

# ВЕСТНИК

ТЮМЕНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математическое моделирование.

Нефть, газ, энергетика

Журнал основан в 1998 г.  
Выходит 4 раза в год

Том 9. № 1 (33)

2023

TYUMEN STATE  
UNIVERSITY

# HERALD

Physical and Mathematical Modeling.

Oil, Gas, Energy

Vol. 9. No. 1 (33)

Founded in 1998  
A quarterly journal

Издание включено в Перечень рецензируемых научных изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты  
диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук



## Главный редактор

*А. Б. Шабаров, Тюмень, Россия*

## Заместители главного редактора

*О. В. Ахметова, Стерлитамак, Россия*

*А. А. Губайдуллин, Тюмень, Россия*

*А. А. Захаров, Тюмень, Россия*

*А. А. Кислицын, Тюмень, Россия*

## Ответственный секретарь

*О. А. Нестерова, Тюмень, Россия*

## Редакционная коллегия

*А. А. Афанасьев, Москва, Россия*

*С. П. Баутин, Екатеринбург, Россия*

*Г. Л. Бровко, Москва, Россия*

*А. А. Вакулин, Тюмень, Россия*

*Н. А. Гумеров, Колледж-Парк, Мэриленд, США*

*В. И. Гуров, Москва, Россия*

*Б. С. Доброней, Красноярск, Россия*

*С. В. Костюченко, Тюмень, Россия*

*С. И. Лежнин, Новосибирск, Россия*

*Е. А. Новиков, Красноярск, Россия*

*О. А. Степанов, Тюмень, Россия*

*С. В. Степанов, Тюмень, Россия*

*А. В. Стрекалов, Тюмень, Россия*

*А. В. Татосов, Тюмень, Россия*

*С. Ю. Удовиченко, Тюмень, Россия*

*Ю. В. Шорников, Новосибирск, Россия*

*Д. И. Эскин, Москва, Россия*

*В. В. Ягов, Москва, Россия*

## Редакционный совет

*И. Ш. Ахатов, Сколково, Россия, США*

*А. Ю. Вараксин, Москва, Россия*

*Д. А. Губайдуллин, Казань, Россия*

*Зыонг Нгок Хай, Ханой, Вьетнам*

*А. Г. Ивашико, Тюмень, Россия*

*К. К. Нанди, Силигури, Индия*

*Р. И. Нигматулин, Москва, Россия*

*А. И. Филяровский, Вроцлав, Польша*

*В. М. Фомин, Новосибирск, Россия*

*В. В. Шайдуров, Красноярск, Россия*

ISSN 2411-7978 (Print)

ISSN 2500-3526 (Online)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-72159 выдано 29 декабря 2017 г. (ранее: ПИ № ФС77-60410 от 29 декабря 2014 г.) Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

**Учредитель**

ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»

**Издатель/редакция/типография**

ТюмГУ-Press

625003, г. Тюмень, ул. Володарского, б

+7 (3452) 59-75-34, 59-74-81

**Прием статей**

vestnik-energy-r@utmn.ru

Публикация статей для авторов бесплатна

**Журнал распространяется**

В открытом доступе <http://www.e-library.ru>

<http://vestnik.utmn.ru>

По подписке

Каталог Российской прессы (индекс ПА230)

## Editor-in-chief

*A. B. Shabarov*, Tyumen, Russia

## Deputy editors-in-chief

*O. V. Akhmetova*, Sterlitamak, Russia

*A. A. Gubaidullin*, Tyumen, Russia

*A. A. Zakharov*, Tyumen, Russia

*A. A. Kislitsyn*, Tyumen, Russia

## Executive secretary

*O. A. Nesterova*, Tyumen, Russia

## Editorial board

*A. A. Afanasyev*, Moscow, Russia

*S. P. Bautin*, Yekaterinburg, Russia

*G. L. Brovko*, Moscow, Russia

*A. A. Vakulin*, Tyumen, Russia

*N. A. Gumerov*, College Park, Maryland, USA

*V. I. Gurov*, Moscow, Russia

*B. S. Dobronets*, Krasnoyarsk, Russia

*S. V. Kostyuchenko*, Tyumen, Russia

*S. I. Lezhnin*, Novosibirsk, Russia

*E. A. Novikov*, Krasnoyarsk, Russia

*O. A. Stepanov*, Tyumen, Russia

*S. V. Stepanov*, Tyumen, Russia

*A. V. Strekalov*, Tyumen, Russia

*A. V. Tatosov*, Tyumen, Russia

*S. Yu. Udovichenko*, Tyumen, Russia

*Yu. V. Shornikov*, Novosibirsk, Russia

*D. I. Eskin*, Moscow, Russia

*V. V. Yagov*, Moscow, Russia

## Editorial council

*I. Sh. Akhatov*, Skolkovo, Russia, USA

*A. Yu. Varaksin*, Moscow, Russia

*D. A. Gubaidullin*, Kazan, Russia

*Duong Ngoc Hai*, Hanoi, Vietnam

*A. G. Ivashko*, Tyumen, Russia

*K. K. Nandi*, Siliguri, India

*R. I. Nigmatulin*, Moscow, Russia

*A. I. Filarowski*, Wrocław, Poland

*V. M. Fomin*, Novosibirsk, Russia

*V. V. Shaidurov*, Krasnoyarsk, Russia

ISSN 2411-7978 (Print)

ISSN 2500-3526 (Online)

Founded by

University of Tyumen

Published, edited and printed by

UTMN-Press

6 Volodarskogo St., Tyumen, 625003, Russia

+7 (3452) 59-75-34, 59-74-81

For article submission

vestnik-energy-r@utmn.ru

No publication charges

The journal is distributed

Accessed at

<http://www.e-library.ru>

<http://vestnik.utmn.ru>

Subscription to

Russian Post catalogue (No. IIA230)

## Содержание

### Теплофизика и теоретическая теплотехника

- 6 Исследование распределения температуры в неоднородном пласте при фильтрации флюида с учетом термодинамических эффектов  
*Сулейманова М. Д., Шарафутдинов Р. Ф., Канафин И. В.*
- 22 Численное моделирование фазового перехода «вода — лед» в высокопроницаемых водонасыщенных пористых средах  
*Симонов О. А., Филимонова Л. Н.*
- 39 Реконструкция системы электроснабжения на основе альтернативного источника энергии  
*Половникова Л. Б.*
- 60 Изучение теплообменных процессов при индукционном нагреве обсадной колонны применительно к определению заколонных перетоков  
*Давлетшин Ф. Ф., Исламов Д. Ф., Хабиров Т. Р., Гаязов М. С., Низаева И. Г.*

### Механика жидкости, газа и плазмы

- 78 Моделирование блокирования трещин автогидроразрыва пласта в гидродинамическом симуляторе  
*Шевелёв А. П., Гильманов А. Я., Касперович А. М.*

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Информационные технологии

- 92 Математическое моделирование нового метода обработки сейсмосигнала на примере разреза Саратовского Правобережья. Часть 1  
*Фонин А. А., Сучков С. Г., Николаевцев В. А., Михеев С. И.*
- 107 Исследование влияния зашумленности исходных данных на точность определения коэффициентов взаимовлияния скважин методом линейной регрессии  
*Ганопольский Р. М.*
- 116 Дифференциально-разностные системы в анализе слабой разрешимости начально-краевых задач с изменяющейся в сетеподобной области пространственной переменной  
*Хоанг В. Н., Провоторов В. В.*
- 139 Композиционное строение магниевого шарового элемента клапана для буровой скважины  
*Логинов Ю. Н., Замаева Ю. В.*
- 153 Содержание за 2022 год

## Contents

### Thermal physics and thermology

- 6 Investigation of the temperature distribution in a heterogeneous reservoir during fluid filtration, taking into account thermodynamic effects  
*Suleimanova, M. D., Sharafutdinov, R. F., & Kanafin, I. V.*
- 22 Numerical simulation of the water-ice phase transition in highly permeable water-saturated porous media  
*Simonov, O. A., & Filimonova, L. N.*
- 39 Reconstruction of the power supply system based on an alternative energy source  
*Polovnikova, L. B.*
- 60 The study of heat exchange processes during induction heating of the casing string in relation to the determination of behind-the-casing flows  
*Davletshin, F. F., Islamov, D. F., Khabirov, T. R., Gayazov, M. S., & Nizaeva, I. G.*

### Fluid, plasma, and gas mechanics

- 78 Simulation of blocking of hydraulic fracture near injector in a reservoir simulator  
*Shevelev, A. P., Gilmanov, A. Ya., & Kasperovich, A. M.*

### Mathematical modeling, numerical methods, and software systems. Information technologies

- 92 Mathematical modeling of a new method for processing a seismic signal on the example of a section of the Saratov right bank. Part 1  
*Fonin, A. A., Suchkov, S. G., Nikolayevtsev, V. A., & Mikheyev, S. I.*
- 107 Influence of noisy input data in accuracy of well interference coefficients by linear regression method  
*Ganopolskij, R. M.*
- 116 Differential-difference systems in the analysis of weak solvability of initial-boundary value problems with a spatial variable in a network-like domain  
*Hoang, V. N., & Provotorov, V. V.*
- 139 Composite structure of the magnesium ball valve element for a drilling well  
*Loginov, Yu. N., & Zamaraeva, Yu. V.*
- 153 Contents for 2022

## Исследование распределения температуры в неоднородном пласте при фильтрации флюида с учетом термодинамических эффектов

Малика Джалилева Сулейманова, Рамиль Фаизырович Шарафутдинов<sup>✉</sup>,  
Ильдар Вакифович Канафин

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия  
Контакт для переписки: [gframil@inbox.ru](mailto:gframil@inbox.ru)<sup>✉</sup>

**Аннотация.** На основе моделирования неизотермической фильтрации флюида с учетом эффекта Джоуля — Томсона и адиабатического эффекта исследуется формирование температуры в пористой среде с радиально-угловой неоднородностью по проницаемости.

