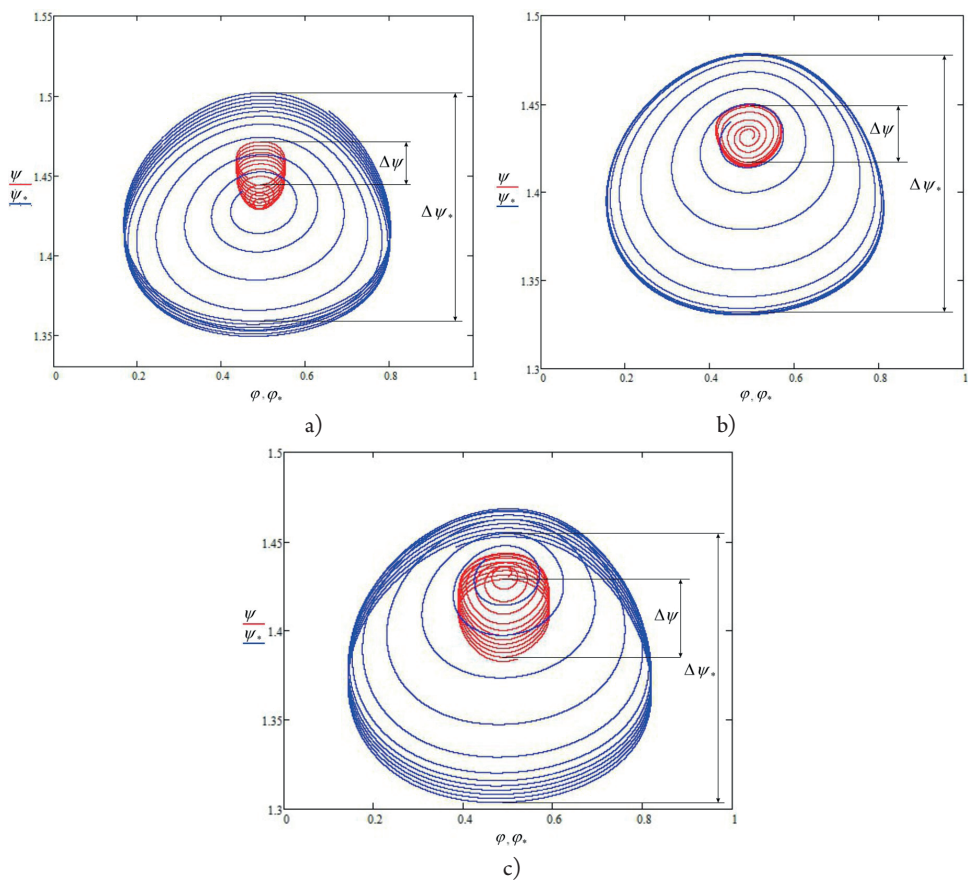


Рис. 2. Фазовые портреты решения модифицированной системы уравнений Мура–Грейтцера: при а) $j = 4$, б) $j = 5$, в) $j = 6$
Fig. 2. Phase portraits of the solution to the modified Moore–Greitzer equations for а) $j = 4$, б) $j = 5$, в) $j = 6$

В табл. 1 приведены значения параметра D_j от 1 до 13 каналов с наличием отложений.

Таблица 1. Значение параметра D_j
Table 1. Values of the parameter D_j

j	$\Delta\psi$	$\Delta\psi^*$	D_j
1	0,01118	0,13541	12,10956
2	0,01507	0,1386	9,19136
3	0,02051	0,14222	6,93424
4	0,02708	0,14493	5,35078
5	0,0348	0,14738	4,2339
6	0,04371	0,14939	3,41743
7	0,05382	0,15077	2,80131

Окончание табл. 1

Table 1 (end)

j	$\Delta\psi$	$\Delta\psi_*$	D_j
8	0,06507	0,15122	2,32375
9	0,07731	0,15037	1,94506
10	0,0902	0,14782	1,63877
11	0,10324	0,14315	1,3866
12	0,11575	0,13608	1,17559
13	0,127	0,12654	0,99635

Параметр D_j поддается измерению при помощи высокочастотных датчиков колебаний давления, устанавливаемых на внутренней поверхности статора турбокомпрессора и на входе в него, с последующей спектральной обработкой значения степени сжатия

$$\psi = \frac{P}{P_0}.$$

Для качественного анализа неустойчивого предельного цикла модифицированной системы уравнений (3), подтверждающего неизменность амплитуды колебаний при дрейфе фазовой траектории, применим метод сечения Пуанкаре [Wiggins, 1990]. Данный метод позволяет перейти от анализа непрерывной траектории в фазовом пространстве к анализу дискретного двумерного отображения, что особенно наглядно для выявления квазипериодичности [Кондратьев, Ляпцев, 2012].

Сечение Пуанкаре задается в виде двух гиперплоскостей, каждая размерности «3», в четырехмерном пространстве $(\varphi, \varphi_*, \psi, \psi_*)$, заданных уравнениями $\varphi = 0,5$ и $\varphi_* = 0,5$. Выбор указанных значений обусловлен их соответствием средним точкам предельного цикла для соответствующих групп каналов (см. рис. 2). Эти две трехмерные гиперплоскости имеют пересечение в виде двумерной плоскости сечения Пуанкаре ($3 + 3 - 4 = 2$, здесь 4 — это размерность объемлющего пространства).

На рис. 3 приведены сечения Пуанкаре при $j = 4, 5, 6$.

На графиках рис. 3 представлена зависимость между координатами точек пересечения фазовых траекторий $\psi^{(k)}, \psi_*^{(k)}$ с этой плоскостью. Индекс k нумерует последовательность этих пересечений, соответствующих последовательности витков, и на графиках эти точки соединяются непрерывными линиями. Выход на почти прямые участки соответствует дрейфу траектории, и параллельность линий этих участков подтверждает почти неизменность параметра D_j при дрейфе траекторий.

Разница между кривыми на каждом графике (см. рис. 3) соответствует пересечениям фазовых траекторий с плоскостью сечения Пуанкаре, отличающимся диаметрально противоположными точками одного витка.

Полученное сечение Пуанкаре свидетельствует о неустойчивости предельного цикла модифицированной системы Мура–Грейтцера гиперболического типа, а выход на почти прямые участки показывает практическую неизменность диаметра витков при дрейфе фазовой траектории.

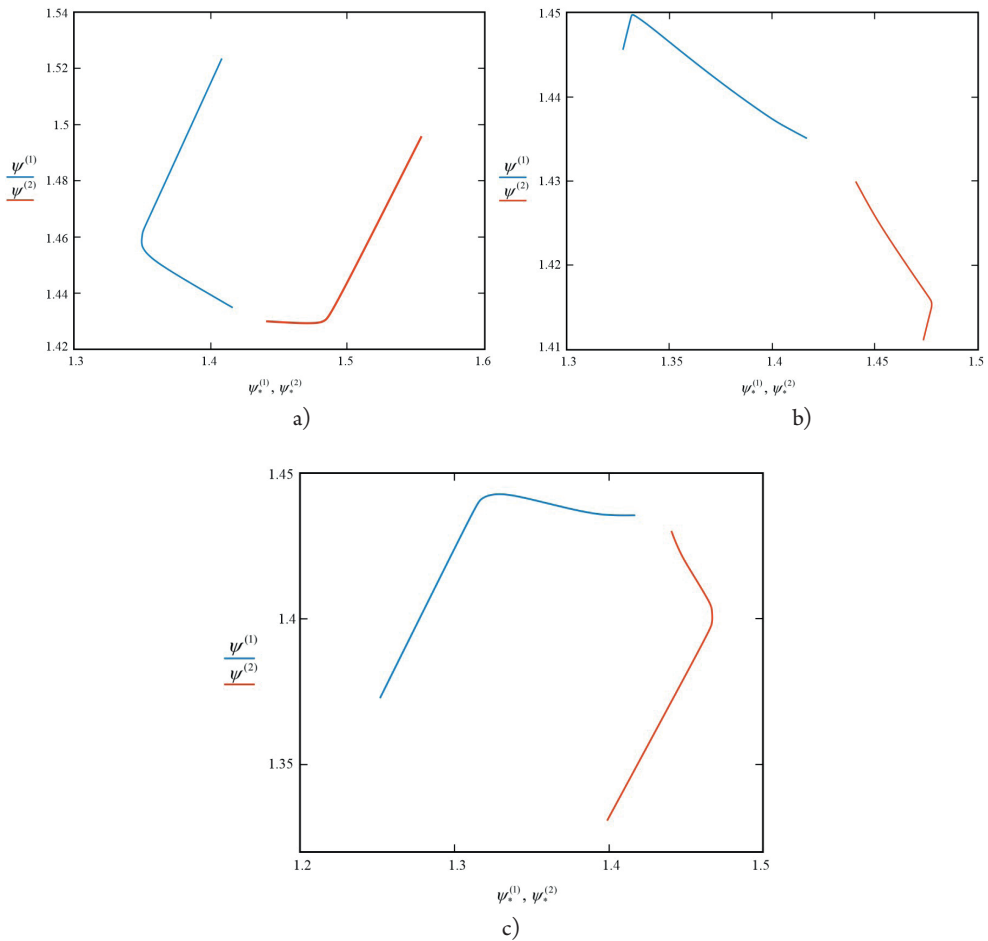


Рис. 3. Сечение Пуанкаре для фазового портрета решения модифицированной системы уравнений Мура–Грейтцера: при а) $j = 4$, б) $j = 5$, в) $j = 6$

Fig. 3. Poincaré section of the phase portrait of the solution to the modified Moore–Greitzer equations for а) $j = 4$, б) $j = 5$, в) $j = 6$

Продолжительность цикла модифицированной системы Мура–Грейтцера слабо меняется при дрейфе траектории и имеет порядок величины, равный $\tau_{\text{цикл}} \approx 100$ по безразмерному времени τ , это соответствует периоду $t = \frac{\tau_{\text{цикл}}}{\omega}$, где $\omega = 540$ рад/с — циклическая частота вращения ротора, $t = 0,0185$ с. За время периода происходит порядка 10 оборотов ротора, следовательно установление высокочувствительного датчика давления на внутренней поверхности статора может выявлять непосредственно количество каналов j , в которых степень сжатия существенно отличается от каналов без отложений, что видно из рис. 4.

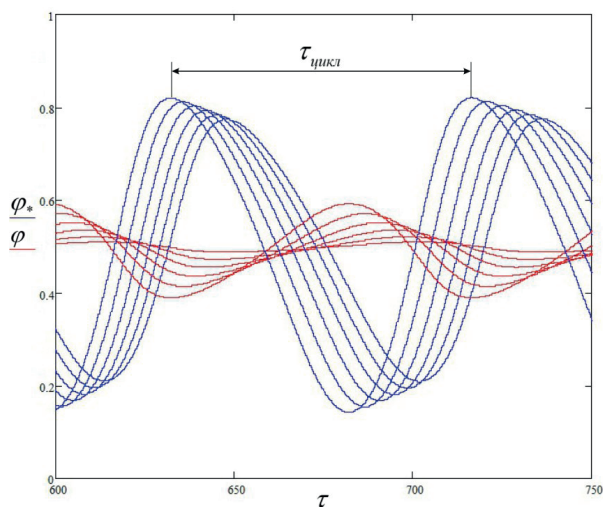


Рис. 4. Зависимости φ и φ^* от безразмерного времени τ численного решения модифицированной системы уравнений Мура–Грейтцера при $j = 1...6$

Fig. 4. Dependencies φ and φ^* on dimensionless time τ of the numerical solution of the modified Moore–Greitzer system for $j = 1...6$

Таким образом, анализ сечений Пуанкаре показывает, что при дрейфе фазовой траектории амплитуды колебаний степеней сжатия ψ и ψ^* остаются практически неизменными, а их отношение D_j сохраняет постоянное значение для фиксированного числа загрязненных каналов j (см. табл. 1). Следовательно, параметр D_j может быть использован в качестве диагностического признака, доступного для измерения по пульсациям давления в проточной части. При вращении ротора со скоростью ω датчики фиксируют пульсации давления, обусловленные прохождением лопаток. Поскольку межлопаточные каналы разделены на две группы (чистые и содержащие отложения), значения степеней сжатия на входе и выходе будут моделироваться с частотой, кратной числу лопаток. Для моделирования такого сигнала используем функцию, описывающую измеряемую степень сжатия и включающую имитацию измерительных шумов:

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{\psi_*^{\max} + \psi_*^{\min} + \psi^{\max} + \psi^{\min}}{4} - \frac{\psi_*^{\max} - \psi_*^{\min}}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} k t\right) + \\ + \frac{\psi_*^{\max} - \psi_*^{\min}}{10} \sin\left(\frac{8\pi}{T_0} k t\right), & 0 \leq t < T_0 \frac{j}{k}, \\ \frac{\psi_*^{\max} + \psi_*^{\min} + \psi^{\max} + \psi^{\min}}{4} - \frac{\psi_*^{\max} - \psi_*^{\min}}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} k t\right) + \\ + \frac{\psi_*^{\max} - \psi_*^{\min}}{10} \sin\left(\frac{8\pi}{T_0} k t\right), & T_0 \frac{j}{k} \leq t < T_0. \end{cases} \quad (6)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}k \approx 883$ рад/с; k — количество межлопаточных каналов в рабочем колесе;

j — число каналов с наличием отложений; t — время; T_0 — продолжительность цикла модифицированной системы Мура–Грейтцера.

Выражение (5) имитирует гармонические составляющие колебаний степени сжатия, соответствующие двум группам каналов (j загрязненных и $k - j$ незагрязненных). Отношение амплитуд этих составляющих пропорционально отношениям высот пиков спектральной диаграммы (спектр Фурье — разложения временного ряда «сигнала» $\psi(t)$) на основной частоте ω_0 .

Для численного эксперимента были выбраны следующие параметры, соответствующие реальному центробежному нагнетателю (см. табл. 1).

Значения степеней сжатия взяты из результатов расчета по модифицированной модели Мура–Грейтцера для $j = 5$: $\psi_*^{\min} = 1,3312$, $\psi_*^{\max} = 1,4784$, $\psi^{\min} = 1,4148$, $\psi^{\max} = 1,4498$.

На рис. 5 представлен фрагмент полученного таким образом модельного сигнала $\psi(t)$.

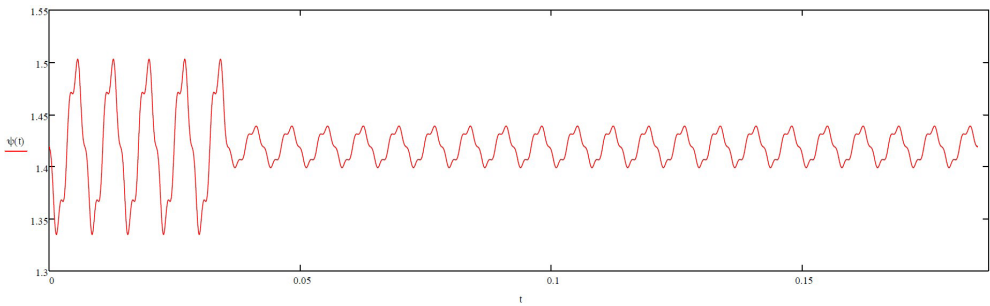


Рис. 5. Имитация сигнала $\psi(t)$

Fig. 5. Simulated signal $\psi(t)$

Для выделения частотных составляющих и оценки отношения амплитуд, соответствующих чистым каналам и каналам с отложениями, был применен метод быстрого преобразования Фурье (БПФ) при помощи стандартной функции из библиотеки MathCad (функция fft) с параметрами дискретизации: $N = 2048$ — количество точек БПФ, шаг по времени $\Delta t = \frac{T_0}{N}$, что обеспечило частотное разрешение $\Delta f = \frac{2\pi}{N \Delta t}$, амплитудный спектр рассчитывался для частот $f_m = m\Delta f$, $m = 0, 1 \dots \frac{N}{2}$. Результат спектрального анализа показан на рис. 6.

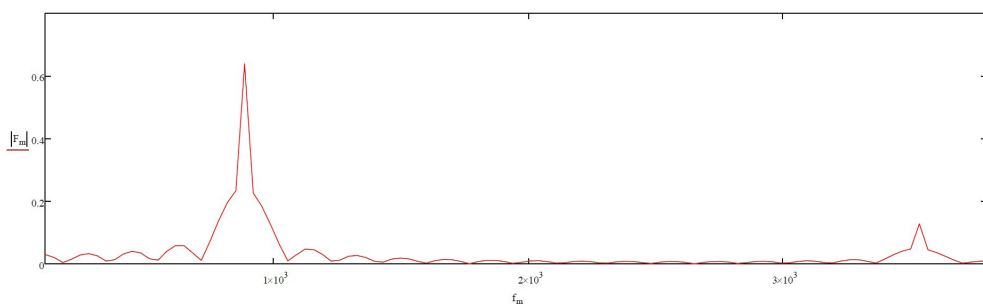


Рис. 6. Преобразование Фурье сигнала $\psi(t)$

Fig. 6. Fourier transformation of the signal $\psi(t)$

На спектре отчетливо наблюдаются два пика на основной частоте $\omega_0 \approx 883$ рад/с, соответствующей колебаниям давления ввиду прохождения каналов и перемычек между ними около точки установки датчика давления: более крутой (высокий) пик соответствует модуляции, связанной с каналами, содержащими отложения; второй — пологий (меньшей высоты) — незагрязненным каналам. Отношение высот этих пиков составляет величину, приблизительно равную 3,5. Таким образом:

$$D_j = \frac{\Delta\psi_*}{\Delta\psi} \approx 3,5.$$

Здесь знак приближенного равенства означает, что, обращаясь к табл. 1, в которой приведены значения диагностического параметра D_j для различного числа загрязненных каналов j , находим, что полученное значение соответствует $j = 5 \div 6$.

Шумы имитируются регулярными модами $\frac{\psi_*^{\max} - \psi_*^{\min}}{10} \sin\left(\frac{8\pi}{T_0} k t\right)$ и $\frac{\psi_*^{\max} - \psi_*^{\min}}{10} \sin\left(\frac{8\pi}{T_0} k t\right)$ соответственно для одной и другой группы каналов (5).

Частота шумов условно принята в 4 раза выше, а амплитуды — в 5 раз меньше, чем у основной моды сигнала (см. рис. 5). В результате на спектральной диаграмме (рис. 6) появляются субгармоники, соответствующие шуму.

Качественное подобие гармоник основной моды и шумовых субгармоник обусловлено тем, что шум смоделирован регулярным образом, но при этом не меняется картина «совмещения пиков двух типов каналов на основной частоте». Такая же картина сохранится при произвольном расположении чистых и загрязненных каналов по окружности рабочего колеса, а не только при их групповом расположении.

Таким образом, реализован подход к приближенному определению количества каналов с наличием отложений по спектральным характеристикам пульсаций давления, измеряемых на входе и выходе рабочего колеса. Преимущество спектрального метода в инвариантности относительно порядка взаимного расположения каналов с отложени-

ями и без. Предложенный диагностический параметр D_j может быть выделен из спектра сигнала и однозначно (хотя и с точностью до единицы) связан с количеством загрязненных каналов с помощью заранее рассчитанной зависимости.

Заключение

В работе предложена модификация классической модели Мура–Грейтцера, позволяющая учитывать неравномерность распределения отложений в проточной части турбокомпрессора. Разработанная модель адекватно описывает наблюдаемое на практике явление медленного смещения фазового цикла при наличии загрязнений.

Введен новый диагностический параметр D_j , представляющий собой отношение диапазонов колебаний степени сжатия в загрязненных и чистых каналах. Показано, что данный параметр устойчив к изменению начальных условий и имеет четкую зависимость от количества загрязненных межлопаточных каналов j .

Установлено, что с увеличением количества загрязненных каналов значение параметра D_j уменьшается, выходя на единицу при приближении j к половине всех каналов рабочего колеса.

Предложенный подход открывает возможности для разработки систем оперативного мониторинга и диагностики состояния турбокомпрессора без его остановки, что является значительным практическим преимуществом по сравнению с традиционными методами.

Список источников

- Григорьев Л. И., Асиян А. В., Беккер А. С. 2019. Синергетические методы анализа помпажных явлений в работе центробежного компрессора газоперекачивающего агрегата // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. № 9. С. 36–45. [https://doi.org/10.33285/0132-2222-2019-9\(554\)-36-45](https://doi.org/10.33285/0132-2222-2019-9(554)-36-45)
- Кондратьев А. С., Ляпцев А. В. 2012. Сечения Пуанкаре при описании поведения нелинейных систем // Компьютерные инструменты в образовании. № 1. С. 39–47.
- Степанов М. С., Бунякин А. В., Дунаев В. И. 2025. Моделирование дисбаланса ротора нагнетателя, обусловленного отложениями в его проточной части // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 11. № 2 (42). С. 126–140. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2025-11-2-126-140>
- Badmus O. O., Chowdhury S., Nett C. N. 1996. Nonlinear control of surge in axial compression systems // Automatica. Vol. 32. No 1. Pp. 59–70. [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(95\)00104-2](https://doi.org/10.1016/0005-1098(95)00104-2)
- Day I. J. 1993. Stall inception in axial flow compressors // Journal of Turbomachinery. Vol. 115. No. 1. Pp. 1–9. <https://doi.org/10.1115/1.2929209>
- Epstein A. H., Ffowcs Williams J. E., Greitzer E. M. 1989. Active suppression of aerodynamic instabilities in turbomachines // Journal of Propulsion and Power. Vol. 5. No. 2. Pp. 204–211. <https://doi.org/10.2514/3.23137>

- Gravdahl J. T., Egeland O. 1997. A Moore–Greitzer axial compressor model with spool dynamics // *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 5. Pp. 4714–4719. <https://doi.org/10.1109/CDC.1997.649750>
- Gravdahl J. T., Egeland O. 1999. *Compressor Surge and Rotating Stall: Modelling and Control*. London: Springer. 225 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0827-6>
- Greitzer E. M. 1976. Surge and rotating stall in axial flow compressors — Part I: Theoretical compression system model // *Journal of Engineering for Power*. Vol. 98. No. 2. Pp. 190–198. <https://doi.org/10.1115/1.3446138>
- Greitzer E. M. 1976. Surge and rotating stall in axial flow compressors — Part II: Experimental results and comparison with theory // *Journal of Engineering for Power*. Vol. 98. No. 2. Pp. 199–211. <https://doi.org/10.1115/1.3446139>
- Hansen K. E., Jørgensen P., Larsen P. S. 1981. Experimental and theoretical study of surge in a small centrifugal compressor // *Journal of Fluids Engineering*. Vol. 103. No 3. Pp. 391–395. <https://doi.org/10.1115/1.3240796>
- Hönen H. 1999. Axial compressor stall and surge prediction by measurements // *International Journal of Rotating Machinery*. Vol. 5. No. 2. Pp. 77–87. <https://doi.org/10.1155/S1023621X9900007X>
- Hosseindokht S. M. 2025. Stability analysis for nonlinear compressor system and active adaptive controller against surge with antisurge valve // *arXiv preprint*. arXiv:2503.04337. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2503.04337>
- Khosravi A., Chatraei A., Shahgholian G., Kargar S.-M. 2024. Surge control in centrifugal compressor using dynamic controllers // *International Journal of Natural and Engineering Sciences*. Vol. 18. No 2. Pp. 92–107. URL: <https://www.ijnes.org/index.php/ijnes/article/view/766> (дата обращения: 15.06.2026)
- Liu Y., Du J., Zhao D. 2025. Advances in early warning and active control of compressor instabilities for aerospace applications // *Progress in Aerospace Sciences*. Vol. 159. Article 101156. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2025.101156>
- Longley J. P. 1994. A review of nonsteady flow models for compressor stability // *Journal of Turbomachinery*. Vol. 116. No. 2. Pp. 202–215. <https://doi.org/10.1115/1.2928354>
- McCaughan F. E. 1990. Bifurcation analysis of axial flow compressor stability // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. Vol. 50. No. 5. Pp. 1232–1253.
- Moore F. K. 1984. A theory of rotating stall of multistage axial compressors: Part 1, 2, and 3 // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. Vol. 106. Pp. 313–336. <https://doi.org/10.1115/1.3239567>
- Moore F. K., Greitzer E. M. 1986. A theory of post-stall transients in axial compression systems: Part I — Development of equations // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. Vol. 108. No. 1. Pp. 68–78. <https://doi.org/10.1115/1.3239893>
- Paduano J. D., Greitzer E. M., Epstein A. H. 2001. Compression system stability and active control // *Annual Review of Fluid Mechanics*. Vol. 33. No. 1. Pp. 491–517. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.33.1.491>
- SAE International. 2019. A physics-based, control-oriented turbocharger compressor model for the prediction of pressure ratio at the limit of stable operations // *SAE Technical Paper*. 2019-01-0320. <https://doi.org/10.4271/2019-01-0320>

- Shahriyari M. J., Firouzabadi A., Khaleghi H., Esmailifar S. M. 2024. A new model for compressor surge and stall control // *Scientific Reports*. Vol. 14. No. 1. Article 5347. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-55816-w>
- Su S., Lv Y., Huang S., Sun Z. 2014. Analysis of aircraft engine active stability control method // *Advances in Aeronautical Science and Engineering*. Vol. 5. No. 1. Pp. 7–11.
- Wiggins S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer. 672 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4067-7>
- Willems F., de Jager B. 1998. Modeling and control of rotating stall and surge: An overview // *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*. Vol. 1. Pp. 331–335. <https://doi.org/10.1109/CCA.1998.728438>

References

- Grigoriev, L. I., Asiryan, A. V., & Bekker, A. S. (2019). Synergetic methods of surge phenomena analysis in the operation of a centrifugal compressor of a gas pumping unit. *Automation, Telemechanization and Communication in Oil Industry*, (9), 36–45. [https://doi.org/10.33285/0132-2222-2019-9\(554\)-36-45](https://doi.org/10.33285/0132-2222-2019-9(554)-36-45) [In Russian]
- Kondratiev, A. S., & Lyaptsev, A. V. (2012). Poincaré sections in describing the behavior of nonlinear systems. *Computer Tools in Education Journal*, (1), 39–47. [In Russian]
- Stepanov, M. S., Bunyakin, A. V., & Dunaev, V. I. (2025). Modeling of supercharger rotor imbalance caused by deposits in its flow path. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 11(2), 126–140. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2025-11-2-126-140> [In Russian]
- Badmus, O. O., Chowdhury, S., & Nett, C. N. (1996). Nonlinear control of surge in axial compression systems. *Automatica*, 32(1), 59–70. [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(95\)00104-2](https://doi.org/10.1016/0005-1098(95)00104-2)
- Day I. J. (1993). Stall inception in axial flow compressors. *Journal of Turbomachinery*, 115(1), 1–9. <https://doi.org/10.1115/1.2929209>
- Epstein, A. H., Ffowcs Williams, J. E., & Greitzer, E. M. (1989). Active suppression of aerodynamic instabilities in turbomachines. *Journal of Propulsion and Power*, 5(2), 204–211. <https://doi.org/10.2514/3.23137>
- Gravdahl, J. T., & Egeland, O. (1997). A Moore–Greitzer axial compressor model with spool dynamics. *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, 5, 4714–4719. <https://doi.org/10.1109/CDC.1997.649750>
- Gravdahl, J. T., & Egeland, O. (1999). *Compressor Surge and Rotating Stall: Modelling and Control*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0827-6>
- Greitzer, E. M. (1976). Surge and rotating stall in axial flow compressors — Part I: Theoretical compression system model. *Journal of Engineering for Power*, 98(2), 190–198. <https://doi.org/10.1115/1.3446138>
- Greitzer, E. M. (1976). Surge and rotating stall in axial flow compressors — Part II: Experimental results and comparison with theory. *Journal of Engineering for Power*, 98(2), 199–211. <https://doi.org/10.1115/1.3446139>

- Hansen, K. E., Jørgensen, P., & Larsen, P. S. (1981). Experimental and theoretical study of surge in a small centrifugal compressor. *Journal of Fluids Engineering*, 103(3), 391–395. <https://doi.org/10.1115/1.3240796>
- Hönen, H. (1999). Axial compressor stall and surge prediction by measurements. *International Journal of Rotating Machinery*, 5(2), 77–87. <https://doi.org/10.1155/S1023621X9900007X>
- Hosseindokht, S. M. (2025). Stability analysis for nonlinear compressor system and active adaptive controller against surge with antisurge valve. *arXiv preprint. arXiv:2503.04337*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2503.04337>
- Khosravi, A., Chatraei, A., Shahgholian, G., & Kargar, S.-M. (2024). Surge control in centrifugal compressor using dynamic controllers. *International Journal of Natural and Engineering Sciences*, 18(2), 92–107. Retrieved June 15, 2026, from <https://www.ijnes.org/index.php/ijnes/article/view/766>
- Liu, Y., Du, J., & Zhao, D. (2025). Advances in early warning and active control of compressor instabilities for aerospace applications. *Progress in Aerospace Sciences*, 159, 101156. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2025.101156>
- Longley, J. P. (1994). A review of nonsteady flow models for compressor stability. *Journal of Turbomachinery*, 116(2), 202–215. <https://doi.org/10.1115/1.2928354>
- McCaughan, F. E. (1990). Bifurcation analysis of axial flow compressor stability. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50(5), 1232–1253.
- Moore, F. K. (1984). A theory of rotating stall of multistage axial compressors: Part 1, 2, and 3. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 106, 313–336. <https://doi.org/10.1115/1.3239567>
- Moore, F. K., & Greitzer, E. M. (1986). A theory of post-stall transients in axial compression systems: Part I — Development of equations. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 108(1), 68–78. <https://doi.org/10.1115/1.3239893>
- Paduano, J. D., Greitzer, E. M., & Epstein, A. H. (2001). Compression system stability and active control. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 33(1), 491–517. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.33.1.491>
- SAE International. (2019). A physics-based, control-oriented turbocharger compressor model for the prediction of pressure ratio at the limit of stable operations. *SAE Technical Paper. 2019-01-0320*. <https://doi.org/10.4271/2019-01-0320>
- Shahriyari, M. J., Firouzabadi, A., Khaleghi, H., & Esmailifar, S. M. (2024). A new model for compressor surge and stall control. *Scientific Reports*, 14(1), 5347. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-55816-w>
- Su, S., Lv, Y., Huang, S., & Sun, Z. (2014). Analysis of aircraft engine active stability control method. *Advances in Aeronautical Science and Engineering*, 5(1), 7–11.
- Wiggins, S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4067-7>
- Willems, F., & de Jager, B. (1998). Modeling and control of rotating stall and surge: An overview. *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*, 1, 331–335. <https://doi.org/10.1109/CCA.1998.728438>

Информация об авторах

Михаил Сергеевич Степанов, старший преподаватель, кафедра газонефтетранспортных систем и оборудования нефтяной и газовой промышленности, Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия

m.s.stepanov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0513-2681>

Алексей Вадимович Бунякин, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математических и компьютерных методов, Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

alex.bunyakin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1849-1667>

Владислав Игоревич Дунаев, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра газонефтетранспортных систем и оборудования нефтяной и газовой промышленности, Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия

dunayev1964@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4166-6808>

Information about the authors

Mikhail S. Stepanov, Senior Lecturer, Department of Gas and Oil Transportation Systems and Equipment of the Oil and Gas Industry, Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia

m.s.stepanov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0513-2681>

Aleksei V. Bunyakin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Mathematical and Computer Methods, Kuban State University, Krasnodar, Russia

alex.bunyakin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1849-1667>

Vladislav I. Dunaev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Gas and Oil Transportation Systems and Equipment of the Oil and Gas Industry, Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia

dunayev1964@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4166-6808>

Влияние строения пласта на достоверность оценки пористости и проницаемости с помощью CRM-модели

Никита Сергеевич Буланов¹✉, Сергей Викторович Степанов²

¹ Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

² ООО «РН – Геология Исследования Разработка», Тюмень, Россия

Контакт для переписки: nek103@mail.ru✉

Аннотация. В статье рассматривается влияние специфики одной емкостно-резистивной модели CRM, адаптированной для разных типов геологического строения, на интерпретируемые значения пористости и проницаемости пласта. Исследования выполнены на основе синтетических данных с учетом масштабного эффекта и неоднородности пласта. Адаптация модели CRM на этапе, когда забойное давление постоянно, позволило идентифицировать временную константу. Далее путем учета непостоянного забойного давления на интервале проверки определены интерпретированные значения пористости и проницаемости, характеризующие геологическую структуру объекта моделирования. Выявлено, что для неоднородных пластов интерпретированные пары «пористость–проницаемость» могут отличаться от значений, полученных по зависимости между этими свойствами, установленной для рассматриваемого пласта с учетом масштабного эффекта. Это указывает на то, что специфика пространственной структуры пласта не только влияет на интерпретируемые значения фильтрационно-емкостных свойств, но и может формировать иную петрофизическую зависимость, учитывающую специфику модели CRM.