Показано, что наличие неоднородности в прискважинной зоне пласта приводит к различным темпам установления температуры в угловом распределении после пуска скважины в работу. В зависимости от соотношения проницаемостей пласта и участка неоднородности при фильтрации флюида в угловом распределении температуры в скважине наблюдается либо замедленный темп установления температуры в области неоднородности, т. е. область неоднородности холоднее остальной области, либо, наоборот, область неоднородности имеет повышенную температуру.

Полученные результаты дополняют известные данные по формированию температурных полей в пластовых условиях при неизотермической фильтрации флюида с учетом термодинамических эффектов и могут быть использованы при интерпретации результатов многодатчиковых температурных исследований в скважинах с неоднородными по проницаемости пластами.

**Ключевые слова:** проницаемость пласта, неоднородные пласты, термогидродинамические процессы, эффект Джоуля — Томсона, адиабатический эффект, неизотермическая фильтрация

**Благодарности:** работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ по теме: «Создание интеллектуальной комплексной технологии исследования и интерпретации данных промыслово-геофизических исследований скважин, включая оптоволоконные измерения для контроля

за разработкой нефтегазовых месторождений и экологического мониторинга состояния недр, на основе использования математического моделирования, машинного обучения, алгоритмов обработки и роботизированной аппаратуры индукционного воздействия» (соглашение № 075-11-2021-061 от 25 июня 2021 г.).

**Цитирование:** Сулейманова М. Д., Шарафутдинов Р. Ф., Канафин И. В. 2023. Исследование распределения температуры в неоднородном пласте при фильтрации флюида с учетом термодинамических эффектов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 1 (33). С. 6–21. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-6-21>

Поступила 30.01.2023; одобрена 12.03.2023; принята 31.03.2023

## Investigation of the temperature distribution in a heterogeneous reservoir during fluid filtration, taking into account thermodynamic effects

Malika D. Suleimanova, Ramil F. Sharafutdinov<sup>✉</sup>, Ildar V. Kanafin

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

Corresponding author: [gframil@inbox.ru](mailto:gframil@inbox.ru)<sup>✉</sup>

**Abstract.** Based on the modeling of non-isothermal fluid filtration, taking into account the Joule–Thomson effect and the adiabatic effect, the formation of temperature in a porous medium with radial-angular permeability heterogeneity is studied.

It is shown that the presence of heterogeneity in the near-wellbore formation zone leads to different rates of temperature establishment in the angular distribution after the well is put into operation. Depending on the ratio of the permeability of the formation and the area of heterogeneity during fluid filtration in the angular distribution of temperature in the well, either a slow rate of temperature establishment in the region of heterogeneity is observed. The area of heterogeneity is colder than the rest of the area, or vice versa, the area of heterogeneity has an increased temperature.

The results obtained complement the known data on the formation of temperature fields in reservoir conditions with non-isothermal fluid filtration, taking into account thermodynamic effects, and can be used to interpret the results of multi-sensor temperature studies in wells with formations that are heterogeneous in permeability.

**Keywords:** reservoir permeability, heterogeneous reservoirs, thermohydrodynamic processes, Joule–Thomson effect, adiabatic effect, non-isothermal filtration

**Acknowledgements:** the research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-11-2021-061 dated June 25, 2021).

**Citation:** Suleimanova, M. D., Sharafutdinov, R. F., & Kanafin, I. V. (2023). Investigation of the temperature distribution in a heterogeneous reservoir during fluid filtration, taking into account thermodynamic effects. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(1), 6–21. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-6-21>

Received January 30, 2023; Reviewed March 12, 2023; Accepted March 31, 2023

## Введение

Исследованию формирования температурного поля с учетом термодинамических эффектов посвящено значительное количество публикаций [Валиуллин и др., 1994, 1995, 2008; Валиуллин, Рамазанов, 1992; Гиматуллин, Ширковский, 1982; Исламов, Рамазанов, 2022; Люшин и др., 1961; Требин и др., 1978; Федоров, Шарафутдинов, 1989; Чекалюк, 1965]. В основном рассматриваются однофазные, одномерные задачи неизотермической фильтрации в однородных пластах. Следует отметить, что исследованиями в области изучения многофазных потоков в скважинах и пластах занимаются многие российские и зарубежные ученые. Ниже приведены направления деятельности основных научных школ.

- *Башкирский государственный университет*. Аналитические решения для пласта в радиальной постановке для жесткого неоднородного пласта, численные одно- и двухмерные (R-Z-геометрия) модели для слабосжимаемого пласта, для сильносжимаемого пласта, двухфазные модели [Ramazanov и др., 2010; Valiullin et al., 2014];
- *Стэнфордский университет (Stanford University)*. Исследование и обработка данных неизотермического тестирования скважин с целью извлечения информации о пласте, трещинах или профиле притока [Durlowsky, Aziz, 2004; Lucia et al., 2013; Ribeiro, Horne, 2013];
- *Стамбульский технический университет (Istanbul Technical University)*. Исследование и оптимизация работы геотермальных скважин [Palabiyik и др., 2013];
- *TGT Oil and Gas Services (TGT Oilfield Services)*. Собственные научные исследования в области использования нестационарных/распределенных данных температуры для получения информации о пласте, техническом состоянии скважины и профиле притока [Aslanyan и др., 2014];
- *Техасский университет A&M (Texas A&M University)*. Тестирование многопластовых систем с использованием распределенных измерений давления и температуры [Li, 2010];
- *Университет им. Хэриота и Уатта (Heriot-Watt University)*. Моделирование и анализ данных интеллектуальных скважин с учетом конструкции скважин [Muradov, 2010];

- *Университет Калгари (University of Calgary)*. Изучение изотермической фильтрации, разработка симуляторов неизотермической фильтрации в системе «скважина — пласт» [Bahonar и др., 2011].

В реальных условиях нефтегазосодержащие пласты крайне редко бывают однородными. Как правило, они состоят из различных по минералогическому и фракционному составу горных пород. Содержание глин и карбонатов может сильно изменяться по всему объему породы. Различные породы переслаиваются, замещаются и в итоге составляют сложную геологическую структуру месторождения. Пласты-коллекторы с геологической неоднородностью характеризуются различием литологического, фациального и минерального содержания, а также физических характеристик слагающих их горных пород. Такая неоднородность коллекторов является следствием протекания геологических процессов, вызвавших изменения литологических, петрологических и физических свойств пластов-коллекторов и насыщающих их флюидов [Газизов, 2002]. Неоднородность по проницаемости, расположенная вблизи скважины, в большинстве случаев является следствием процессов, происходящих при эксплуатации скважины, таких как выпадение асфальтосмолопарафинистых веществ, образование газоконденсатной пробки и т. д. [Люшин и др., 1961].

В зависимости от особенностей распределения в пространстве выделяют следующие виды неоднородности пластов по проницаемости: слоистая неоднородность, зональная (площадная) неоднородность, пространственная (объемная) неоднородность [Газизов, 2002].

В последнее время всё большее внимание уделяется изучению термогидродинамических процессов при фильтрации флюида с учетом термодинамических эффектов в неоднородных пластах [Валиуллин и др., 2008; Исламов, Рамазанов, 2022]. Так, в работе [Валиуллин и др., 2008] рассматриваются особенности двухфазной фильтрации нефти и воды в пласте с зональной неоднородностью по проницаемости. Учитываются температурные эффекты, возникающие за счет проявления эффекта Джоуля — Томсона и адиабатического эффекта. Показано, что наличие неоднородности в прискважинной зоне пласта приводит к возникновению немонотонного углового и радиального распределений температуры и насыщенностей фаз. В зависимости от соотношения проницаемостей пласта и участка неоднородности при фильтрации нефти и воды в угловом распределении температуры в скважине наблюдается инверсия, т. е. переход от отрицательных температурных аномалий к положительным и наоборот. Авторы публикации [Исламов, Рамазанов, 2022] рассматривают особенности температурного поля с учетом эффекта Джоуля — Томсона при наличии слоистой неоднородности. В работе [Шарафутдинов и др., 2017] на основе численного моделирования неизотермической фильтрации газированной нефти с учетом теплоты разгазирования, эффекта Джоуля — Томсона и адиабатического эффекта исследуется радиально-угловое распределение температуры в неоднородной по проницаемости пористой среде. Показано, что наличие неоднородности проницаемости в прискважинной зоне пористого пласта приводит к значительной температурной аномалии охлаждения вследствие интенсивного газовыделения в зоне высокой проницаемости. На закономерностях изменения температуры основан термический метод исследования скважин и пластов [Люшин и др., 1961; Требин и др., 1978; Чекалюк, 1965].

## Методы

В данной работе численно исследуется нестационарное температурное поле в неоднородном по проницаемости пласте при фильтрации нефти с учетом двух эффектов: Джоуля — Томсона и адиабатического. При этом движение флюида подчиняется закону Дарси, не учитывается диффузионный процесс переноса массы и капиллярное давление, пренебрегается тепловыми потерями.

Геометрия задачи приведена на рис. 1. Неоднородность проницаемости находится в области  $r_{1н} \leq r \leq r_{2н}$ ,  $-\alpha_n \leq \alpha \leq \alpha_n$  (рис. 1).

Уравнения сохранения массы (1) с подставленным в него законом Дарси и уравнение притока тепла (2) в двумерном случае ( $r, \alpha$ ) имеют вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{K}{\mu_1} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{K}{\mu_1} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (m\rho_1 c_1 T + [1-m]\rho_0 c_0 T) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r[\rho_1 c_1 v_1] T) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} ([\rho_1 c_1 v_1] T) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \lambda_\alpha \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) + m(\rho_1 c_1 \eta_1) \frac{\partial P}{\partial t} + \\ & + (\varepsilon_1 \rho_1 c_1 v_1) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} (\varepsilon_1 \rho_1 c_1 v_1) \frac{\partial P}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

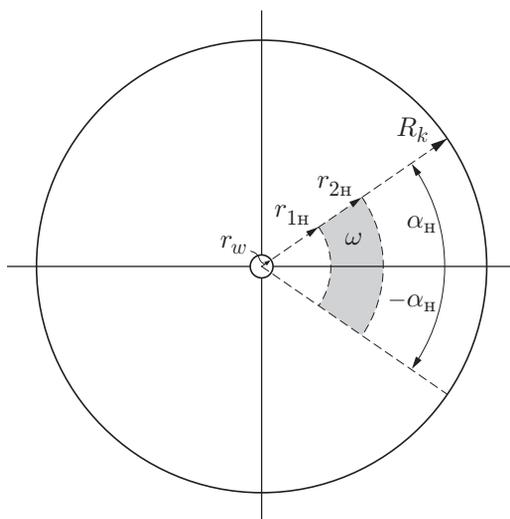
Здесь  $T$  — температура, К;  $P$  — давление, МПа;  $v_1$  — скорость флюида, м/сек;  $c_1$  — теплоемкость флюида, Дж/(кг·К);  $c_0$  — теплоемкость скелета горной породы, Дж/(кг·К);  $\rho_1$  — плотность флюида, кг/м<sup>3</sup>;  $K$  — абсолютная проницаемость, м<sup>2</sup>;  $m$  — пористость;  $\mu_1$  — вязкость, Па·сек;  $\varepsilon_1$  — коэффициент Джоуля — Томсона, К/МПа;  $\eta_1$  — адиабатический коэффициент, К/МПа;  $\lambda_r, \lambda_\alpha$  — радиальная и угловая теплопроводности, Вт/(м·К).

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} P(r, \alpha) \Big|_{\substack{0 \leq r \leq R_k \\ 0 \leq \alpha \leq 2\pi}}^{t=0} &= P_{pl}, \\ T(r, \alpha) \Big|_{\substack{0 \leq r \leq R_k \\ 0 \leq \alpha \leq 2\pi}}^{t=0} &= T_0, \\ P(r_w, \alpha, t) \Big|_{0 \leq \alpha \leq 2\pi} &= P_w(t), \\ P(R_k, \alpha, t) \Big|_{0 \leq \alpha \leq 2\pi} &= P_{pl}, \\ T(R_k, \alpha) \Big|_{0 \leq \alpha \leq 2\pi} &= T_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $P_w(t)$  — давление в скважине, МПа;  $P_{pl}$  — пластовое давление, МПа;  $T_0$  — пластовая температура, К;  $r_w$  — радиус скважины, м;  $R_k$  — радиус контура питания, м.

Теплофизические параметры  $c_i, \varepsilon_i, \eta_i, \lambda_r, \lambda_\alpha$  считались постоянными и определялись из таблиц [Гиматуллин, Ширковский, 1982] для среднепластового давления  $P = P_0$  и температуры  $T = T_0$ . Решение системы уравнений проводится аналогично [Валиуллин и др., 2008].



**Рис. 1.** Геометрия задачи для фильтрации флюида при наличии радиально-азимутальной неоднородности

**Fig. 1.** Geometry of the problem for fluid filtration in the presence of radial-azimuth heterogeneity

## Результаты и их обсуждение

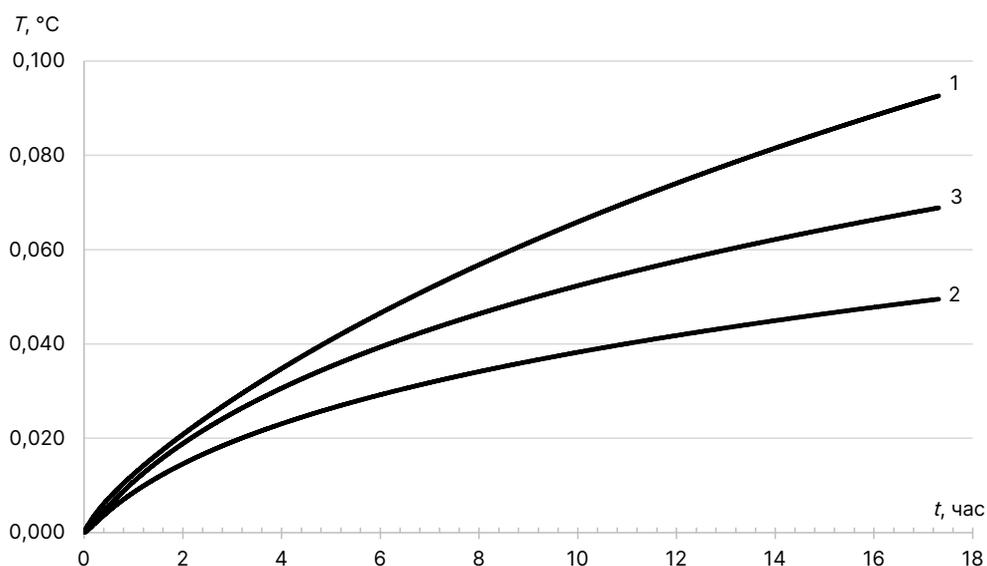
Далее приведены результаты расчетов температурного поля при следующих значениях термодинамических параметров фаз:  $c_0 = 800$  Дж/(кг·К),  $c_1 = 1880$  Дж/(кг·К),  $\epsilon_1 = 0,4$  К/МПа,  $\eta_1 = 0,17$  К/МПа [Чекалюк, 1965]. Вязкость нефти принята равной  $\mu_1 = 0,005$  МПа·с. Пластовое давление  $P_{pl} = 10$  МПа, давление на границе пласта (скважины)  $P_w = 5$  МПа.

Тестирование модели проводилось путем сравнения известных решений для теплового с расчетными зависимостями температуры на выходе из пласта от времени [Валиуллин, Рамазанов, 1992; Валиуллин и др., 2008]. Расхождение не превышает 1%.

На рис. 2 приведены результаты расчета изменения температуры в скважине, напротив области неоднородности, для однофазной фильтрации нефти при расположении зоны неоднородности в области от  $r_{1H} = 0,14$  м до  $r_{2H} = 1,4$  м с проницаемостью  $k_H = 0,1K$ , где проницаемость пласта  $K = 0,01 \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>. Варьировался угол расположения неоднородной зоны.

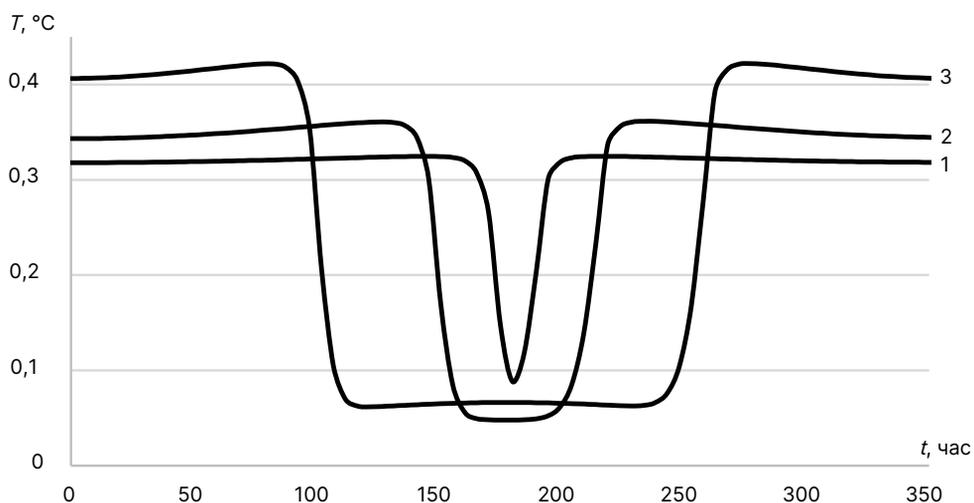
Рассматриваемый случай, типичный для трудноизвлекаемых запасов нефтегазовых месторождений, характеризуется низкой проницаемостью как области неоднородности, так и пласта.

Анализ распределения температуры показывает (рис. 2 и 3), что наблюдается немонотонная зависимость изменения температуры напротив зоны неоднородности во времени от угла охвата области неоднородной зоны. Так, наибольший темп установления температуры наблюдается для углов 10 и 150° (кривые 1 и 3, рис. 2), а наименьший — для угла 60°.