Ключевые слова: математическое моделирование, CRM, неопределенность, масштабный эффект

Цитирование: Буланов Н. С., Степанов С. В. 2026. Влияние строения пласта на достоверность оценки пористости и проницаемости с помощью CRM-модели // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 12. № 2 (46). С. 155–170. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-155-170>

Поступила 13.02.2026; одобрена 14.05.2026; принята 15.05.2026

The influence of reservoir structure on the reliability of porosity and permeability estimation using the CRM model

Nikita S. Bulanov¹✉, Sergey V. Stepanov²

¹ University of Tyumen, Tyumen, Russia

² LLC “RN – Geology Research and Development”, Tyumen, Russia

Corresponding author: nek103@mail.ru✉

Abstract. This article examines the impact of a single capacitance-resistive model (CRM), adapted for different geological structures, on the interpreted reservoir porosity and permeability values. The study was conducted using synthetic data accounting for scale effects and reservoir heterogeneity. Matching the CRM model at a stage, where bottomhole pressure was constant, allowed us to identify the time constant. Subsequently, by accounting for variable bottomhole pressure over the validation interval, interpreted porosity and permeability values characterizing the geological structure of the modeled object were determined. It was revealed that for heterogeneous formations, the interpreted porosity–permeability pairs may differ from the values obtained using the relation between these properties established for the given formation, taking into account the scale effect. This indicates that the specific spatial structure of the formation not only influences the interpreted values of reservoir properties but can also shape a different petrophysical relation that accounts for the specific features of the CRM model.

Keywords: mathematical modeling, CRM, uncertainty, scale effect

Citation: Bulanov, N. S. & Stepanov, S. V. (2026). The influence of reservoir structure on the reliability of porosity and permeability estimation using the CRM model. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 12(2), 155–170. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-155-170>

Received Feb. 13, 2026; Reviewed May 14, 2026; Accepted May 15, 2026

Введение

Проблема прогнозирования добычи в условиях недостаточной информации о пласте является одной из основных при управлении разработкой нефтяных месторождений [Дейк, 2012]. Традиционный подход, основанный на построении детальных трехмерных гидродинамических моделей (ГДМ), требует значительных временных и вычислительных ресурсов, а также большого объема исходных данных, которые зачастую доступны

лишь на поздних стадиях разработки [Aziz, 1993; Ertekin et al., 2001]. В связи с этим сохраняется потребность в инструментах, позволяющих оперативно получать оценки характеристик пласта и прогнозы добычи при ограниченной информации.

В этом контексте аналитические модели, сочетающие простоту и физическую обоснованность [Жетруов и др., 2022], представляют особый интерес, поскольку такие модели имеют небольшое (относительно ГДМ) число параметров, а значит, имеют по сравнению с ГДМ существенно меньшую неопределенность. Одной из таких аналитических моделей является емкостно-резистивная модель CRM (capacitance-resistive model), первоначально развитая в работах М. Sayarroug и др. [2009]. Модель основана на уравнении материального баланса и описывает взаимосвязь между закачкой и добычей через две ключевые характеристики: емкость (capacitance), связанную с поровым объемом, и сопротивление (resistance), отражающее проводимость среды [Liang et al., 2007].

Важнейшее достоинство CRM, отмеченное в обзоре de Holanda R. W. и др. [2018], заключается в ее способности количественно оценивать связность между скважинами и прогнозировать кратко-среднесрочную добычу на основе минимального набора промысловых данных, что делает ее мощной альтернативой трудоемкому гидродинамическому моделированию в ряде практических задач.

В статье [Шевцов и др., 2020] приводятся результаты исследования прогностической способности CRM и ГДМ, согласно которым «фактор незнания точного распространения свойств является более весомым, чем фактор детальности в описании фильтрационных процессов». Иными словами, корректная идентификация параметров модели CRM, количество которых соизмеримо с количеством скважин, значительно надежнее, чем идентификация параметров ГДМ, количество которых соизмеримо с количеством расчетных ячеек, что, очевидно, сказывается и на точности прогнозирования.

Существуют несколько модификаций CRM, одна из наиболее распространенных — модификация CRMP [Степанов и др., 2021; Sudaryanto, Yortsos, 2001], формула которой имеет вид:

$$q_j(t_n) = q_j(t_0) \left(e^{-\left(\frac{t_n - t_0}{\tau_j}\right)} \right) + \sum_{k=1}^n \left\{ e^{-\left(\frac{t_n - t_0}{\tau_j}\right)} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_k}{\tau_j}} \right) \left[\sum_{i=1}^{N_{inj}} [f_{ij} I_i^{(k)}] - J_j \tau_j \frac{\Delta p_{wf}^{(k)}}{\Delta t_k} \right] \right\}. \quad (1)$$

где $q_j(t_n)$ — дебит жидкости скважины j в момент времени t_n ; $q_j(t_0)$ — дебит жидкости в начальный момент времени t_0 ; τ_j — временная константа (тау); Δt_k — временной шаг; f_{ij} — коэффициент взаимовлияния; I_i — приемистость скважины i ; J_j — коэффициент продуктивности; $\Delta p_{wf}^{(k)}$ — изменение забойного давления.

Временная константа, как видно из формулы (1), играет принципиальную роль в модели CRM, она определяется по формуле:

$$\tau = \frac{C_t V_p}{J}, \quad (2)$$

где C_t — общая сжимаемость; V_p — поровый объем области дренирования. В модификации CRMP параметры τ , V_p , J характеризуют область дренирования скважины, а значит, учитывают ее специфику, обусловленную строением пласта, количеством и расположением влияющих нагнетательных скважин.

Для практических целей важно понимать величину порового объема и коэффициента продуктивности [Поплыгин, Соколов, 2020]. Эти величины имеют очевидную практическую значимость, но, кроме этого, заметим, что в формуле (1) учитывается нестационарность забойного давления, и корректность соответствующего слагаемого зависит не только от корректности данных по динамике забойного давления, но и от корректности множителя $J\tau$ или от эквивалентного ему множителя $C_t V_p$.

Поскольку величины V_p и J совместно входят в формулу (2), то идентификация параметра τ не позволяет однозначно их определить. Таким образом, имеет место неопределенность, которую необходимо оценить. Помочь в этом может то обстоятельство, что поровый объем зависит от пористости, коэффициент продуктивности зависит от проницаемости, а между пористостью и проницаемостью, как известно по лабораторным исследованиям керна, существует выраженная тенденция — чем больше пористость, тем больше проницаемость [Жуков, Моторыгин, 2019].

Использование зависимостей между пористостью и проницаемостью, полученных по керновым данным, не правомерно, поскольку имеет место масштабный эффект [Михайлов, Полищук, 2014], что вносит дополнительную неопределенность при интерпретации рассматриваемых множителей в формуле (2). Важно, что получение зависимостей на разных масштабах должно происходить на представительных данных, что вытекает из понимания элементарного представительного объема (Representative Elementary Volume, REV) [Хасанов, Лоншаков, 2020]. Проблема масштабирования свойств неоднородных сред детально исследована в работе [Renard, Marsily, 1997], которая показала, что эффективная проницаемость может существенно отличаться от среднеарифметических или среднегармонических значений, особенно в средах с высокой контрастностью свойств. Позднее Jonoud, Jackson [2008] на примере анализа фильтрационных процессов в песчаниках подтвердили, что достижение REV для проницаемости требует существенно больших объемов, по сравнению с пористостью, что напрямую влияет на корректность петрофизических моделей, используемых при интерпретации.

Кроме того, неопределенность в идентификации параметров модели CRM может быть обусловлена тем, что значения V_p и J связаны с тем, что определяющие их значения пористости и проницаемости являются следствиями того, как пространственно устроен пласт. Другими словами, одно значение пористости, характеризующее область дренирования, может соответствовать разным распределениям пористости в этой зоне дренирования. Аналогичное обстоятельство имеет место и для проницаемости. Поэтому крайне важно учитывать особенности геологического строения и неоднородность фильтрационно-емкостных свойств (ФЕС) при работе с фильтрационными моделями [Ertekin et al., 2019; Пятибратов, 2015; Мищенко и др., 2004].

Вообще говоря, проблема неопределенности при CRM-моделировании не нова, она исследовалась в разных контекстах. В качестве примера приведем ряд работ. В статье [Алтуний и др., 2012] говорится о применении модели CRM для решения задачи о разделении добычи по совместно разрабатываемым пластам. Неопределенность получаемых коэффициентов нивелируется посредством регуляризации решения обратной задачи весовыми множителями, вычисляемыми с использованием теории нечетких множеств. В статье [Афанаскин и др., 2020] приводятся результаты применения модели CRM для оценки ФЕС и анализа взаимодействия скважин, фактически решая обратную задачу и показывая, что параметры модели несут в себе информацию о геологии пласта, при этом различные геологические варианты могут приводить к схожим расчетным режимам работы скважин. Кроме того, продемонстрированы успехи в применении CRM для выделения зон коллекторов с ухудшенными ФЕС на основе предположения, что проницаемость может экспоненциально или степенным образом изменяться в динамике, и авторы встроили эту зависимость в расчет. Таким образом, модель стала учитывать нестационарность свойств пласта в процессе эксплуатации [Mirzayev et al., 2017].

В работе Т. А. Поспеловой [2021] предпринята прямая интеграция возможностей CRM и стохастико-аналитической модели для задач заводнения, в результате этой интеграции автор приходит не к минимизации этих неопределенностей, а к созданию более сбалансированного инструмента. Итогом является суженный и обоснованный диапазон возможных геологических реализаций, который лучше соответствует как статическим данным, так и фактическим динамическим откликам, что позволяет принимать более взвешенные решения по управлению заводнением.

Учитывая вышесказанное, следует, что модель CRM можно использовать не только как инструмент для анализа и прогнозирования разработки, но и как инструмент, позволяющий интерпретировать свойства пласта, релевантные зоне дренирования скважины, которая может быть разной исходя из типа модели CRM. В этой связи цель данной работы — изучение того, насколько могут отличаться значения пористости и проницаемости, соответствующие значению константы времени, позволяющей настроить модель CRM на фактические данные с аналогичными значениями этих фильтрационно-емкостных свойств, следующих из зависимости, характеризующей пласт на масштабе, релевантном фации.

Методы

Рассмотрим наиболее простой случай, соответствующий эксплуатации залежи в неоднородном пласте в режиме истощения пластовой энергии применительно к одной добывающей скважине. Считаем, что пласт имеет предельное насыщение нефтью, т. е. в отсутствие закачки воды имеем однофазную постановку и добыча жидкости эквивалента добыче нефти, а забойное давление постоянно. Для такой постановки формула (1) сводится к виду:

$$q(t_n) = q(t_0) \left(e^{-\left(\frac{t_n - t_0}{\tau}\right)} \right). \quad (3)$$

Для случая переменного забойного давления обобщенное уравнение для одиночной скважины, следующее из уравнения (1), имеет вид:

$$q(t_n) = q(t_0) \left(e^{-\left(\frac{t_n - t_0}{\tau}\right)} \right) + \left\{ e^{-\left(\frac{t_n - t_0}{\tau}\right)} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_k}{\tau}} \right) \left[-J \tau \frac{\Delta p_{wf}^{(k)}}{\Delta t_k} \right] \right\}. \quad (4)$$

Физические допущения, заложенные в уравнение (1): пласт считается однородным в области дренирования скважины, жидкость слабосжимаема, фильтрация подчиняется линейному закону Дарси, изменение забойного давления происходит ступенчато на каждом временном шаге. Модель не учитывает гравитационные и капиллярные эффекты.

Рассмотрим три фактора неопределенности: масштабный эффект, строение пласта и объем области дренирования. Все эти факторы связаны между собой тем, что строение пласта влияет на конфигурацию и объем зоны дренирования и проявляет себя на масштабе, характерном для понятия «фация». Напомним, что существует несколько уровней организации осадочных отложений [Бегма, Белкина, 2017], среди которых к настоящей работе имеют отношение два соседних уровня — порода и фация. Порода релевантна масштабу образцов керна, фация — масштабу расстояний между скважинами или в рассматриваемом случае — размеру залежи. Будем считать, что ФЕС породы устанавливаются путем исследований керна, а ФЕС фации могут быть получены путем математического моделирования исходя из понимания того, каким образом устроена фация и из каких типов пород она состоит. Специфика подобных исследований приведена в работах [Jonoud, Jackson, 2008; Степанов и др., 2024].

Будем рассматривать четыре варианта строения пласта. Вариант А предполагает однородное строение пласта, варианты Б, В, Г — неоднородное (рис. 1). Во всех четырех вариантах в окрестности скважины величина пористости равна 0,18 д.е. Считаем, что в этих вариантах имеет место одна фация, состоящая из двух литотипов породы, распределенных в ней случайным образом, при этом первый литотип встречается в 9 раз чаще, чем второй.