**Рис. 2.** Зависимость температуры от времени при различных углах расположения неоднородности: 1 — 10°, 2 — 60°, 3 — 150°

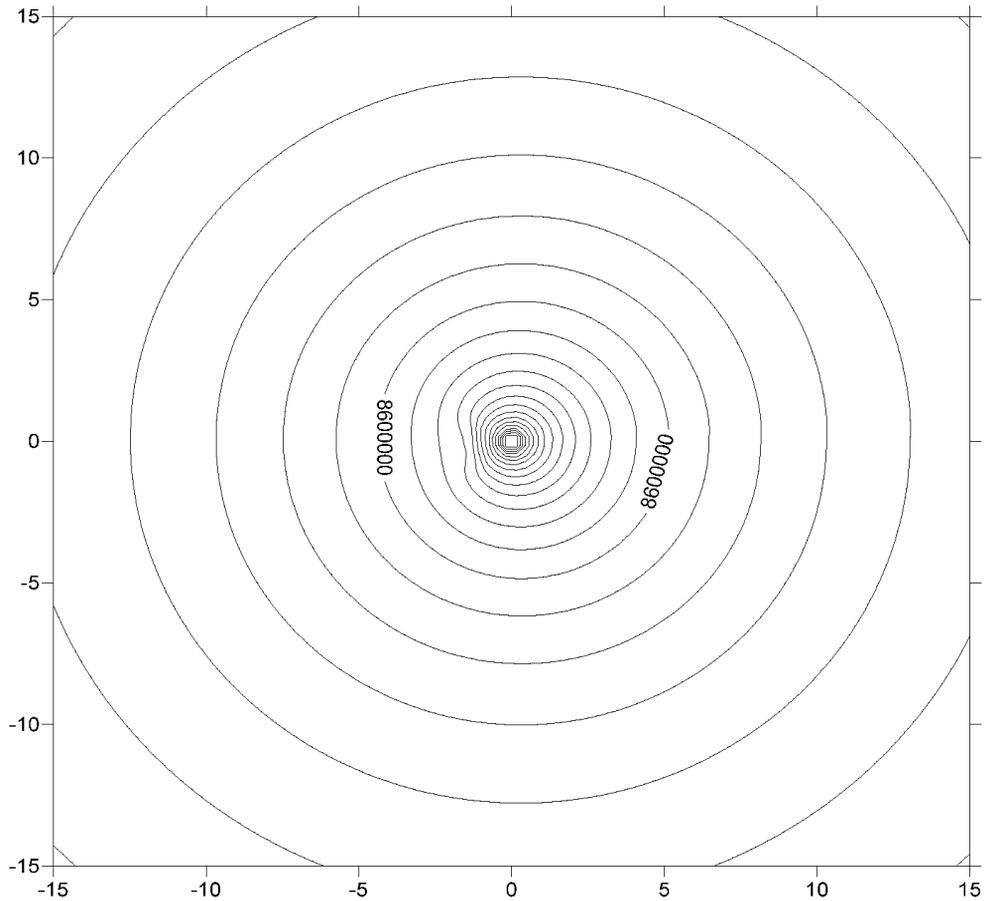
**Fig. 2.** Dependence of temperature change on time at different angles of location of the heterogeneity: 1 — 10°, 2 — 60°, 3 — 150°



**Рис. 3.** Угловое распределение температуры на момент времени  $t = 18$  ч: 1 — 10°, 2 — 60°, 3 — 150°

**Fig. 3.** Angular temperature distribution at time  $t = 18$  h: 1 — 10°, 2 — 60°, 3 — 150°

Такой характер изменения температуры от угла охвата области неоднородной зоны связан с особенностями в распределении полей давления (рис. 4).

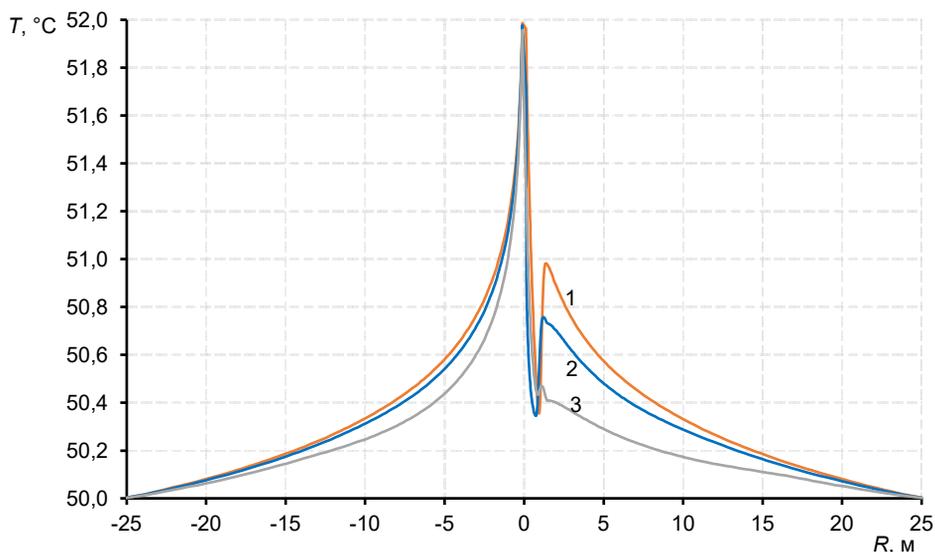


**Рис. 4.** Изолинии давления при  $k_n = 0,1K$  в окрестности скважины (здесь  $K = 0,01 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ )

**Fig. 4.** Pressure isolines at  $k_n = 0.1K$  in the vicinity of the well (here  $K = 0.01 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ )

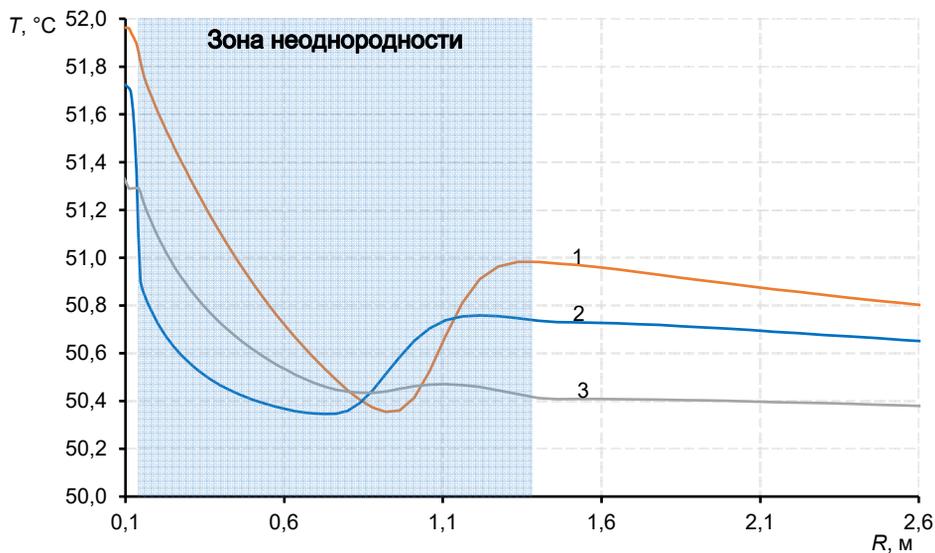
Дальнейшие расчеты формирования температурного поля в неоднородной пористой среде с учетом эффекта Джоуля — Томсона проведены в программном пакете Ansys. Расчеты проведены для области от  $r_{1н} = 0,14 \text{ м}$  до  $r_{2н} = 1,4 \text{ м}$ ,  $k_n = 0,001K$ , где проницаемость пласта  $K = 0,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ . Ниже на рис. 5 приведено распределение температуры (на момент 1 ч после начала притока нефти из пласта) для различных углов охвата зоны неоднородности: 1 —  $10^\circ$ , 2 —  $60^\circ$ , 3 —  $150^\circ$ . На рис. 6 приведена детализация распределения температуры (по рис. 5) для области по радиусу от 0,1 до 2,6 м. Видно, что в зоне неоднородности в зависимости от угла охвата (рис. 5 и 6) наблюдается перераспределение темпов изменения температуры (кривые 1–3, рис. 6).

Такое поведение температуры (рис. 6) в зоне неоднородности обусловлено перераспределением полей давления и потоков в пласте (рис. 7 и 8).