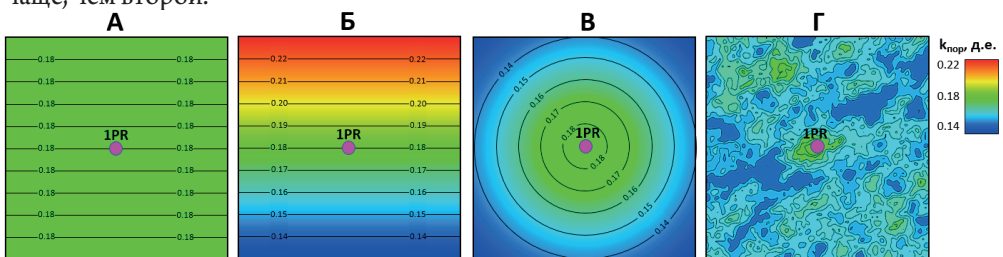


Рис. 1. Распределение пористости в вариантах строения пласта

Fig. 1. Distribution of porosity in reservoir structure variants

Для получения ФЕС фации и оценки масштабного эффекта использована гидродинамическая модель элемента фации размером $1200 \times 1200 \times 10$ м (объем 14,4 млн м^3) с размером ячейки $5 \times 5 \times 5$ см (масштаб керна). С целью наглядного представления взаимного распространения двух литотипов показан фрагмент фации размером 1×1 м

на рис. 2. Для получения зависимости между пористостью и проницаемостью фации рассматривались различные варианты свойств литотипов, получаемых по петрофизическим зависимостям, обоснованным по результатам исследований реальных образцов керна. Такие варианты формировались по статистическим данным, полученным по этим же исследованиям керна.

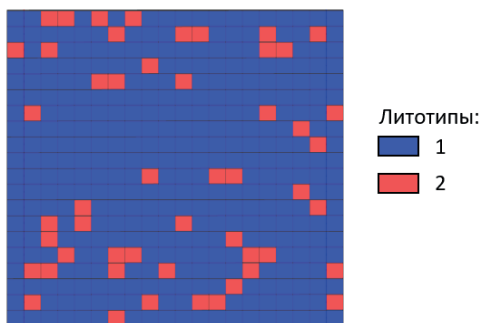


Рис. 2. Фрагмент фации размером 1×1 м с двумя литотипами

Fig. 2. Facies fragment 1×1 m with two lithotypes

На рис. 3 показаны исходные лабораторные данные по исследованиям реальных образцов керна, соответствующие им зависимости для литотипов и результирующая зависимость для фации, которая установлена по представительным данным, исходя из анализа зависимости ФЕС от физического объема области исследований (фрагмента фации). На рис. 4 даны такие зависимости для проницаемости и пористости. Необходимо отметить, что REV для пористости оказался меньше, чем REV для проницаемости. Отсюда можно сделать вывод, что при определении ФЕС использование объема, достаточного для REV пористости, может привести к некорректной оценке проницаемости.

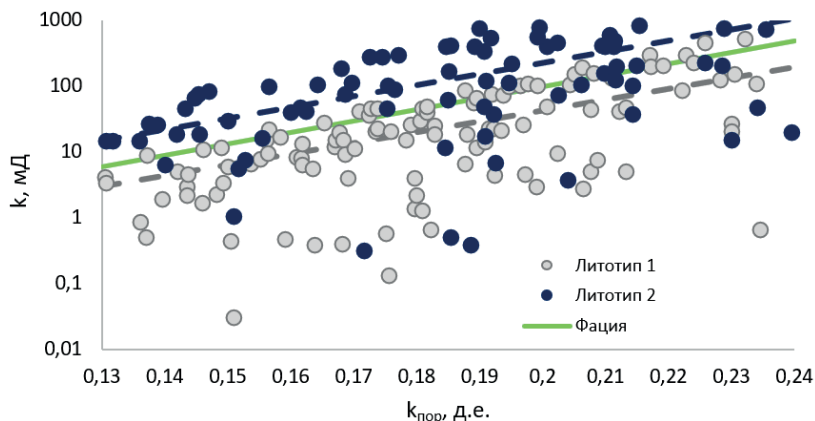


Рис. 3. Зависимости проницаемости от пористости для одной фации с двумя литотипами

Fig. 3. Dependence of permeability and porosity for one facies with two lithotypes

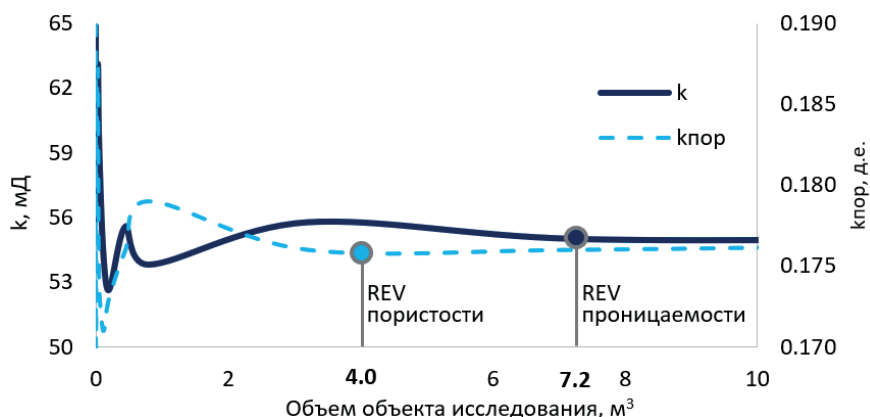


Рис. 4. Зависимость проницаемости и пористости от объема фрагмента фации

Fig. 4. Dependence of permeability and porosity on the volume of a facies fragment

Исследование неопределенностей ФЕС в рамках данной работы выполним по следующему алгоритму.

В период идентификации (первые шесть месяцев) расчеты проводятся с постоянным забойным давлением ($P_{заб}$), это позволяет оценить диапазон возможных решений CRM для описания динамики добычи жидкости ГДМ для четырех вариантов строения пласта. В качестве основных переменных выступают параметры J и V_p , описывающие τ . Вариация J ограничена диапазоном неопределенности k между петрофизическими зависимостями двух литотипов, V_p в свою очередь, прямо пропорционально зависит от пористости. В данном случае будет определено такое значение τ , при котором наблюдается максимальная сходимость с ГДМ, при этом получить одинаковую величину τ можно путем множества комбинаций значений J и V_p (2). Отсюда возникает вопрос. Как из множества решений выбрать то, которое отвечает действительности? Поэтому в период проверки (с седьмого месяца) учитывается нестационарность $P_{заб}$. Это позволяет сузить диапазон неопределенности в расчетах CRM и определить интерпретированные значения J и V_p . Последовательность шагов, следующая:

1. На основе калибровки CRM определяются значения τ и соответствующий ей диапазон J , позволяющие описать с большей точностью ГДМ с вариантами строения пласта А, Б, В, Г.
2. Из выборки множеств значений произведения $J\tau$ выбирается то, с помощью которого достигается максимальная сходимость с ГДМ в период проверки, тем самым подбирается интерпретированное значение коэффициента продуктивности $J_{инт}$.
3. Определяется значение проницаемости ($k_{инт}$) по формуле Дюпюи для $J_{инт}$.
4. С помощью уравнения (2) вычисляется V_p для $J_{инт}$. Зная объем рассматриваемой области моделирования (V) и V_p , интерпретированное среднее значение пористости ($k_{пор. инт.}$) рассчитывается из отношения V_p/V .

Описанный алгоритм позволит определить значения ФЕС с помощью CRM, сопоставить их с ГДМ и оценить точность интерпретируемых данных.

Результаты и обсуждение

Проведенные вычислительные эксперименты позволили последовательно оценить влияния геологических неопределенностей на интерпретацию ФЕС и расчетную добычу.

Подготовительная часть эксперимента была направлена на калибровку CRM на историческом периоде работы (шесть месяцев) скважины 1PR в условиях постоянного забойного давления. По результатам расчетов ГДМ с четырьмя вариантами строения пласта было сформировано множество реализаций CRM с вариацией величины τ для определения возможных решений с наибольшей сходимостью динамики дебитов жидкости.

Все четыре расчета ГДМ были описаны с помощью CRM с достаточной точностью, определены τ , с помощью которых это достигается. При этом при постоянном $P_{\text{заб}}$ отсутствует возможность достоверно интерпретировать составляющие временной константы из уравнения (2). Ключевым наблюдением является постоянство τ при множестве математически возможных вариаций J и V_p с учетом заданных диапазонов неопределенности.

Последующая часть исследования заключалась в преодолении неоднозначности калибровки и определении интерпретированных значений J и V_p для каждого варианта строения пласта. Для этого на прогнозном интервале было задано изменение $P_{\text{заб}}$. С использованием ранее описанного алгоритма были определены такие значения $J_{\text{инт}}$ и V_p , при которых расчетный отклик CRM наилучшим образом соответствует результатам ГДМ (рис. 5).

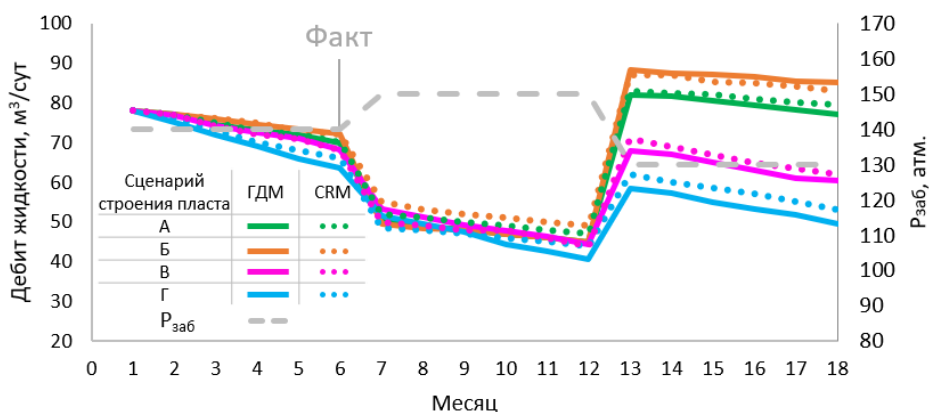


Рис. 5. Динамика дебитов ГДМ с изменяющимся $P_{\text{заб}}$ в прогнозном периоде, сопоставление с CRM

Fig. 5. Dynamics of flow rates of hydrodynamic model with changing bottomhole pressure in the forecast period, comparison with CRM

Учет изменения $P_{заб}$ позволил существенно сузить диапазоны неопределенности. Итоговые точечные оценки параметров для всех четырех вариантов приведены в табл. 1. Расчеты CRM достаточной степени коррелируют с данными ГДМ. Как видно, тенденция в уменьшении погрешности соответствует ранжированию моделей Г, Б, В, А, что согласуется с уровнем их сложности. Действительно, очевидно, что модель Г имеет самое сложное строение, модель А — самое простое.

Таблица 1. Результаты расчетов CRM на прогноз при изменяющемся $P_{заб}$ для четырех вариантов строения пласта
Table 1. Results of CRM calculations for forecasting with changing bottomhole pressure for four reservoir structure options

Параметр	CRM				ГДМ			
	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г
τ , сут	18	17	23	30	–	–	–	–
$J_{инт.}$ ($м^3/сут$)/атм	1,90	2,20	1,30	0,90	1,83	2,11	1,25	0,82
$k_{инт.}$ мД	58	67	40	27	56	64	38	25
Погрешность $k_{инт}$ относ. ГДМ, %	4,0	4,5	4,1	9,4	–	–	–	–
V_p , млн $м^3$	2,6	2,9	2,3	2,1	2,5	2,8	2,2	1,9
$k_{пор. инт.}$ д.е.	0,182	0,199	0,159	0,145	0,175	0,191	0,153	0,132
Погрешность $k_{пор. инт}$ относ. ГДМ, %	4,0	4,5	4,1	9,4	–	–	–	–

Примечание: $k_{инт}$ — проницаемость, интерпретированная по коэффициенту продуктивности, $J_{инт}$ — через формулу Дюпюи; $k_{пор. инт.}$ — пористость, вычисленная как V_p/V , где V — объем моделируемой области. Значения ГДМ получены прямым осреднением по ячейкам модели.

Для оценки устойчивости сходимости расчетов CRM с ГДМ при разных динамиках $P_{заб}$ дополнительно был проведен ряд вычислительных экспериментов на варианте строения пласта Г, так как для описания динамики добычи он является наиболее сложным вследствие непредсказуемости его строения. Как можно увидеть на рис. 6, CRM с достаточной точностью описывает ГДМ, но более чувствительно реагирует на изменения $P_{заб}$ — это проявляется в более резком изменении дебита при одинаковых колебаниях забойного давления по сравнению с ГДМ, что связано с более высоким интерпретированным коэффициентом продуктивности $J_{инт.}$

На рис. 7 приведена линия зависимости проницаемости от пористости, соответствующая фации (та же, что и на рис. 3), и точки пористость–проницаемость, определенные путем интерпретации параметров модели CRM для рассмотренных вариантов строения пласта, также нанесены на график. Как видно, все эти точки, кроме той, что соответствует самому простому варианту А, лежат вне этой линии. Причиной расхождения параметров является физическое допущение CRM-модели об однородности пласта в области дренирования.

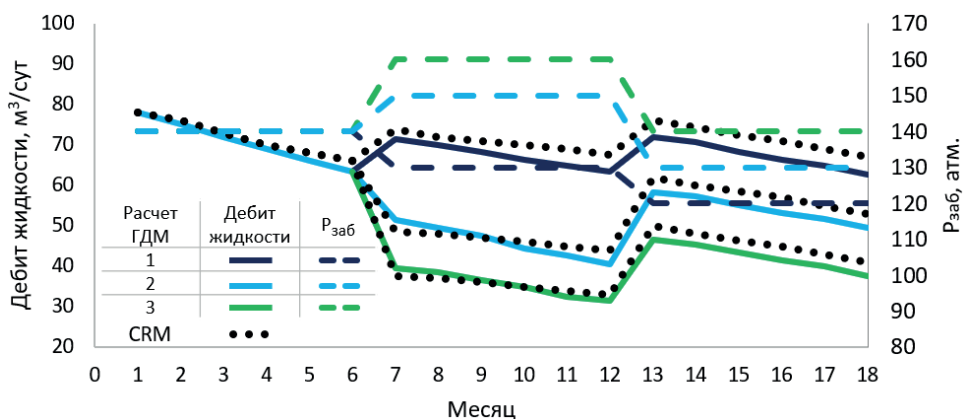


Рис. 6. Результаты расчетов CRM и ГДМ при различных динамиках $P_{заб}$ для варианта строения пласта Г

Fig. 6. Results of CRM and hydrodynamic model calculations for different bottomhole pressure dynamics for reservoir structure variant Г

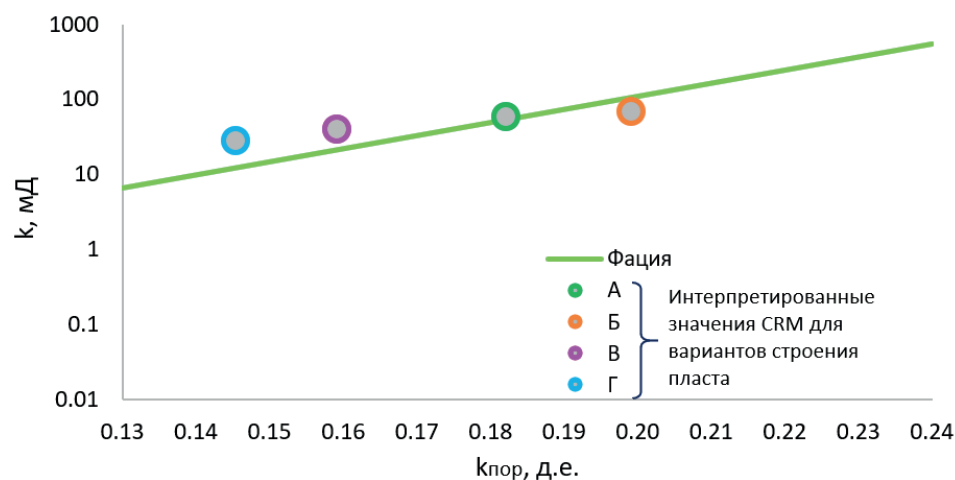


Рис. 7. Зависимости проницаемости от пористости для одной фации с двумя литотипами с нанесенными интерпретированными $k_{пор}$, $k_{инт}$

Fig. 7. Dependence of permeability and porosity for one facies with two lithotypes with plotted interpreted porosity and permeability values

В неоднородных средах CRM дает эффективные (эквивалентные) значения проницаемости и пористости, которые уже содержат поправку на неоднородность. Чем выше степень неоднородности, тем сильнее отличие интерпретированных значений от фактических. Кроме того, такая особенность может быть объяснена тем, что параметры модели, отражающие свойства пласта, связаны не только с их физическими значениями, но и со спецификой используемой модели. Другими словами, в модели

CRM средние значения пористости и проницаемости, характеризующие зону дренирования, это не только следствие того, как устроен пласт в этой зоне, но и следствие того, насколько проявляются особенности модели. Данное обстоятельство аналогично проявлению численных эффектов при воспроизведении на грубой ГДМ «фактических» промысловых данных, полученных на детальной синтетической ГДМ. То есть необходимость модификации параметров грубой ГДМ обусловлено не тем, что существует неопределенность в строении пласта и в достоверности промысловых данных, как это имеет место при моделировании реальных объектов, а обусловлено исключительно численными эффектами и ремасштабированием параметров модели.

Относительные погрешности, приведенные в табл. 1, рассчитаны как

$$\frac{x_{CRM} - x_{ГДМ}}{x_{ГДМ}} \times 100\%. \quad (5)$$

Совпадение погрешностей для проницаемости и пористости обусловлено прямой связью через объем и формулу Дюпюи в рамках принятых допущений. Данные табл. 1 и рис. 7 соотносятся следующим образом: точки на рис. 7 соответствуют интерпретированным значениям ($k_{\text{пор. инт.}}$, $k_{\text{инт.}}$) из таблицы, а линия — тренду по фации (см. рис. 3). Расхождения, особенно для варианта Г, объясняются эффектом неоднородности, как обсуждалось выше.

Заключение

В результате проведенных исследований установлено, что интерпретированные на основе адаптированной емкостно-резистивной модели CRM значения ФЕС — пористости и проницаемости — отличаются от пористости и проницаемости, задаваемых зависимостью для этих свойств, учитывающей масштабный эффект. При этом уровень отличия между интерпретированными и истинными значениями свойств увеличивается с повышением сложности строения пласта. Таким образом, при построении модели недостаточно использовать только корректные петрофизические зависимости — необходимо учитывать специфику CRM-модели, а именно ее допущение об однородности пласта в области дренирования. Для повышения достоверности интерпретации рекомендуется:

- в неоднородных пластах интерпретировать значения пористости и проницаемости как эффективные (эквивалентные), явно указывая степень неоднородности;
- при калибровке CRM на исторические данные использовать разделение на интервал идентификации (постоянное забойное давление) и интервал проверки (переменное давление) для сужения неопределенности;
- сопоставлять полученные пары ($k_{\text{пор. инт.}}$, $k_{\text{инт.}}$) не с лабораторными трендами, а с эффективными свойствами, рассчитанными на масштабе фации.

Список источников

- Алтунин А. Е., Семухин М. В., Степанов С. В. 2012. Использование материального баланса и теории нечетких множеств для решения задачи разделения добычи при одновременной разработке нескольких пластов // Нефтяное хозяйство. № 5. С. 56–60.
- Афанаскин И. В., Крыганов П. В., Глушаков А. А., Ялов П. В. 2020. Использование CRM-моделей интерференции скважин для оценки фильтрационно-емкостных свойств пласта по данным разработки // Успехи кибернетики. Том 1. № 1. С. 16–25. <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-1-3>
- Бегма Д. С., Белкина В. А. 2017. Литолого-фациальные особенности строения верхнеюрских отложений месторождения Т // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг ресурсов. Том 328. № 1. С. 109–122.
- Дейк Л. П. 2012. Основы разработки нефтяных и газовых месторождений / пер. с англ.: Фалалеев Б. А. под ред. Симкина Э. М. М.: Премиум Инжиниринг. 549 с.
- Жетруов Ж.Т., Шаяхмет К.Н., Карсыбаев К.К. и др. 2022. Применение прокси-моделей при прогнозировании параметров разработки нефтяных залежей // Вестник нефтегазовой отрасли Казахстана. Том 4. № 2. С. 47–56. <https://doi.org/10.54859/kjogi108021>
- Жуков В. С., Моторыгин В. В. 2019. Влияние межзерновой пористости и трещинной пористости на проницаемость // Вести газовой науки. № 1 (38). С. 82–88.
- Михайлов Н. Н., Полищук В. И. 2014. Исследование статистических закономерностей проявления масштабных эффектов в сложнопостроенных карбонатных коллекторах // Георесурсы, геоэнергетика, геополитика. № 1(9). С. 11.
- Мищенко И. Т., Бравичева Т. Б., Пятибратов П. В. 2004. Оценка добычных возможностей скважин низкопроницаемых коллекторов. Бурение и нефть. № 11. С. 18–19.
- Поплыгин В. В., Соколов А. А. 2020. Оценка охвата пласта системой разработки с помощью радиуса дренирования скважин // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг ресурсов. Том 331. № 4. С. 215–220. <https://doi.org/10.18799/24131830/2020/4/2609>
- Поспелова Т. А. 2021. Интеграция возможностей CRM и стохастико-аналитической моделей при решении задач заводнения // Экспозиция Нефть Газ. 2021. № 2. С. 48–52. <https://doi.org/10.24412/2076-6785-2021-2-48-52>
- Пятибратов П. В. 2015. Гидродинамическое моделирование разработки нефтяных месторождений. М.: Издательский центр РГУ нефти и газа имени И. М. Губкина. 167 с.
- Степанов С. В., Бекман А. Д., Ручкин А. А., Поспелова Т. А. 2021. Сопровождение разработки нефтяных месторождений с использованием моделей CRM. Тюмень: ИПЦ «Экспресс». 300 с. <https://doi.org/10.54744/tnsc.2021.53.50.001>
- Степанов С. В., Лопатина Е. С., Загоровский М. А., Зубарева И. А. 2024. Многомасштабное моделирование добычи высоковязкой нефти при закачке воды и раствора полимера // Автоматизация и информатизация ТЭК. № 7(612). С. 51–60.
- Хасанов Д. И., Лоншаков М. А. 2020. Исследование масштабного эффекта и понятия элементарного представительного объема горных пород применительно к пористости // Георесурсы. № 4. С. 55–69. <https://doi.org/10.18599/grs.2020.4.55-69>
- Шевцов Н. О., Степанов С. В., Поспелова Т. А. 2020. Исследование прогностической способности численной и аналитической моделей на примере оценки взаимовлияния

- скважин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 6. No. 3(23). С. 131–142. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2020-6-3-131-142>
- Aziz K. 1993. Reservoir simulation grids: Opportunities and problems // *Journal of Petroleum Technology*. Vol. 45. No. 7. Pp. 658–663. <https://doi.org/10.2118/25233-pa>
- de Holanda R. W., Gildin E., Jensen J. L., Lake L. W., Kabir C. S. 2018. A state-of-the-art literature review on capacitance-resistance models for reservoir characterization and performance forecasting // *Energies*. Vol. 11. No. 12. Article 3368. <https://doi.org/10.3390/en1123368>
- Ertekin T., Abou-Kassem J. H., King G. R. 2001. Basic Applied Reservoir Simulation. Society of Petroleum Engineers. 406 pp. <https://doi.org/10.2118/9781555630898>
- Ertekin T., Sun Q., Zhang J. 2019. Reservoir Simulation: Problems and Solutions. Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2118/9781613996935>
- Jonoud S., Jackson M. D. 2008. Validity of steady-state upscaling techniques // *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*. Vol. 11(02). Pp. 405–416. <https://doi.org/10.2118/100293-pa>
- Liang X., Weber D. B., Edgar T. F. et al. 2007. Optimization of oil production based on a capacitance model of production and injection rates // *Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium* (April, Dallas, TX, USA). Paper SPE-107713-MS. Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2118/107713-ms>
- Mirzayev M., Riazi N., Cronkwright D., Jensen J. L., Pedersen P. K. 2017. Determining well-to-well connectivity using a modified capacitance model, seismic, and geology for a Bakken Waterflood // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. Vol. 152. Pp. 611–627. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.01.032>
- Renard Ph., de Marsily G. 1997. Calculating equivalent permeability: A review // *Advances in Water Resources*. Vol. 20(5-6). Pp. 253–278. [https://doi.org/10.1016/s0309-1708\(96\)00050-4](https://doi.org/10.1016/s0309-1708(96)00050-4)
- Sayarpour M., Zuluaga E., Kabir C. S., Lake L. W. 2009. The use of capacitance-resistance models for rapid estimation of waterflood performance and optimization // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. Vol. 69. No. 3-4. Pp. 227–238. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.09.006>
- Sudaryanto B., Yortsos Y. C. 2001. Optimization of displacements in porous media using rate control // *SPE Annual Technical Conference and Exhibition* (September, New Orleans, LA, USA). Paper SPE-71509-MS. Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2523/71509-ms>

References

- Altunin, A. E., Semukhin, M. V., & Stepanov, S. V. (2012). Use of material balance and fuzzy set theory to solve the problem of production separation while developing several layers. *Oil Industry*, (5), 56–60. [In Russian]
- Afanaskin, I. V., Kryganov, P. V., Glushakov, A. A., & Yalov, P.V. (2020). CRM well interference models for evaluating reservoir filtration and volumetric properties from production data. *Russian Journal of Cybernetics*, 1(1), 16–25. <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-1-3> [In Russian]

- Begma, D. S., & Belkina, V. A. (2017). Litological and facies characteristics of Upper Jurassic sediments of the t field. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 328(1), 109–122. [In Russian]
- Dake, L. P. (2012). *Fundamentals of Reservoir Engineering* (Translated from English by B. L. Falaleev & edited by E. M. Simkin). Premium Engineering. [In Russian]
- Zhetruov, Z. T., Shayakhmet, K. N., Karsybayev, K. K. et al. (2022). Application of proxy models for oil reservoirs performance prediction. *Kazakhstan Journal for Oil & Gas Industry*, 4(2), 47–56. <https://doi.org/10.54859/kjogi108021> [In Russian]
- Zhukov, V. S., & Motorygin, V. V. (2019). Impact of intergranular porosity and cracking cavitation to permeability. *Gas Science Bulletin*, (1), 82–88. [In Russian]
- Mikhailov, N. N., & Polishchuk, V. I. (2014). Study of the statistical regularities of manifestation of scale effects in implex carbonate reservoirs. *Georesources, Geoenergetics, Geopolitics*, (1), 11. [In Russian]
- Mishchenko, I. T., Bravicheva, T. B., & Pyatibratov, P. V. (2004). Evaluation of the production potential of low-permeability reservoirs. *Drilling and Oil*, (11), 18–19. [In Russian]
- Poplygin, V. V., & Sokolov, A. A. (2020). Estimation of a reservoir coverage by the development system using the draining well radius. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 331(4), 215–220. <https://doi.org/10.18799/24131830/2020/4/2609> [In Russian]
- Pospelova, T. A. (2021). Integration of CRM capabilities and stochastic-analytical models in solving waterflooding problems. *Exposition Oil Gas*, (2), 48–52. <https://doi.org/10.24412/2076-6785-2021-2-48-52> [In Russian]
- Pyatibratov, P. V. (2015). *Petroleum Reservoir Simulation*. National University of Oil and Gas “Gubkin University”. [In Russian]
- Stepanov, S. V., Bekman, A. D., Ruchkin, A. A., & Pospelova T. A. (2021). *Support for the Development of oil Fields Using CRM Models*. Express. <https://doi.org/10.54744/tncs.2021.53.50.001> [In Russian]
- Stepanov, S. V., Lopatina, E. S., Zagorovskiy, M. A., & Zubareva, I. A. (2024). Multi-scale modeling of high viscous oil production when injecting water and polymer solution. *Automation and Informatization of the Fuel and Energy Complex*, (7), 51–60. [In Russian]
- Khasanov, D. I., & Lonshakov, M. A. 2020. Investigation of the scale effect and the concept of a representative volume element of rocks in relation to porosity. *Georesources*, (4), 55–69. <https://doi.org/10.18599/grs.2020.4.55-69> [In Russian]
- Shevtsov, N. O., Stepanov, S. V., & Pospelova, T. A. (2020). The study of the predictive ability of numerical and analytical models (the case of mutual well impact evaluation). *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 6(3), 131–142. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2020-6-3-131-142> [In Russian]
- Aziz, K. (1993). Reservoir simulation grids: Opportunities and problems. *Journal of Petroleum Technology*, 45(7), 658–663. <https://doi.org/10.2118/25233-pa>
- de Holanda, R. W., Gildin, E., Jensen, J. L., Lake, L. W., & Kabir, C. S. (2018). A state-of-the-art literature review on capacitance-resistance models for reservoir characterization and performance forecasting. *Energies*, 11(12), 3368. <https://doi.org/10.3390/en1123368>

- Ertekin, T., Abou-Kassem, J. H., & King, G. R. (2001). Basic Applied Reservoir Simulation. Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2118/9781555630898>
- Ertekin, T., Sun, Q., & Zhang, J. (2019). *Reservoir Simulation: Problems and Solutions*. Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2118/9781613996935>
- Jonoud, S., & Jackson, M. D. (2008). Validity of steady-state upscaling techniques. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 11(02), 405–416. <https://doi.org/10.2118/100293-pa>
- Liang, X., Weber, D. B., Edgar, T. F. et al. (2007). Optimization of oil production based on a capacitance model of production and injection rates. In *Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium* (April, Dallas, TX, USA). Paper SPE-107713-MS. Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2118/107713-ms>
- Mirzayev, M., Riazi, N., Cronkright, D., Jensen, J. L., & Pedersen, P. K. (2017). Determining well-to-well connectivity using a modified capacitance model, seismic, and geology for a Bakken Waterflood. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 152, 611–627. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.01.032>
- Renard, Ph., & de Marsily, G. (1997). Calculating equivalent permeability: A review. *Advances in Water Resources*, 20(5-6), 253–278. [https://doi.org/10.1016/s0309-1708\(96\)00050-4](https://doi.org/10.1016/s0309-1708(96)00050-4)
- Sayarpour, M., Zuluaga, E., Kabir, C. S., & Lake, L. W. (2009). The use of capacitance-resistance models for rapid estimation of waterflood performance and optimization. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 69(3-4), 227–238. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.09.006>
- Sudaryanto, B., & Yortsos, Y. C. (2001). Optimization of displacements in porous media using rate control. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition* (September, New Orleans, LA, USA). Paper SPE-71509-MS. Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2523/71509-ms>

Информация об авторах

Никита Сергеевич Буланов, аспирант, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия
nek103@mail.ru

Сергей Викторович Степанов, доктор технических наук, старший эксперт Отдела выполнения и внедрения работ по СНТ/ОПИ, Управление научно-технического развития, ООО «РН – Геология Исследования Разработка», Тюмень, Россия
SVStepanov@rn-gir.rosneft.ru

Information about the authors

Nikita S. Bulanov, Postgraduate Student, University of Tyumen, Tyumen, Russia
nek103@mail.ru

Sergey V. Stepanov, Dr. Sci. (Tech.), Senior Expert of the Division of New Technology Systems & Pilot Testing Implementation, Department of Scientific and Technological Development, LLC “RN – Geology Research Development”, Tyumen, Russia
SVStepanov@rn-gir.rosneft.ru

Метод оперативного подбора скважин-кандидатов на перевод под нагнетание на основе модели материального баланса CRMP

Александр Дмитриевич Бекман 

ООО «РН – Геология Исследования Разработка», Тюмень, Россия
Контакт для переписки: adbekman@rn-gir.rosneft.ru 

Аннотация. Выбор скважин-кандидатов для перевода под нагнетание, а также выбор подходящего момента для перевода конкретной скважины являются актуальными задачами анализа состояния разработки месторождений нефти и газа. Решение подобных задач с помощью традиционно используемых 3D гидродинамических моделей (ГДМ) не представляет теоретической сложности, однако на практике может потребовать неприемлемо долгих расчетов. Для оперативного решения многих задач анализа состояния разработки в настоящее время применяются разного рода прокси-модели, но методы их использования для вышеупомянутой задачи в достаточной мере не проработаны. В частности, сложность применения таких моделей для выбора скважин-кандидатов для перевода под нагнетание связана с отсутствием оценок для коэффициентов взаимовлияния новой нагнетательной скважины с добывающими и, как следствие, невозможностью оценки прогнозных дебитов нефти. В настоящей статье предложен метод оценки таких коэффициентов, позволяющий рассчитывать прогноз дебитов нефти с помощью известной емкостно-резистивной модели (CRMP). Приведены результаты численных экспериментов по оценке эффективности нового метода путем сопоставления прогнозов по дебитам нефти, полученных с помощью синтетической ГДМ и CRMP.