**Рис. 5.** Зависимость температуры по радиусу для момента времени  $t = 1$  ч. Углы охвата зоны неоднородности: 1 —  $10^\circ$ , 2 —  $60^\circ$ , 3 —  $150^\circ$

**Fig. 5.** Temperature dependence along the radius at time  $t = 1$  h. Coverage angles of the heterogeneity zone: 1 —  $10^\circ$ , 2 —  $60^\circ$ , 3 —  $150^\circ$



**Рис. 6.** Зависимость температуры по радиусу (от 0,1 до 2,6 м) для момента времени  $t = 1$  ч. Углы охвата зоны неоднородности: 1 —  $10^\circ$ , 2 —  $60^\circ$ , 3 —  $150^\circ$

**Fig. 6.** Temperature dependence along the radius (from 0.1 to 2.6 m) at time  $t = 1$  h. Coverage angles of the heterogeneity zone: 1 —  $10^\circ$ , 2 —  $60^\circ$ , 3 —  $150^\circ$

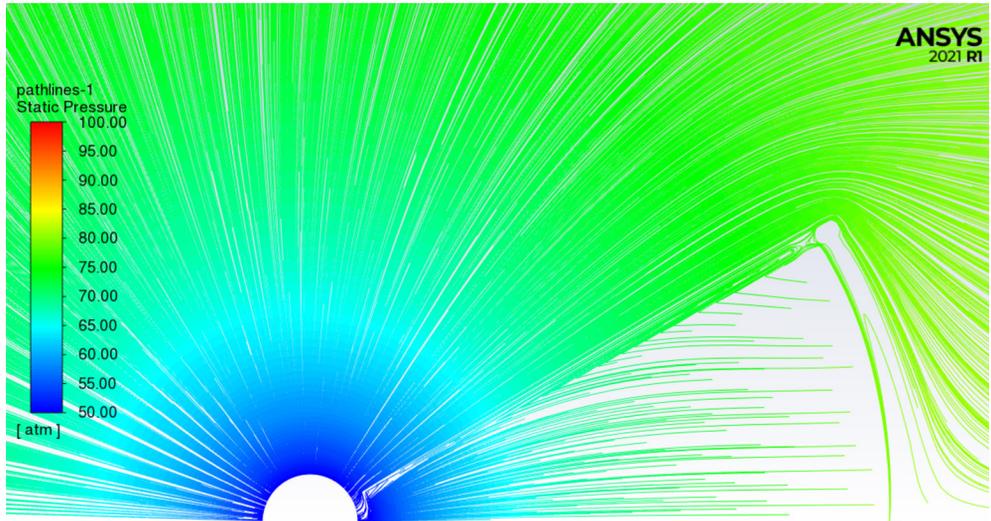


Рис. 7. Линии тока в прискважинной зоне пласта

Fig. 7. Streamlines in the near-wellbore formation zone

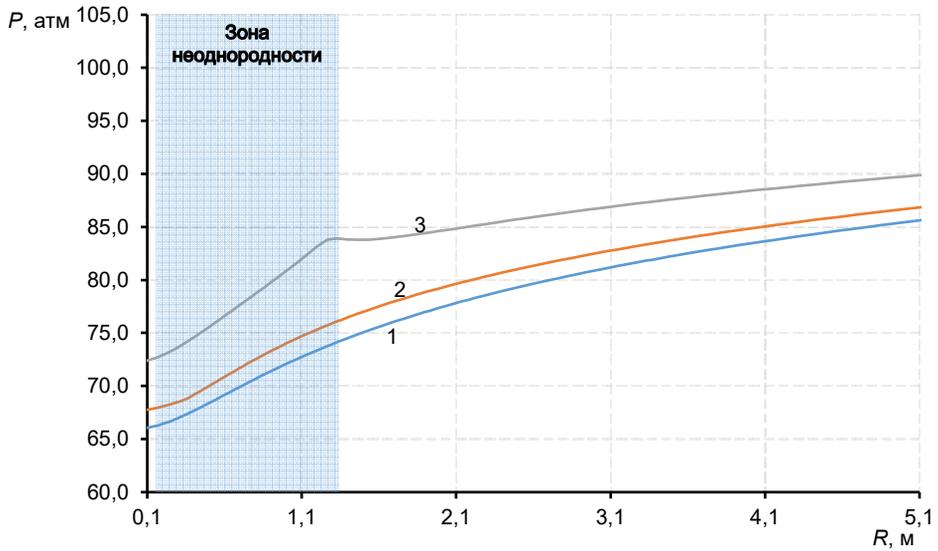
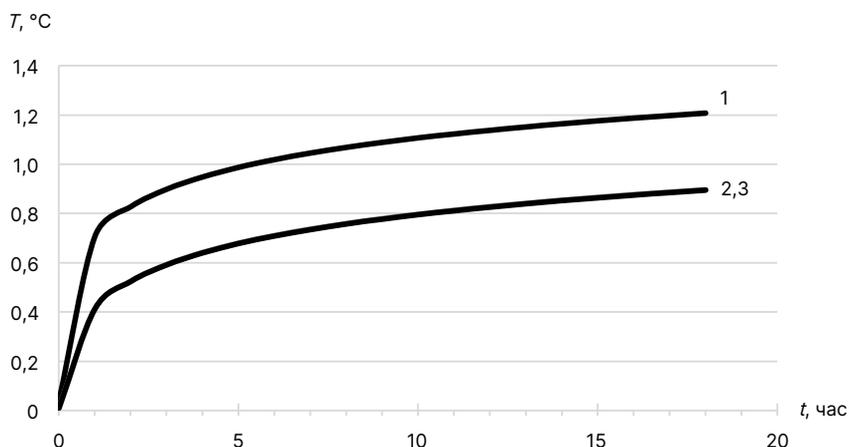


Рис. 8. Зависимость давления вдоль линии  $y$  при  $x = 0,6$  м. Углы охвата зоны неоднородности: 1 —  $10^\circ$ , 2 —  $60^\circ$ , 3 —  $150^\circ$

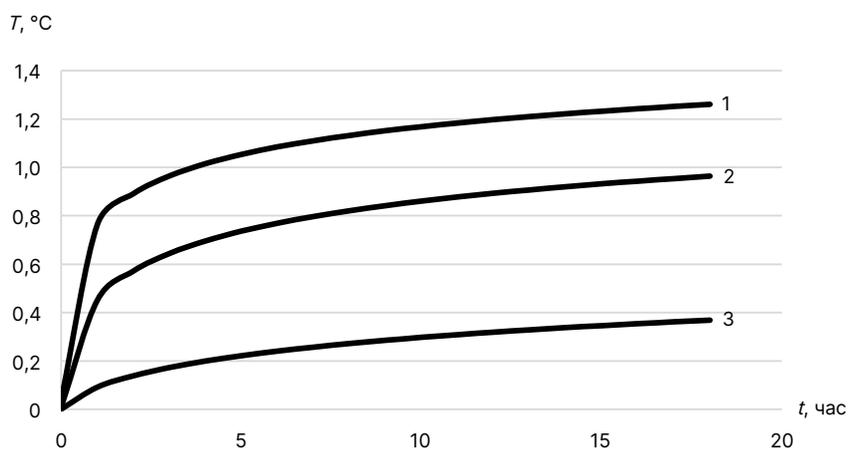
Fig. 8. Dependence of pressure along the line  $y$  at  $x = 0.6$  m. Coverage angles of the heterogeneity zone: 1 —  $10^\circ$ , 2 —  $60^\circ$ , 3 —  $150^\circ$

На рис. 9–10 приведены результаты расчета изменения температуры во времени для различных углов охвата зоны неоднородности при вариации проницаемости неоднородной зоны.



**Рис. 9.** Зависимость температуры от времени для угла расположения неоднородности  $10^\circ$ . Проницаемость неоднородной зоны: 1 —  $k_n = 0,001K$ , 2 —  $k_n = 0,1K$ , 3 —  $k_n = 10K$  (здесь  $K = 0,01 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ )

**Fig. 9.** Dependence of temperature change on time at the angle of the location of the heterogeneity  $10^\circ$ . Permeability of the heterogeneity zone: 1 —  $k_n = 0,001K$ , 2 —  $k_n = 0,1K$ , 3 —  $k_n = 10K$  (here  $K = 0.01 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ )



**Рис. 10.** Зависимость температуры от времени для угла расположения неоднородности  $60^\circ$ . Проницаемость неоднородной зоны: 1 —  $k_n = 0,001K$ , 2 —  $k_n = 0,1K$ , 3 —  $k_n = 10K$  (здесь  $K = 0,01 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ )

**Fig. 10.** Dependence of temperature change on time at the angle of the location of the heterogeneity  $60^\circ$ . Permeability of the heterogeneity zone: 1 —  $k_n = 0,001K$ , 2 —  $k_n = 0,1K$ , 3 —  $k_n = 10K$  (here  $K = 0.01 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ )

Видно, что увеличение проницаемости неоднородной зоны приводит к снижению температурных аномалий. При малых углах охвата области неоднородности ( $10^\circ$ ) различия в изменении температуры для проницаемостей  $k_n = 0,1K$ ,  $k_n = 10K$  (кривые 2 и 3, рис. 9) практически не наблюдаются.

Вместе с увеличением угла охвата зоны неоднородности ( $60^\circ$ ) повышается ее проницаемость, что приводит к существенному изменению температурной аномалии (кривые 1–3, рис. 10).

## Заключение

Разработана математическая модель для расчета изменения температуры в пласте с неоднородной зоной по проницаемости для однофазной неизотермической фильтрации с учетом термодинамических эффектов. В рамках предложенной модели проанализированы особенности формирования нестационарных полей температуры и давления и исследовано влияние зоны неоднородности на динамику температуры притекающего флюида.

Показано, что в зависимости от соотношения проницаемостей неоднородной зоны и пласта, а также от угла охвата неоднородной зоны наблюдается различный темп установления температуры напротив неоднородной зоны после пуска скважины в работу.

Полученные результаты дополняют известные данные по формированию температурных полей в пластовых условиях при неизотермической фильтрации флюида с учетом термодинамических эффектов и могут быть использованы при интерпретации результатов многодатчиковых температурных исследований скважин в условиях фильтрации флюидов в неоднородных по проницаемости пластах.