Ключевые слова: CRM, Capacitance Resistance Model, взаимовлияние скважин, перевод в ППА, материальный баланс

Цитирование: Бекман А. Д. 2026. Метод оперативного подбора скважин-кандидатов на перевод под нагнетание на основе модели материального баланса CRMP // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-мате-

матическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 12. № 2 (46). С. 171–187.
<https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-171-187>

Поступила 16.03.2026; одобрена 30.04.2026; принята 04.05.2026

Method for rapid selection of candidate wells for conversion to injection based on the CRMP material balance model

Alexander D. Bekman 

LLC “RN – Geology Research Development”, Tyumen, Russia
Corresponding author: adbekman@tnnc.rosneft.ru 

Abstract. Selecting candidate wells for conversion to injection, as well as choosing the appropriate moment for conversion of a specific well, are pressing issues in oil and gas field development analysis. Solving such problems using traditional 3D reservoir simulation models (RSM) is not theoretically difficult; however, in practice, it can require unacceptably long calculation times. Various proxy models are currently used to quickly solve many development analysis problems; though, the methods for their use for this purpose have not been sufficiently developed. Specifically, the difficulty of using such models to select candidate wells for conversion to injection is due to the lack of estimates for the coefficients of interaction between a new injection well and producing wells, which makes it impossible to estimate predicted oil flow rates. This article proposes a method for estimating such coefficients, enabling the calculation of a forecasted oil flow rate using the well-known capacitance-resistance model (CRMP). The results of numerical experiments to evaluate the effectiveness of the new method on a synthetic RSM are presented.

Keywords: CRM, Capacitance Resistance Model, well interference, conversion wells to injection, material balance

Citation: Bekman, A. D. (2026). Method for rapid selection of candidate wells for conversion to injection based on the CRMP material balance model. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 12(2), 171–187. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2026-12-2-171-187>

Received Mar. 16, 2026; Reviewed Apr. 30, 2026; Accepted May 4, 2026

Введение

Система поддержания пластового давления является одним из важнейших факторов, обеспечивающих эффективность эксплуатации нефтяного месторождения, особенно на поздних стадиях разработки. По мере выработки запасов эксплуатируемого объекта регулярно возникает задача выбора, какие скважины следует перевести под нагнетание, чтобы компенсировать текущие отборы жидкости. Естественными критериями для такого выбора можно считать прогнозные оценки компенсации по скважинам и средних пластовых давлений (по элементам заводнения или по зонам дренирования отдельных скважин), а также оценки добычи нефти за некоторый прогнозный период. Вычисление таких оценок возможно, например, с помощью 3D гидродинамических моделей (ГДМ), однако такой подход потребует отдельного расчета для каждого кандидата (а в случае если рассматриваются различные даты перевода, то нескольких расчетов). При большом фонде скважин это может приводить к существенным временным затратам [Степанов и др., 2018]. В связи с этим представляется разумным подход, при котором вышеупомянутые оценки получаются с помощью более простых и менее точных, но быстрых математических моделей (прокси-моделей [Bahrami et al., 2022]), которые позволяют уменьшить число потенциальных кандидатов, а затем уточнить оценки для оставшихся кандидатов посредством ГДМ. Однако использование существующих на настоящий момент прокси-моделей при практической реализации данного подхода связано с известной проблемой: обучаясь (настраиваясь) на фактически наблюдаемых данных, прокси-модели способны численно оценить и/или имитировать взаимовлияние имеющихся на текущий момент пар нагнетательных и добывающих скважин, но предсказать взаимовлияние скважин после перевода одной из них в фонд поддержки пластового давления (ППД), т. е. в режим нагнетания, они не могут. Отсутствие в моделях такой информации делает невозможными любые прогнозы относительно эффективности мероприятий по переводу в ППД. Тем не менее как будет показано ниже, для емкостно-резистивной модели CRMP, при выполнении определенных предположений, возможно получить обоснованные оценки коэффициентов взаимовлияния на прогноз и реализовать вышеупомянутый подход оперативного подбора скважин для перевода в ППД.

Основная информация о модели CRMP

Модель CRMP, как и все модели семейства емкостно-резистивных моделей (Capacitance Resistance Model, CRM), основывается на уравнении материального баланса и формуле притока жидкости к скважине. Из этих соотношений, дополненных рядом предположений, выводится основная формула данной модели, представляющая собой функциональную зависимость дебита жидкости добывающей скважины от приемистостей нагнетательных скважин и забойного давления:

$$q_j(t_n) = q_j(t_0)e^{-\frac{(t_n-t_0)}{\tau_j}} + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^{NI} f_{ij} I_{i,k} - J_j \tau_j \frac{\Delta p_{j,k}}{\Delta t_k} \right) e^{-\frac{(t_n-t_k)}{\tau_j}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_k}{\tau_j}} \right), \quad (1)$$

где j — номер добывающей скважины; t_n — n -й шаг рассматриваемого интервала разработки. Величины $q_j(t_0)$ — дебит жидкости скважины в начальный момент времени, $I_{i,k}$ — приемистость i -й нагнетательной скважины на k -м временном шаге и $\Delta p_{j,k}$ — изменение забойного давления в j -й добывающей скважине за период времени Δt_k предполагаются известными. Параметры модели: $\tau_j = \left(\frac{c_t V_p}{J}\right)_j$ — константа времени (она может интерпретироваться как величина, обратная коэффициенту падения дебита жидкости на истощении), J_j — коэффициент продуктивности и f_{ij} — коэффициенты влияния между i -й нагнетательной скважиной и j -й добывающей, являются неизвестными. Для определения значений неизвестных параметров модели на практике решают оптимизационную задачу с целевой функцией вида:

$$F = \sum_{j=1}^{NP} \sum_{t=1}^{NT} (q_j(t) - \tilde{q}_j(t))^2 \quad (2)$$

и рядом ограничений в виде неравенств. Величины $\tilde{q}_j(t)$ в (2) — фактические значения дебита жидкости j -й скважины на интервале настройки модели. Подробности вывода соотношения (1) и постановки оптимизационной задачи можно найти в [Sayarpour, 2008; Sayarpour et al., 2009], описание эффективного численного метода для решения этой задачи изложено в [Бекман и др., 2019]. Методы моделирования обводненности, позволяющие наряду с прогнозами дебитов жидкости получать с помощью CRMP и дебиты нефти, приведены в [Gentil, 2005; Бекман и др., 2020; Сао, 2014]. Настроенные таким образом согласованные модель CRMP и модель обводненности позволяют решить широкий спектр задач геолого-промыслового анализа [Степанов и др., 2021; Поспелова и др., 2020; Афанаскин и др., 2020; Данько и др., 2019; Афанаскин и др., 2023; Шевцов, 2023].

Следует отметить, что среди прокси-моделей CRMP является удачным компромиссом, сочетая в себе физическую содержательность с низкими вычислительными затратами на адаптацию (настройку) [Зеленин и др., 2019]. Кроме того, к ее достоинствам можно отнести то, что для адаптации модели требуются только достоверно известные, непосредственно измеряемые данные: расходы скважин и забойные давления. Благодаря этому, в отличие от ГДМ, точность ее прогнозов не зависит от корректности заложенных в геологическую модель гипотез об особенностях геологического строения моделируемого объекта и точности оценок фильтрационно-емкостных свойств пород [Шевцов и др., 2020]. Более того, анализ результатов CRMP-моделирования помогает формулировать и обосновывать гипотезы о строении объекта и свойствах слагающих его пород, см. [de Holanda et al., 2018; Шевцов, Степанов, 2024]. При этом недостатком CRMP можно считать довольно жесткие предположения, используемые при выводе ее формул, ограничивающие ее применение. Так, например, точность прогнозов снижается, если на интервале настройки модели проводились геолого-технические мероприятия или в пластовых условиях в окрестности добывающих скважин присутствует газ как отдельная фаза. В этих случаях требуется применение модифицированных моделей CRMP [Бекман, 2022; Бекман, 2025; Степанов и др., 2013; Афанаскин и др., 2023; Бекман, Ручкин, 2024].

Использование модели CRMP для подбора скважин-кандидатов для перевода в ППД

Рассмотрим алгоритм подбора кандидатов с помощью CRMP. О методах решения возникающих в ходе его выполнения задач будет сказано ниже.

Алгоритм 1

1. Адаптировать модель CRMP. Как показывает опыт использования модели CRMP в «РН-ГИР», в качестве интервала адаптации обычно достаточно взять последние 2 года.
2. Адаптировать модель обводненности.
3. Выбрать период прогноза.
4. Задать предполагаемые средние приемистости для имеющихся нагнетательных скважин.
5. Для каждого потенциального кандидата на перевод в ППД:
 - a. Определить потенциально реагирующие добывающие скважины после перевода.
 - b. Определить коэффициенты взаимовлияния для интервала прогноза. Для этого необходимо решить:
 - i. Какие коэффициенты влияния будут для новых пар взаимовлияющих скважин?
 - ii. Как изменятся коэффициенты влияния, полученные на интервале адаптации CRM?
 - c. Для каждой возможной даты перевода подсчитать прогнозное значение накопленной нефти по всему участку, используя коэффициенты влияния (полученные в п. 5.b) и модель обводненности (полученные в п. 2).
6. Сформировать отчет о наиболее выгодных кандидатах (с датами переводов) с точки зрения значений, полученных в п. 5.с.

Решение всех задач, возникающих в процессе выполнения этого алгоритма, кроме задач из п. 5.a и 5.b, подробно описано в более ранних публикациях о CRM моделировании [Sayarpour, 2008; de Holanda et al., 2018; Yousef et al., 2006]. Задачу 5.a можно решить, опираясь на экспертно заданный радиус влияния скважин, характерный для данного эксплуатационного объекта (пласта), либо на триангуляцию, построенную по точкам расположения скважин. Задача 5.b.ii, при условии, что имеется решение для 5.b.i, имеет известное решение, см., например, [de Holanda et al., 2018; Gubanova et al., 2021; Лебедев и др., 2023]. Решение задачи 5.b.i рассмотрено в следующем разделе.

Метод определения коэффициентов влияния на прогнозный период для скважины, переведенной под нагнетание

Предположим, исследуется участок нефтяного месторождения с NP добывающими и NI нагнетательными скважинами, для него адаптирована модель CRMP, и требуется найти коэффициенты взаимовлияния для случая, когда скважина с номером x переведена

под нагнетание. Для простоты изложения все скважины предполагаются вертикальными. О модификации метода для наклонно-направленных и горизонтальных скважин будет отдельно сказано ниже.

Рассмотрим вспомогательную модель процессов фильтрации флюидов в моделируемом пласте. В рамках этой модели будем предполагать, что если согласно модели CRMP для некоторой пары скважин имеется ненулевой коэффициент влияния f_{ij} , то фильтрация флюидов между ними описывается формулой:

$$\overline{q}_{ij} = \frac{k_j}{\mu_j} A_{ij} \frac{\overline{\Delta P_{wf,ij}}}{R_{ij}}. \quad (3)$$

Другими словами, вводится аналогия с трубой длины R_{ij} и площадью A_{ij} , причем $\overline{q}_{ij}$ — расход, осредненный по времени на интервале адаптации модели, а $\overline{\Delta P_{wf,ij}}$ — средняя разность давлений на концах трубы, μ_j — динамическая вязкость добываемой смеси флюидов, k_j — проницаемость. С другой стороны, из модели CRMP следует:

$$\overline{q}_{ij} = f_{ij} \overline{I}_i \overline{q}_{ij} = f_{ij} \overline{I}_i, \quad (4)$$

где $\overline{I}_i$ — средняя приемистость i -й нагнетательной скважины. Для оценки величин A_{ij} предлагается для каждой (i -й) нагнетательной скважины использовать следующий алгоритм.

Алгоритм 2

1. Определим все добывающие скважины в пределах радиуса влияния рассматриваемой нагнетательной.
2. Упорядочим добывающие скважины по углу радиус-векторов к точкам их расположения, считая начало координат совпадающим с точкой расположения нагнетательной скважины.
3. Для всех соседних добывающих скважин проведем биссектрисы углов, образованных их радиус-векторами.
4. Для каждой добывающей скважины рассмотрим угол между соседними для нее биссектрисами. Обозначим этот угол через α_{ij} , где j — номер добывающей скважины (см. рис. 1).
5. Для каждой пары i -й нагнетательной и j -й добывающей скважин построим равнобедренный треугольник с углом α_{ij} и длиной боковой стороны $\frac{R_{ij}}{2}$, где R_{ij} — расстояние между этими скважинами. Легко найти, что длина стороны, противолежащей углу α_{ij} , равна $B_{ij} = R_{ij} \sin(\frac{\alpha_{ij}}{2})$. Зафиксируем некоторое значение $0 < \beta \leq 1$ и будем считать, что течение эквивалентно трубке тока с шириной $W_{ij} = \beta B_{ij} = \beta R_{ij} \sin(\frac{\alpha_{ij}}{2})$ и высотой, равной эффективной мощности в j -й скважине — h_j . Обозначим через A_{ij} площадь сечения трубки:

$$A_{ij} = \beta h_j R_{ij} \sin\left(\frac{\alpha_{ij}}{2}\right). \quad (5)$$

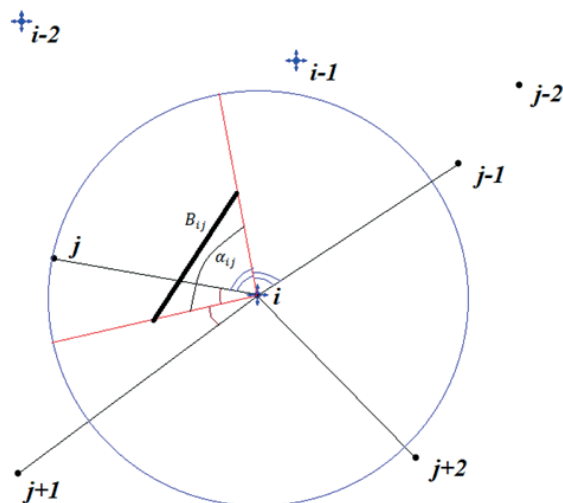


Рис. 1. Пример вычисления углов α_{ij}

Fig. 1 Example of angles α_{ij} calculation

Исходя из (3)–(5), получим соотношения:

$$f_{ij} \bar{l}_i = \frac{k_j}{\mu_j} \beta h_j R_{ij} \sin\left(\frac{\alpha_{ij}}{2}\right) \frac{\overline{\Delta P_{wf,ij}}}{R_{ij}}, \quad (6)$$

$$\frac{k_j h_j}{\mu_j} = \frac{f_{ij} \bar{l}_i}{\beta \overline{\Delta P_{wf,ij}} \sin\left(\frac{\alpha_{ij}}{2}\right)}. \quad (7)$$