## Список источников

- Валиуллин Р. А., Рамазанов А. Ш. 1992. Термические исследования при компрессорном освоении скважин. Уфа: Изд-во Башкир. ун-та. 119 с.
- Валиуллин Р. А., Рамазанов А. Ш., Шарафутдинов Р. Ф. 1994. Баротермический эффект при трехфазной фильтрации с фазовыми переходами // Известия РАН. Механика жидкости и газа. № 6. С. 113–117.
- Валиуллин Р. А., Рамазанов А. Ш., Шарафутдинов Р. Ф. 1995. Термометрия многофазных потоков. Уфа: Изд-во Башкир. ун-та.
- Валиуллин Р. А., Шарафутдинов Р. Ф., Садретдинов А. А., Бочков А. С. 2008. Исследование радиально-углового распределения температуры при неизотермической двухфазной фильтрации нефти и воды // Прикладная механика и техническая физика. Том 49. № 6 (292). С. 992–997. <https://doi.org/10.1007/s10808-008-0123-2>
- Газизов А. А. 2002. Увеличение нефтеотдачи неоднородных пластов на поздней стадии разработки. М.: Недра. 639 с.
- Гиматуллин Ш. К., Ширковский А. И. 1982. Физика нефтяного и газового пласта. М.: Недра. 311 с.

- Исламов Д. Ф., Рамазанов А. Ш. 2022. Исследование неизотермической двумерной фильтрации в слоистом пласте // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 75. С. 100–112. <https://doi.org/10.17223/19988621/75/9>
- Люшин С. Ф., Рассказов В. А., Шейх-Али Д. М. и др. 1961. Борьба с отложениями парафина при добыче нефти. М.: Гостоптехиздат. 150 с.
- Требин Г. Ф., Капырин Ю. Ф., Лиманский О. Г. 1978. Оценка температурной депрессии в призабойной зоне эксплуатационных скважин // Труды ВНИИ. № 64. С. 16–22.
- Федоров К. М., Шарафутдинов Р. Ф. 1989. К теории неизотермической фильтрации с фазовыми переходами // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. № 5. С. 78–85.
- Чекалюк Э. Б. 1965. Термодинамика нефтяного пласта. М.: Недра. 238 с.
- Шарафутдинов Р. Ф., Бочков А. С., Шарипов А. М., Садретдинов А. А. 2017. Фильтрация газированной нефти при наличии фазовых переходов в пористой среде с неоднородной проницаемостью // Прикладная механика и техническая физика. Том 58. № 2 (342). С. 98–102. <https://doi.org/10.15372/PMTF20170210>
- Aslanyan A., Aslanyan I., Salamatin A., Karuzinm A., Fesina Yu., Zaripov I., Skutin V., Al Ghafri Z., Khalid Yarabi M., Ali Al-Maharbi A. 2014. Numerical temperature modelling for quantitative analysis of low-compressible fluid production // Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference (10–13 November 2014, Abu Dhabi, UAE). Pp. 131–149. Paper SPE-172090-MS. <https://doi.org/10.2118/172090-MS>
- Bahonar M., Azaiez J., John Chen Zh. 2011. Transient nonisothermal fully coupled wellbore/reservoir model for gas-well testing, Part 1: Modelling // Journal of Canadian Petroleum Technology. Vol. 50. No. 9. Pp. 37–50. Paper SPE-149617-PA. <https://doi.org/10.2118/149617-PA>
- Durlofsky L., Aziz K. 2004. Advanced Techniques for Reservoir Simulation and Modeling of Nonconventional Wells. Final Report. Stanford University. 224 p.
- Li Z. 2010. Interpreting Horizontal Well Flow Profiles and Optimizing Well Performance by Downhole Temperature and Pressure Data: Ph. D. diss. Texas A&M University. 190 p.
- Lucia A., Voskov D., James S. C., Zaydullin R., Henley H. 2013. Fully compositional and thermal reservoir simulations efficiently compare EOR techniques // SPE Unconventional Resources Conference (5–7 November 2013, Calgary, Alberta, Canada). Pp. 101–119. Paper SPE-167184-MS. <https://doi.org/10.2118/167184-MS>
- Muradov K. 2010. Temperature Modelling and Real-Time Flow Rate Allocation in Wells with Advanced Completion: Ph. D. diss. Heriot-Watt University. 210 p.
- Palabiyik Yi., Tureyen O. I., Onur M., Deniz M. 2013. A study on pressure and temperature behaviors of geothermal wells in single-phase liquid reservoirs // Proceedings of the 38<sup>th</sup> Workshop on Geothermal Reservoir Engineering (11–13 February 2013, Stanford, California). Pp. 83–97. Paper SGP-TR-198.
- Ramazanov A. Sh., Valiullin R. A., Sadretdinov A. A., Shako V. V., Pimenov V. P., Fedorov V. N., Belov K. V. 2010. Thermal modeling for characterization of near wellbore zone and zonal allocation // SPE Russian Oil & Gas Conference and Exhibition (26–28 October 2010, Moscow, Russia). Pp. 739–760. Paper SPE-136256-MS. <https://doi.org/10.2118/136256-MS>
- Ribeiro P. M., Horne R. N. 2013. Pressure and temperature transient analysis: Hydraulic fractured well application // SPE Annual Technical Conference and Exhibition (30 September — 2 October 2013, New Orleans, Louisiana, USA). Pp. 1763–1783. Paper SPE-166222-MS. <https://doi.org/10.2118/166222-MS>

Valiullin R., Ramazanov A., Sadretdinov A., Sharafutdinov R., Shako V., Sidorova M., Kryuchatov D. 2014. Field study of temperature simulators application for quantitative interpretation of transient thermal logging in a multipay well // SPE Russian Oil and Gas Exploration & Production Technical Conference and Exhibition (14–16 October 2014, Moscow, Russia). Pp. 46–58. Paper SPE-171233-MS. <https://doi.org/10.2118/171233-MS>

## References

- Valiullin, R. A., & Ramazanov, A. Sh. (1992). *Thermal research during compressor development of wells*. Bashkir State University Publishing House. [In Russian]
- Valiullin, R. A., Ramazanov, A. Sh., & Sharafutdinov, R. F. (1994). Barothermic effect in three-phase filtration with phase transitions. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, (6), 113–117. [In Russian]
- Valiullin, R. A., Ramazanov, A. Sh., & Sharafutdinov, R. F. (1995). *Thermometry of multiphase flows*. Bashkir State University Publishing House. [In Russian]
- Valiullin, R. A., Sharafutdinov, R. F., Sadretdinov, A. A., & Bochkov, A. S. (2008). Radial angular temperature distributions for nonisothermal two-phase filtration of oil and water. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 49(6), 992–997. <https://doi.org/10.1007/s10808-008-0123-2> [In Russian]
- Gazizov, A. A. (2002). *Increased oil recovery of heterogeneous reservoirs at a late stage of development*. Nedra. [In Russian]
- Gimatudinov, Sh. K., & Shirkovsky, A. I. (1982). *Physics of the oil and gas reservoir*. Nedra. [In Russian]
- Islamov, D. F., & Ramazanov, A. Sh. (2022). Investigation of nonisothermal two-dimensional filtration in multilayer reservoir. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, (75), 100–112. <https://doi.org/10.17223/19988621/75/9> [In Russian]
- Lyushin, S. F., Rasskazov, V. A., Sheikh-Ali, D. M. et al. (1961). *Fight against paraffin deposits during oil production*. Gostoptekhizdat. [In Russian]
- Trebin, G. F., Kapyrin, Ju. F., & Limanskij, O. G. (1978). Estimation of temperature depression in the bottomhole zone of production wells. *Trudy VNII*, (64), 16–22. [In Russian]
- Fedorov, K. M., & Sharafutdinov, R. F. (1989). On the theory of non-isothermal filtration with phase transitions. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*, (5), 78–85. [In Russian]
- Chekalyuk, E. B. (1965). *Thermodynamics of an oil reservoir*. Nedra. [In Russian]
- Sharafutdinov, R. F., Bochkov, A. S., Sharipov, A. M., & Sadretdinov, A. A. (2017). Filtration of live oil in the presence of phase transitions in a porous medium with inhomogeneous permeability. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 58(2), 271–274. <https://doi.org/10.1134/S0021894417020109>
- Aslanyan, A., Aslanyan, I., Salamatin, A., Karuzinm, A., Fesina, Yu., Zaripov, I., Skutin, V., Al Ghafri, Z., Khalid Yarabi, M., & Ali Al-Maharbi, A. (2014). Numerical temperature modeling for quantitative analysis of low-compressible fluid production. *Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference* (November 10–13, 2014, Abu Dhabi, UAE), 131–149, Paper SPE-172090-MS. <https://doi.org/10.2118/172090-MS>