Величина $\frac{k_j h_j}{\mu_j}$ характеризует геологические и геометрические свойства среды, а также динамическую вязкость смеси флюидов в окрестности j -й добывающей скважины. Обозначим через N_j число ненулевых коэффициентов f_j для фиксированного j и введем в рассмотрение величину:

$$K_j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_{ij}} \frac{2 f_{ij} \bar{l}_i}{\beta \overline{\Delta P_{wf,ij}} \sin\left(\frac{\alpha_{ij}}{2}\right)}. \quad (8)$$

При анализе прогнозных взаимовлияний для переведенной x -й скважины будем предполагать, что экспертно задана сумма коэффициентов:

$$S_x = \sum_k f_{xk}. \quad (9)$$

Величина S_x — доля целевой закачки, т. е. доля нагнетаемой воды, попадающая в исследуемый эксплуатационный объект (в связи с несовершенством конструкции скважины S_x может быть меньше 1). Из (7) получаем формулу для расчета этих коэффициентов взаимовлияния:

$$f_{xj} = \frac{\beta K_j \overline{\Delta P_{wf,xj}} \sin\left(\frac{\alpha_{xj}}{2}\right)}{\bar{I}_x} = \delta_{xj} S_x, \tag{10}$$

где

$$\delta_{xj} = \frac{f_{xj}}{S_x} = \frac{f_{xj}}{\sum_k f_{xk}} = \frac{K_j \overline{\Delta P_{wf,xj}} \sin\left(\frac{\alpha_{xj}}{2}\right)}{\sum_k K_j \overline{\Delta P_{wf,xk}} \sin\left(\frac{\alpha_{xk}}{2}\right)}. \tag{11}$$

Из формулы (11) следует, что для практической реализации рассматриваемого метода, помимо S_x , требуется экспертное задание по x -й скважине значения прогнозного забойного давления. Отметим, что формула (11) не зависит от выбора значения величины β .

Замечание. В случае если скважины не являются вертикальными, положение каждой из них определяется не одной точкой, а некоторым множеством точек, описывающим траекторию скважины. Для наклонно-направленных скважин в рамках алгоритма 2 можно использовать средние арифметические значения координат (x, y) траекторий. Для случая близкорасположенных горизонтальных скважин представляется разумным использовать другую оценку для величины B_{ij} , вычисленную по следующему алгоритму.

Алгоритм 3

1. Для выбранной пары скважин находим середины отрезков между началом и концом траекторий, обозначим эти точки как C и D .
2. Через точки C и D проведем перпендикуляры к отрезку CD и спроецируем соответствующие траектории на них.
3. Полученные проекции достроим до трапеции. В качестве B_{ij} взять длину средней линии этой трапеции (рис. 2).

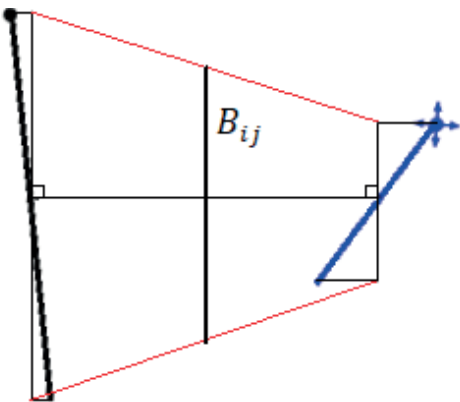


Рис. 2. Пример вычисления B_{ij} для горизонтальных скважин
 Fig. 2. Example of B_{ij} calculation for horizontal wells

Корректировка имеющихся коэффициентов влияния с учетом перевода одной из скважин под нагнетание

Очевидно, что после перевода x -й добывающей скважины под нагнетание коэффициенты взаимовлияния f_{ij} , полученные при адаптации CRMP, должны обратиться в 0, а коэффициенты f_{ij} , $j \neq x$ для всех нагнетательных скважин, влияющих на x -ю добывающую, должны пропорционально возрасти, чтобы сумма этих коэффициентов для каждой из этих скважин осталась прежней. Введем обозначение сумм коэффициентов влияния на интервале адаптации для нагнетательных скважин с учетом и без учета x -й:

$$\hat{S}_i = \sum_j f_{ij},$$

$$\check{S}_i = \sum_{j \neq x} f_{ij}.$$

Тогда, предполагая, что коэффициент эффективности закачки не меняется, получим:

$$\sum_{j \neq x} \overline{f_{ij}} = \hat{S}_i$$

где $\overline{f_{ij}}$ — коэффициенты после перевода x -й скважины в ППД. Кроме того, для простоты изложения введем величину

$$U_{ij} = \frac{k_j}{\mu_j} \frac{A_{ij}}{\bar{l}_i R_{ij}}.$$

Тогда с учетом (3)

$$f_{ij} = \frac{k_j}{\mu_j} A_{ij} \frac{\overline{\Delta P_{wf,ij}}}{\bar{l}_i R_{ij}} = U_{ij} \overline{\Delta P_{wf,ij}}.$$

Исходя из предположения, что после такого перевода забойное давление в i -й скважине увеличится на неизвестную величину y_i , получаем:

$$\hat{S}_i = \sum_{j \neq x} \overline{f_{ij}} = \sum_{j \neq x} U_{ij} \overline{\Delta P_{wf,ij}} = \sum_{j \neq x} U_{ij} (P_{wf,i} + y_i - P_{wf,j}) = \check{S}_i + \sum_{j \neq x} U_{ij} y_i$$

$$\sum_{j \neq x} U_{ij} y_i = \hat{S}_i - \check{S}_i = f_{ix}.$$

Отсюда можно найти y_i по формуле:

$$y_i = \frac{f_{ix}}{\sum_{j \neq x} U_{ij}},$$

после чего можно найти новые коэффициенты $\forall j \neq x$:

$$\overline{f_{ij}} = U_{ij} (P_{wf,i} + y_i - P_{wf,j}) = f_{ij} + U_{ij} y_i. \quad (12)$$

Результаты численных экспериментов

Для демонстрации эффективности рассматриваемого метода пересчета коэффициентов влияния с учетом перевода скважины под нагнетание был проведен численный эксперимент на данных, полученных с помощью синтетической ГДМ. Моделировалась система разработки пласта с неоднородным полем проницаемости с помощью 9 добывающих и 16 нагнетательных скважин. Зоны различной проницаемости располагались вокруг добывающих скважин, проницаемость зон — от 100 до 900 мД (рис. 3). Скважина WP05 через 36 месяцев после старта переводилась под нагнетание.

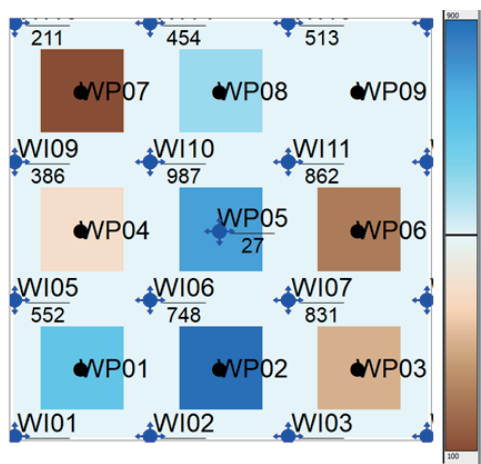


Рис. 3. Поле проницаемости и расположение скважин в ГДМ
Fig. 3. Permeability field and wells location in the hydrodynamic model

На основе данных по расходам скважин и забойным давлениям, выгруженных из ГДМ, настраивалось 2 модели CRMP:

1. Экспериментальная модель. Настраивалась на интервале дат длиной в 24 временных шага (месяца) непосредственно перед переводом скважины WP05.
2. Эталонная модель. Настраивалась на интервале дат длиной в 24 временных шага (месяца) непосредственно после перевода скважины WP05.

По итогам настройки моделей с помощью приведенного в предыдущем пункте метода пересчитывались коэффициенты взаимовлияния экспериментальной модели и сопоставлялись с коэффициентами взаимовлияния эталонной модели. Полученные коэффициенты взаимовлияния приведены на рис. 4–6. Следует отметить, что предлагаемый метод оценки коэффициентов влияния не требует решения сложных вычислительных задач, а для решения задачи настройки модели CRMP известны эффективные алгоритмы, благодаря чему все вычисления в рамках данного численного эксперимента требуют порядка нескольких секунд на современных процессорах без использования многопоточности.

На рис. 7. приводится гистограмма погрешностей (mean absolute percentage error (MAPE), модель/факт) по дебиту жидкости по всем добывающим скважинам после

мероприятия по переводу WP05 под нагнетание. Высокие значения погрешностей в случае использования коэффициентов, полученных в результате адаптации CRMP на интервале до перевода («Традиционная модель»), демонстрируют, что мероприятие существенно влияет на дебиты жидкости, и игнорирование этого факта приводит к неприемлемому снижению качества прогнозов модели. Кроме того, для сравнения приведены оценки погрешности для коэффициентов, полученных с помощью хорошо известного и распространенного «геометрического» метода, когда коэффициенты влияния полагают пропорциональными углам α_{ij} , расчет которых описан в предыдущем разделе. В рамках рассмотренного примера все $\bar{f}_{ij}$ для скважины WP05, определяемые при таком подходе, будут иметь равные значения.

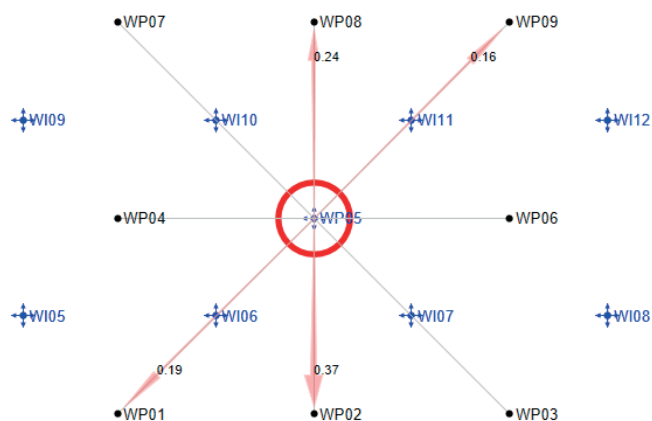


Рис. 4. Коэффициенты взаимовлияния эталонной модели

Fig. 4. Interwell connectivities in reference model

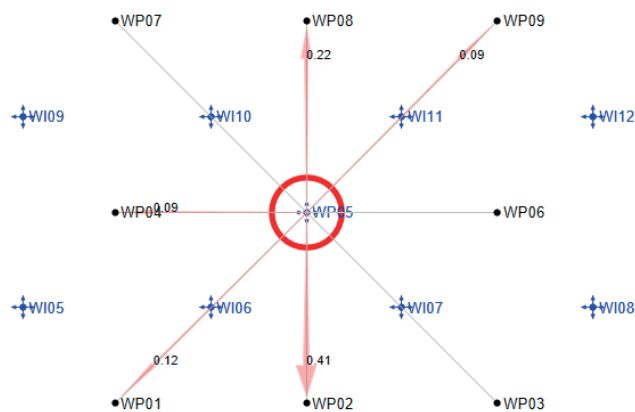


Рис. 5. Коэффициенты взаимовлияния экспериментальной модели, пересчитанные на период после перевода скважины WP05 под нагнетание

Fig. 5. Interwell connectivities in experimental model, calculated for period when WP05 is an injector

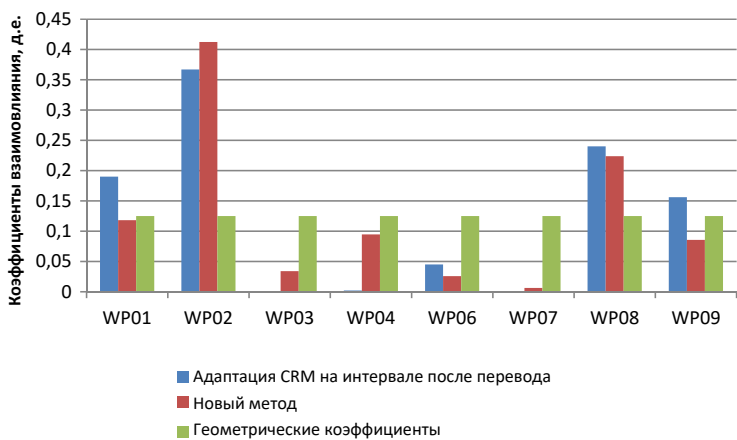


Рис. 6. Гистограмма коэффициентов влияния
Fig. 6. Interwell connectivities histogram. Blue — reference model, red — experimental model, green — CRMP model with interwell connectivities for new injector, calculated by heuristic algorithm

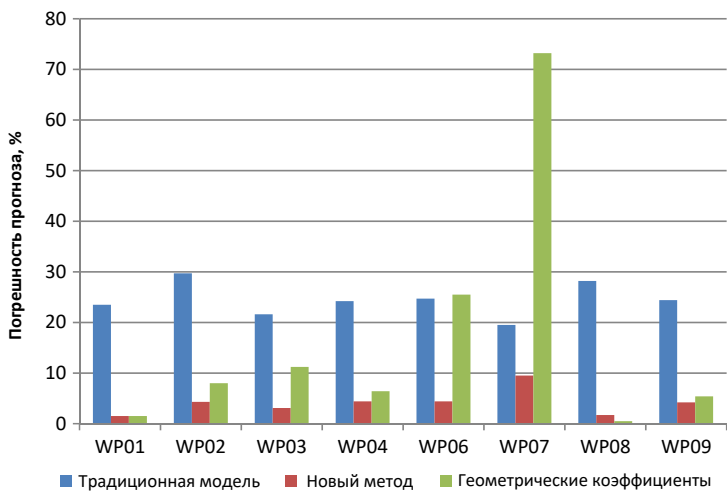


Рис. 7. Гистограмма погрешностей прогнозов дебитов жидкости при использовании различных коэффициентов влияния
Fig. 7. Liquid production rates forecasts MAPE errors histogram. Blue — CRMP adopted on data before WP05 is converted, red — experimental model, green — CRMP model with interwell connectivities for new injector, calculated by heuristic algorithm

Как видно из рис. 7, наибольшая погрешность «геометрического» метода соответствует скважинам, расположенным в зонах низкой проницаемости, так как присутствующее в этом методе предположение о постоянстве поля проницаемости не соответствует исследуемой ГДМ и ошибки в коэффициентах существенно завыша-

ют дебиты жидкости по этим скважинам. В то же время пересчитанные согласно рассмотренному методу коэффициенты обеспечивают погрешность прогноза в пределах 10%, что считается приемлемым для практического применения.

Замечание. Описанный выше метод имеет очевидное ограничение: оценки K_j могут быть получены только для тех добывающих скважин, для которых в рамках первоначально адаптированной модели CRMP имеются ненулевые коэффициенты $f_{ij} > 0$. Для остальных скважин на практике можно использовать, например, геометрические коэффициенты $\overline{f_{ij}}$, учитывая при этом, что для них следует ожидать более высокие погрешности прогнозов.