- Bahonar, M., Azaiez, J., & John Chen, Zh. (2011). Transient nonisothermal fully coupled wellbore/reservoir model for gas-well testing, Part 1: Modelling. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 50(9), 37–50, Paper SPE-149617-PA. <https://doi.org/10.2118/149617-PA>
- Durlofsky, L., & Aziz, K. (2004). *Advanced techniques for reservoir simulation and modeling of non-conventional wells. Final Report*. Stanford University.
- Li, Z. (2010). *Interpreting horizontal well flow profiles and optimizing well performance by downhole temperature and pressure data* [Doctoral dissertation, Texas A&M University].
- Lucia, A., Voskov, D., James, S. C., Zaydullin, R., & Henley, H. (2013). Fully compositional and thermal reservoir simulations efficiently compare EOR techniques. *SPE Unconventional Resources Conference* (November 5–7, 2013, Calgary, Alberta, Canada), 101–119, Paper SPE-167184-MS. <https://doi.org/10.2118/167184-MS>
- Muradov, K. (2010). *Temperature modelling and real-time flow rate allocation in wells with advanced completion* [Doctoral dissertation, Heriot-Watt University].
- Palabiyik, Yi., Tureyen, O. I., Onur, M., & Deniz, M. (2013). A study on pressure and temperature behaviors of geothermal wells in single-phase liquid reservoirs. *Proceedings of the 38<sup>th</sup> Workshop on Geothermal Reservoir Engineering* (February 11–13, 2013, Stanford, California), 83–97, Paper SGP-TR-198.
- Ramazanov, A. Sh., Valiullin, R. A., Sadretdinov, A. A., Shako, V. V., Pimenov, V. P., Fedorov, V. N., & Belov, K. V. (2010). Thermal modeling for characterization of near wellbore zone and zonal allocation. *SPE Russian Oil & Gas Conference and Exhibition* (October 26–28, 2010, Moscow, Russia), 739–760, Paper SPE-136256-MS. <https://doi.org/10.2118/136256-MS>
- Ribeiro, P. M., & Horne, R. N. (2013). Pressure and temperature transient analysis: Hydraulic fractured well application. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition* (September 30 – October 2, 2013, New Orleans, Louisiana, USA), 1763–1783, Paper SPE-166222-MS. <https://doi.org/10.2118/166222-MS>
- Valiullin, R., Ramazanov, A., Sadretdinov, A., Sharafutdinov, R., Shako, V., Sidorova, M., & Kryuchatov, D. (2014). Field study of temperature simulators application for quantitative interpretation of transient thermal logging in a multipay well. *SPE Russian Oil and Gas Exploration & Production Technical Conference and Exhibition* (October 14–16, 2014, Moscow, Russia), 46–58, Paper SPE-171233-MS. <https://doi.org/10.2118/171233-MS>

## Информация об авторах

Малика Джалилевна Сулейманова, аспирант, кафедра геофизики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия  
[malika\\_sul@mail.ru](mailto:malika_sul@mail.ru)

Рамиль Фаизырович Шарафутдинов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры геофизики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия  
[gframil@inbox.ru](mailto:gframil@inbox.ru)

Ильдар Вакифович Канафин, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, кафедра геофизики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия  
[vradlik@gmail.com](mailto:vradlik@gmail.com)

## Information about the authors

*Malika D. Suleimanova*, Postgraduate Student, Department of Geophysics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia  
malika\_sul@mail.ru

*Ramil F. Sharafutdinov*, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Geophysics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia  
gframil@inbox.ru

*Ildar V. Kanafin*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Lecturer, Department of Geophysics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia  
vradlik@gmail.com

## Численное моделирование фазового перехода «вода — лед» в высокопроницаемых водонасыщенных пористых средах

Олег Анатольевич Симонов<sup>1,3</sup>, Людмила Николаевна Филимонова<sup>2,3</sup>✉

<sup>1</sup> Тюменский научный центр СО РАН, Тюмень, Россия

<sup>2</sup> Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, Россия

<sup>3</sup> Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия  
Контакт для переписки: [filimonovaln@mail.ru](mailto:filimonovaln@mail.ru)✉

**Аннотация.** Моделирование фазового перехода в пористых средах — сложная математическая задача, с которой часто сталкиваются на практике. Для ее успешного решения требуется учет многих параметров, в частности конвективного движения незамерзшей воды. Свободные конвективные токи в пористой среде влияют на процесс фазового перехода при ее промерзании, но очевидно, что в некоторых случаях влиянием этого явления можно пренебречь. Целью данной работы является исследование механизмов и степени влияния свободной конвекции на промерзание водонасыщенной пористой среды. Численными методами моделировался фазовый переход в пористой среде при учете инверсии плотности воды. Изучалась роль конвективного течения на кристаллизацию воды в пористой среде, а также влияние выбранной модели воды на конвективные потоки с целью получения критериев, определяющих необходимость учета данных физических явлений и свойств в решении теплофизических задач с фазовым переходом в пористых средах, что может позволить существенно упростить моделируемую систему. Решена осесимметричная модельная задача с вертикальным охлаждающим элементом, погруженным в водонасыщенную пористую среду. Температура охлаждающего элемента медленно изменялась, а температура на внешней границе пористой среды поддерживалась постоянной.

Проведена оценка влияния конвективного теплопереноса на процесс фазового перехода в пористой среде при учете явления инверсии плотности воды. Показано, что наличие максимума плотности воды существенным образом определяет процесс фазового перехода в пористых средах. В сравнении с численными моде-

лями, не учитывающими явление инверсии плотности, при применении модели реальной воды происходит перестройка течения, уменьшается интенсивность конвективного потока, увеличивается объем образовавшегося льда. Исследовано влияние проницаемости пористой среды на структуру возникающего конвективного потока. С понижением проницаемости наличие максимума плотности приводит к уменьшению роли конвективного теплопереноса, что позволяет в большинстве случаев не учитывать его в задачах с фазовым переходом «вода — лед» в пористых средах.

**Ключевые слова:** пористая среда, свободная конвекция, фазовый переход, максимум плотности воды

**Благодарности:** постановка задачи выполнена в рамках государственного задания на 2021-2030 гг. (№ ЕГИСУ НИОКТР 121041600041-0). Вычислительные эксперименты и анализ результатов численного исследования выполнены в рамках государственного задания (№ 121030500156-6). При общей поддержке технологического проекта «Цифровой керн» Западно-Сибирского межрегионального научно-образовательного центра мирового уровня.

**Цитирование:** Симонов О. А., Филимонова Л. Н. 2023. Численное моделирование фазового перехода «вода — лед» в высокопроницаемых водонасыщенных пористых средах // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 1 (33). С. 22–38. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-22-38>

Поступила 19.01.2023; одобрена 27.03.2023; принята 31.03.2023

## Numerical simulation of the water-ice phase transition in highly permeable water-saturated porous media

Oleg A. Simonov<sup>1,3</sup>, Lyudmila N. Filimonova<sup>2,3</sup>✉

<sup>1</sup> Tyumen Scientific Center of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia

<sup>2</sup> Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia

<sup>3</sup> Tyumen Industrial University, Tyumen, Russia  
Corresponding author: [filimonovaln@mail.ru](mailto:filimonovaln@mail.ru)✉

**Abstract.** Modeling a phase transition in porous media is a complex mathematical problem that is often encountered in practice. For its successful solution, it is neces-

sary to take into account many parameters, in particular, the convective movement of unfrozen water. Free convective currents in a porous medium, of course, affect the process of phase transition during its freezing, but it is obvious that in some cases the influence of this phenomenon can be neglected. The purpose of this work is to study the mechanisms and degree of influence of free convection on the freezing of a water-saturated porous medium. The phase transition in a porous medium was simulated numerically, taking into account the inversion of the water density. The role of the convective flow on the crystallization of water in a porous medium was studied, as well as the influence of the selected water model on convective flows in order to obtain criteria that determine the need to take into account these physical phenomena and properties in solving thermophysical problems with a phase transition in porous media, which can significantly simplify the modeled system. An axisymmetric model problem with a vertical cooling element immersed in a water-saturated porous medium is solved. The temperature of the cooling element changed slowly, and the temperature at the outer boundary of the porous medium was maintained constant.

The influence of convective heat transfer on the process of phase transition in a porous medium is estimated taking into account the phenomenon of water density inversion. It is shown that the presence of a water density maximum significantly determines the process of phase transition in porous media. In comparison with numerical models that do not take into account the phenomenon of density inversion, when using the real water model, the flow is restructured, the intensity of the convective flow decreases, and the volume of ice formed increases. The influence of the permeability of a porous medium on the structure of the resulting convective flow has been studied; with a decrease in permeability, the presence of a density maximum leads to a decrease in the role of convective heat transfer, which in most cases makes it possible to ignore it in problems with an ice-water phase transition in porous media.

**Keywords:** porous medium, free convection, phase transition, maximum water density

**Acknowledgements:** the task was set within the framework of the state task for 2021–2030 (No. EGISU NIOKTR 121041600041-0). Computational experiments and analysis of the results of a numerical study were carried out within the framework of the state task (No. 121030500156-6). With the general support of the technological project “Digital Core” of the West Siberian Interregional Scientific and Educational Center of the world level.

**Citation:** Simonov, O. A., & Filimonova, L. N. (2023). Numerical simulation of the water-ice phase transition in highly permeable water-saturated porous media. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(1), 22–38. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-22-38>

Received January 19, 2023; Reviewed March 27, 2023; Accepted March 31, 2023

## Введение

Фазовый переход «вода — лед» в водонасыщенных пористых средах — широко распространенное в природе явление, мы сталкиваемся с ним ежедневно и повсеместно. Корректное описание этого явления — безусловно, актуальная задача.

Фазовый переход в пористой среде — это сложный физический процесс, при моделировании которого необходимо учитывать перенос тепла и массы, теплофизические, механические и петрофизические свойства пористой среды, свойства флюида и их изменение в зависимости от температуры и давления [Ершов, 2001; Григорьев и др., 2017]. Зачастую при моделировании таких систем исследователи сталкиваются с недостатком данных о свойствах пористых сред и флюидов, что приводит к необходимости использовать те или иные допущения или модели.

Цель данной работы заключается в численном исследовании роли конвективных потоков в задачах с кристаллизацией воды в пористой среде и изучении влияния на них выбранной модели воды с последующей выработкой критериев, определяющих необходимость учета данных физических явлений и свойств в решении теплофизических задач с фазовым переходом в пористых средах, что позволит существенно упростить моделируемую систему.

Действительно, в результате охлаждения пористой среды, способствующего кристаллизации воды, возникает градиент температуры, который приводит к образованию конвективного движения воды в пористой среде. Конвективные потоки влияют на поступление тепла в область фазового перехода, что может существенным образом определять степень промерзания пористой среды. Однако при моделировании фазового перехода в пористой среде конвективные потоки, как правило, не учитываются, что не всегда корректно: в некоторых случаях ими нельзя пренебрегать [Симонов, Филимонова, 2019].