Заключение

Предложен новый метод пересчета коэффициентов взаимовлияния модели CRMP для получения прогнозов с учетом перевода скважин в ППД. Метод базируется на вспомогательной аналитической модели (законе Дарси), что позволяет учесть в процессе пересчета неоднородность поля проницаемости в окрестности добывающих скважин. Эффективность этого метода продемонстрирована посредством численного эксперимента на данных, полученных с синтетической гидродинамической модели. По результатам эксперимента отмечена высокая степень соответствия расчетных коэффициентов влияния эталонным, а также приемлемый для практического применения уровень погрешности прогнозов модели CRMP. Кроме того, описан алгоритм на основе предложенного метода, позволяющий выбрать из имеющегося множества добывающих скважин кандидаты для перевода под нагнетание и соответствующие им даты перевода, обеспечивающие максимальный эффект с точки зрения добычи нефти на некотором прогнозном периоде.

Список источников

- Афанаскин И. В., Колеватов А. А., Глушаков А. А., Ялов П. В. 2023. Учет нелинейной деформации пустотного пространства в CRM-модели при анализе разработки газовой залежи на истощение // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. № 2(374). С. 59–65. [https://doi.org/10.33285/2413-5011-2023-2\(374\)-59-65](https://doi.org/10.33285/2413-5011-2023-2(374)-59-65)
- Афанаскин И. В., Крыганов П. В., Глушаков А. А., Ялов П. В. 2020. Использование CRM-моделей интерференции скважин для оценки фильтрационно-емкостных свойств пласта по данным разработки // Успехи кибернетики. Том 1. № 1. С. 17-27. <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-1-3>
- Бекман А. Д. 2022. Учет геолого-технических мероприятий при моделировании разработки нефтяной залежи методом материального баланса // Математическое моделирование. Том 34. № 6. С. 22–36. <https://doi.org/10.20948/mm-2022-06-02>
- Бекман А. Д. 2025. Метод прогнозирования дебитов нефти скважин подгазовых зон с помощью CRM-моделей // Информационные технологии и вычислительные системы. № 1. С. 106–115.
- Бекман А. Д., Поспелова Т. А., Зеленин Д. В. 2020. Новый метод прогнозирования динамики обводненности скважин с использованием результатов CRMP-моделирования // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математиче-

- ское моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 6. № 1 (21). С. 192–207. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2020-6-1-192-207>
- Бекман А. Д., Ручкин А. А. 2024. Метод оценки взаимовлияния скважин подгазовой зоны на основе модели материального баланса CRM // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 10. № 1(37). С. 155–173. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-1-155-173>
- Бекман А. Д., Степанов С. В., Ручкин А. А., Зеленин Д. В. 2019. Новый алгоритм нахождения оптимального решения задачи определения коэффициентов взаимовлияния скважин в рамках модели CRM // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 5. № 3. С. 164–185. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2019-5-3-164-185>
- Данько М. Ю., Бриллиант Л. С., Завьялов А. С. 2019. Применение метода динамического материального баланса и CRM-метода (capacitance-resistive models) к подсчету запасов ачимовских и баженовских коллекторов // Недропользование XXI век. № 4(80). С. 76–85. EDN CTHJSE.
- Зеленин Д. В., Степанов С. В., Бекман А. Д., Ручкин А. А. 2019. Исследование механизмов учета взаимовлияния скважин при использовании различных методов математического моделирования // Нефтепромысловое дело. № 12(612). С. 39–45. [https://doi.org/10.30713/0207-2351-2019-12\(612\)-39-45](https://doi.org/10.30713/0207-2351-2019-12(612)-39-45)
- Лебедев В. И., Мусакаев Э. Н., Мусакаев Н. Г., Родионов С. П. 2023. Интегрированная модель «пласт–скважина» на основе D-CRMP // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. № 6. С. 35–46. <https://doi.org/10.31660/0445-0108-2023-6-11-35-46>
- Поспелова Т. А., Зеленин Д. В., Жуков М. С., Бекман А. Д., Ручкин А. А. 2020. Оптимизация системы заводнения на основе модели CRM // Нефтепромысловое дело. № 7 (619). С. 5–10. [https://doi.org/10.30713/0207-2351-2020-7\(619\)-5-10](https://doi.org/10.30713/0207-2351-2020-7(619)-5-10)
- Степанов С. В., Бекман А. Д., Ручкин А. А., Поспелова Т. А. 2021. Сопровождение разработки нефтяных месторождений с использованием моделей CRM. Тюмень: ИПЦ «Экспресс». 300 с.
- Степанов С. В., Соколов С. В., Ручкин А. А., Степанов А. В., Князев А. В., Корытов А. В. 2018. Проблематика оценки взаимовлияния добывающих и нагнетательных скважин на основе математического моделирования // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 4. № 3. С. 146–164. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2018-4-3-146-164>
- Степанов С. В., Степанов А. В., Елецкий С. В. 2013. Численно-аналитический подход к решению задачи оперативного прогнозирования работы нефтяной скважины в условиях образования газового конуса // Нефтепромысловое дело. № 2. С. 53–58.
- Шевцов Н. О. 2023. Модификация модели материального баланса CRM для решения задач оптимизации разработки нефтяных месторождений // Нефтепромысловое дело. № 11(659). С. 20–27. [https://doi.org/10.33285/0207-2351-2023-11\(659\)-20-27](https://doi.org/10.33285/0207-2351-2023-11(659)-20-27)
- Шевцов Н. О., Степанов С. В. 2024. Исследование связи коэффициентов взаимовлияния скважин в модели CRM с полем проводимости в рамках иерархического подхода к моделированию // Нефтепромысловое дело. № 7 (667). С. 20–25.
- Шевцов Н. О., Степанов С. В., Поспелова Т. А. 2020. Исследование прогностической способности численной и аналитической моделей на примере оценки взаимовлияния

- скважин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том. 6. № 3(23). С. 131–142. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2020-6-3-131-142>
- Bahrami P., Sahari Moghaddam F., James L. A. 2022. A Review of proxy modeling highlighting applications for reservoir engineering // *Energies*. Vol. 15. No. 14. Article 5247. <https://doi.org/10.3390/en15145247>
- Cao F. 2014. Development of a Two-Phase Flow Coupled Capacitance Resistance Model: Ph. D. Dissertation. Austin, TX: University of Texas.
- de Holanda R. W., Gildin E., Jensen J. L., Lake L. W., Kabir C. S. 2018. A state-of-the-art literature review on capacitance-resistance models for reservoir characterization and performance forecasting // *Energies*. Vol. 11. No. 12. Article 3368. <https://doi.org/10.3390/en11123368>
- Gentil P. H. 2005. The Use of Multilinear Regression Models in Patterned Waterfloods: Physical Meaning of the Regression Coefficients: M. S. Thesis. Austin, TX: University of Texas.
- Gubanova A. E., Khabibullin B. A., Orlov D. M., Koroteev D. A. 2021. Modified CR-type material balance model for well production forecasts in case of well treatments // Society of Petroleum Engineers — SPE Russian Petroleum Technology Conference 2021. <https://doi.org/10.2118/SPE-206511-MS>
- Sayarpour M. 2008. Development and Application of Capacitance-Resistive Models to Water/CO₂ Floods: Ph. D. Dissertation. Austin, TX: University of Texas. 236 pp.
- Sayarpour M., Zuluaga E., Kabir C. S., Lake L. W. 2009. The use of capacitance-resistance models for rapid estimation of waterflood performance and optimization // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. Vol. 69. No. 3–4. Pp. 227–238. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.09.006>
- Yousef A. A., Gentil P. H., Jensen J. L., Lake L. W. 2006. A capacitance model to infer interwell connectivity from production- and injection-rate fluctuations // *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*. Vol. 9. No. 6. Pp. 630–646. <https://doi.org/10.2118/95322-PA>

References

- Afanaskin, I. V., Kolevatov, A. A., Glushakov, A. A., & Yalov, P. V. (2023). Consideration of non-linear deformation of the void space in the CRM-model when analyzing the development of a gas deposit for depletion. *Geology, Geophysics and Development of Oil and Gas Fields*, (2), 59–65. [https://doi.org/10.33285/2413-5011-2023-2\(374\)-59-65](https://doi.org/10.33285/2413-5011-2023-2(374)-59-65) [In Russian]
- Afanaskin, I. V., Kryganov, P. V., Glushakov, A. A., & Yalov, P. V. (2020). CRM well interference models for evaluating reservoir filtration and volumetric properties from production data. *Russian Journal of Cybernetics*, 1(1), 17–27. <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-1-3> [In Russian]
- Bekman, A. D. (2023). Accounting for stimulation treatments in modeling of oil reservoirs development using the material balance method. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 15, 13–22. <https://doi.org/10.1134/S2070048223010027>
- Bekman, A. D. (2025). A new method of oil production rates forecasting for producers in sub-gas zones based on CRM. *Journal of Information Technologies and Computing Systems*, (1), 106–115. [In Russian]

- Bekman, A. D., Pospelova, T. A., & Zelenin, D. V. (2020). A new approach to water cut forecasting based on results of capacitance resistance modeling. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 6(1), 192–207. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2020-6-1-192-207> [In Russian]
- Bekman, A. D., & Ruchkin, A. A. (2024). Method for assessing well interference at under-gas cap zone using CRM material balance model. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 10(1), 155–173. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2024-10-1-155-173> [In Russian]
- Bekman, A. D., Stepanov, S. V., Ruchkin, A. A., & Zelenin, D. V. (2019). A new algorithm for finding CRM-model coefficients. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 5(3), 164–185. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2019-5-3-164-185> [In Russian]
- Danko, M. Yu., Brilliant, L. S., & Zavyzlov, A. S. (2019). Application of dynamic material balance method and CRM method (capacitance-resistive models) for reserves assessment in Achimov and Bazhenov reservoirs. *21st Century Subsoil Use*, (4), 76–85. EDN CTHJSE. [In Russian]
- Zelenin, D. V., Stepanov, S. V., Bekman, A. D., & Ruchkin, A. A. (2019). Research of mechanisms for accounting of wells interaction when using various methods of mathematical modeling. *Oilfield Engineering*, (12), 39–45. [https://doi.org/10.30713/0207-2351-2019-12\(612\)-39-45](https://doi.org/10.30713/0207-2351-2019-12(612)-39-45) [In Russian]
- Lebedev V. I., Musakaev E. N., Musakaev N. G., & Rodionov S. P. (2023). Integrated model “reservoir-well” based on D-CRMP. *Oil and Gas Studies*, (6), 35–46. <https://doi.org/10.31660/0445-0108-2023-6-11-35-46> [In Russian]
- Pospelova, T. A., Zelenin, D. V., Zhukov, M. S., Bekman, A. D., & Ruchkin, A. A. (2020). Water cut system optimization based on CRM model. *Oilfield Engineering*, (7), 5–10. [https://doi.org/10.30713/0207-2351-2020-7\(619\)-5-10](https://doi.org/10.30713/0207-2351-2020-7(619)-5-10) [In Russian]
- Stepanov, S. V., Bekman, A. D., Ruchkin, A. A., & Pospelova, T. A. (2021). *Oil Reservoir Management Methods with the Use of Capacitance Resistive Models*. Express. [In Russian]
- Stepanov, S. V., Sokolov, S. V., Ruchkin, A. A., Stepanov, A. V., Knyazev, A. V., & Korytov, A. V. (2018). Considerations on mathematical modeling of producer-injector interference. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 4(3), 146–164. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2018-4-3-146-164> [In Russian]
- Stepanov, S. V., Stepanov, A. V., & Eletsy, S. V. (2013). Numerical-analytical approach towards salvation of the problem relating to on-line prediction of an oil well operation in conditions of a gas cone formation. *Oilfield Engineering*, (2), 53–58. [In Russian]
- Shevtsov, N. O. (2023). Modification of the capacitance resistive model (CRM) for solving optimization problems of oil fields development. *Oilfield Engineering*, (11), 20–27. [https://doi.org/10.33285/0207-2351-2023-11\(659\)-20-27](https://doi.org/10.33285/0207-2351-2023-11(659)-20-27) [In Russian]
- Shevtsov, N. O., & Stepanov, S. V. (2024). Research of the relationship of wells interaction coefficients in the CRM with the hydraulic conductivity field within the framework of a hierarchical modeling approach. *Oilfield Engineering*, (7), 20–25. [In Russian]

- Shevtsov, N. O., Stepanov, S. V., & Pospelova, T. A. (2020). The study of the predictive ability of numerical and analytical models (the case of mutual well impact evaluation). *Tyumen State University Herald. Phys. and Mathematics Modeling. Oil, Gas, Energy*, 6(3), 131–142. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2020-6-3-131-142> [In Russian]
- Bahrami, P., Sahari Moghaddam, F., & James, L.A. (2022). A Review of proxy modeling highlighting applications for reservoir engineering. *Energies*, 15(14), 5247. <https://doi.org/10.3390/en15145247>
- Cao, F. (2014). *Development of a Two-Phase Flow Coupled Capacitance Resistance Model* [Ph.D. Dissertation]. University of Texas.
- de Holanda, R. W., Gildin, E., Jensen, J. L., Lake, L. W., & Kabir, C. S. (2018). A state-of-the-art literature review on capacitance-resistance models for reservoir characterization and performance forecasting. *Energies*, 11(12), 3368. <https://doi.org/10.3390/en11123368>
- Gentil, P. H. (2005). *The Use of Multilinear Regression Models in Patterned Waterfloods: Physical Meaning of the Regression Coefficients* [M. S. Thesis]. University of Texas.
- Gubanova, A. E., Khabibullin, B. A., Orlov, D. M., & Koroteev, D. A. (2021). Modified CR-type material balance model for well production forecasts in case of well treatments. In *Society of Petroleum Engineers — SPE Russian Petroleum Technology Conference 2021*. <https://doi.org/10.2118/SPE-206511-MS>
- Sayarpour, M. (2008). *Development and Application of Capacitance-Resistive Models to Water/CO₂ Floods* [Ph. D. Dissertation]. University of Texas.
- Sayarpour, M., Zuluaga, E., Kabir, C. S., & Lake, L. W. (2009). The use of capacitance-resistance models for rapid estimation of waterflood performance and optimization. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 69(3–4), 227–238. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.09.006>
- Yousef, A. A., Gentil, P. H., Jensen, J. L., & Lake, L. W. (2006). A capacitance model to infer interwell connectivity from production- and injection-rate fluctuations. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 9(6), 630–646. <https://doi.org/10.2118/95322-PA>

Информация об авторе

Александр Дмитриевич Бекман, кандидат физико-математических наук, главный инженер проекта, ООО «РН – Геология Исследования Разработка», Тюмень, Россия
adbekman@rn-gir.rosneft.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5907-523X>

Information about the author

Alexander D. Bekman, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Chief Project Engineer, LLC “RN – Geology Research Development”, Tyumen, Russia
adbekman@rn-gir.rosneft.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5907-523X>

Научное издание



ВЕСТНИК ТЮМЕНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика

2026. Том 12. № 2 (46)

Редакторы	<i>А. Я. Гильманов, А. П. Шевелёв, А. А. Горбунов</i>
Перевод	<i>А. Я. Гильманов, А. А. Горбунов</i>
Компьютерная верстка	<i>С. Ф. Обрядова</i>
Дизайн обложки	<i>Г. Ф. Бикмулина</i>
Печать	<i>А. В. Башкиров</i>

Дата выхода в свет 27.07.2026

Формат 70 × 108/16. Бумага Xerox Perfect Print

Обложка Stromcard LI. Гарнитура Arno Pro

Печать цифровая. 16,45 усл. печ. л., 13,16 уч.-изд. л.

Цена свободная.

Тираж 500 экз. Заказ № 162.