Свободная конвекция возникает в результате изменения плотности воды от температуры. Изучению этого явления посвящено множество классических, теоретических и экспериментальных работ [Гарифуллин, 2000; Anselmi и др., 1990; Cawley, McBride, 2004]. Плотность воды зависит от температуры немонотонно, при атмосферном давлении максимальная плотность воды ( $999,972 \text{ кг/м}^3$ ) наблюдается при температуре  $277,13 \text{ К}$  ( $3,98 \text{ }^\circ\text{C}$ ). Это явление определяет особенности свободной конвекции в воде. Авторами ранее показано, что при охлаждении объема с водой необходимо учитывать инверсию плотности воды, т. к. это приводит к принципиальной перестройке конвективного потока [Симонов, Филимонова, 2019]. В случае охлаждения водонасыщенной пористой среды было показано, что существуют определенные безразмерные параметры, при которых явление инверсии плотности можно не учитывать [Симонов, Филимонова, 2021].

В данной работе, которая является продолжением цикла наших исследований, методом прямого численного моделирования изучалось свободное конвективное течение в водонасыщенных пористых средах с учетом явления инверсии плотности воды и фазового перехода «вода — лед».

## Постановка исследовательской задачи

Прямое численное моделирование проводилось в цилиндрической пористой среде с радиусом  $R = 0,5$  м и высотой  $h = 0,1$  м; вдоль оси цилиндра был расположен вертикальный охлаждающий элемент с радиусом  $r = 0,01$  м (рис. 1);  $\vec{g}$  — вектор ускорения свободного падения ( $\text{м/с}^2$ ), направленный противоположно оси  $z$ .

Конвективное течение наиболее интенсивно около охлаждающего стержня. Охлажденная вода движется вдоль охлаждающего элемента, затем вдоль горизонтальной стенки моделируемой области от него. Вдоль другой горизонтальной стенки еще не охлажденная вода движется к охлаждающему элементу, что приводит к неравномерности распределения температуры по вертикальной координате. За счет кондуктивного теплопереноса по вертикали эта неравномерность по мере удаления от оси постепенно сглаживается. В численном эксперименте [Симонов, Филимонова, 2021] показано, что на расстоянии, большем чем  $R > 2h$ , нет градиента температуры по координате  $z$ . Следовательно, в расчетах можно было ограничиться  $R = 2h$ , но для наглядности представления конвективного движения и фазового перехода в данном исследовании решено принять  $R = 5h$ .

Предполагаем, что в данной задаче, как и в случае конвективного течения в пористой среде [Симонов, Филимонова, 2021], течение будет определяться безразмерным соотношением физических параметров. В работе [Симонов, Филимонова, 2021] предложен безразмерный параметр:

$$\alpha = \frac{\Delta\rho C_w}{(\rho C)_{ef}} \frac{mkg h}{\nu\chi}, \quad (1)$$

где  $m$  — пористость;  $k$  — коэффициент абсолютной проницаемости пористой среды,  $\text{м}^2$ ;  $h$  — характерный размер, в моделируемом случае — высота охлаждающего элемента, м;  $\chi = \lambda/(\rho C)_{ef}$  — коэффициент температуропроводности пористой среды, заполненной водой,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $(\rho C)_{ef} = (1 - m)\rho_s C_s + mS_w\rho_w C_w + mS_i\rho_i C_i$  — объемная теплоемкость насыщенной пористой среды,  $\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$ ;  $\rho_j$  ( $j = s, w, i$ ) — плотность скелета, воды и льда,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $C_j$  ( $j = s, w, i$ ) — удельная теплоемкость скелета, воды и льда,  $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;  $\lambda$  — эффективный коэффициент теплопроводности,  $\text{Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$ , рассчитываемый по формуле:  $\lambda = (1 - m)\lambda_s + mS_w\lambda_w + mS_i\lambda_i$ ;  $\lambda_j$  ( $j = s, w, i$ ) — коэффициент теплопроводности скелета, воды и льда,  $\text{Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$ ;  $\nu$  — кинематическая вязкость воды,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\Delta\rho = 0,129 \text{ кг}/\text{м}^3$  — разница между максимальной плотностью воды и плотностью воды при температуре 273,15 К ( $0^\circ\text{C}$ ).

Предложенный параметр получен в результате обезразмеривания уравнения теплопроводности на характерный пространственный размер  $h$  и характерную скорость, оцененную из уравнения Дарси. По своему физическому смыслу предложенный параметр — соотношение конвективного и кондуктивного теплового потока, т. е. модифицированное число Рэлея, определяющее движение жидкости под воздействием градиента температуры в пористой среде.

В классическом виде число Рэлея включает в себя коэффициент объемного расширения жидкости от температуры. В нашем случае плотность от температуры зависит

немонотонно, что не позволяет ввести понятие коэффициента объемного расширения. Так как в данной работе исследуются течения вблизи максимума плотности воды и кристаллизации, в качестве оценки изменения плотности используем разность плотности воды в максимуме ее плотности и при нулевой температуре. Это допущение накладывает ограничения на область применения параметра  $\alpha$  для оценки подобия течений по температуре, он применим в диапазоне температур от 0 до 8 °С.

Предлагаемый параметр  $\alpha$  позволяет масштабировать геометрические параметры области моделирования с учетом принципов подобия и размерности механики.

Пористая среда насыщена водой. Начальная температура воды и пористой среды принималась равной 277,13 К (3,98 °С), при этой температуре плотность воды максимальна. Температура на охлаждающем элементе линейно уменьшалась на 15 °С за время  $10^8$  с, затем линейно увеличивалась до начальной температуры за тот же временной промежуток. Температура на внешней границе поддерживалась равной 277,13 К (3,98 °С). Верхняя и нижняя границы модели гидравлически непроницаемы и теплоизолированы. Внешняя граница гидравлически проницаема, через нее происходит отток жидкости, обусловленный возникновением льда в пористой среде. Гидростатическое давление на внешней границе соответствует гидростатическому давлению столба жидкости  $P = \rho gh$ . В нулевой момент времени скорость движения воды в пористой среде равняется нулю.

Для описания процессов тепломассопереноса при замораживании/оттаивании льда в пористой среде приняты следующие допущения: в каждой отдельной точке пространства температура скелета пористой среды и насыщающих веществ одинакова; скелет пористой среды и лед несжимаемы и неподвижны; вода несжимаема; пористость скелета постоянна; образование льда происходит в равновесном режиме (кинетика процесса не рассматривается); плотность воды зависит только от температуры, учитывается инверсия плотности.

Численное моделирование производилось методом конечных объемов с использованием вычислительного пакета OpenFOAM [Ганопольский, Гильманов, 2022]. Радиальная симметрия данной задачи позволяет провести расчеты в одном секторе величиной 1° (рис. 1). Расчеты проводились на прямоугольной сетке, состоящей из 4 936 элементов. Размер расчетной области — 0,1 × 0,4 м. Средняя площадь одной ячейки —  $8 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>. Проверка сходимости выполнена по методике, описанной в [Симонов, Филимонова, 2019].

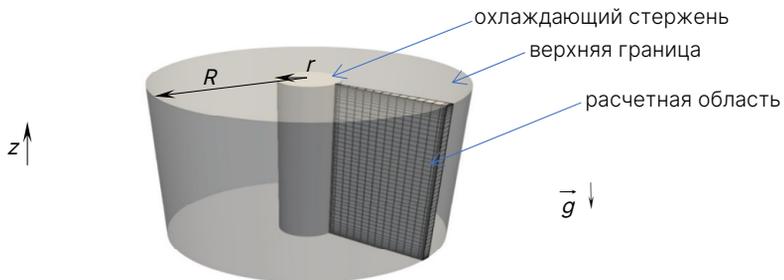


Рис. 1. Геометрия расчетной области

Fig. 1. The geometry of the computational domain

Для описания зависимости плотности ( $\rho_s$ ), теплоемкости ( $C_s$ ) и теплопроводности ( $\lambda_s$ ) скелета пористой среды от температуры ( $T$ ) использовались полиномиальные интерполяции (коэффициенты для них представлены в таблице 1):

$$f(T) = C_0 + C_1T + C_2T^2 + C_3T^3 + C_4T^4 + C_5T^5.$$

**Таблица 1.** Коэффициенты для полиномиальной интерполяции физических характеристик скелета пористой среды

**Table 1.** Coefficients for polynomial interpolation of the physical characteristics of the skeleton of a porous medium

	$\rho_s, \text{кг/м}^3$	$C_s, \text{Дж/(кг} \cdot \text{К)}$	$\lambda_s, \text{Вт/(м} \cdot \text{К)}$
$C_0$	1 354,21	115,302 2	0,149 845 8
$C_1$	0,043 035 77	3,063 043	0,005 193 887
$C_2$	-1,137 786 E-4	-0,003 472 486	-1,138 604 E-5
$C_3$	3,453 539 E-8	1,817 176 E-6	1,017 063 E-8
$C_4$	0	-3,515 478 E-10	-4,122 789 E-12
$C_5$	0	0	6,547 539 E-16

Для описания зависимости плотности, вязкости, теплоемкости и теплопроводности воды от температуры использовались такие же полиномиальные интерполяции, как в работе [Симонов, Филимонова, 2019]. Значение пористости ( $m$ ) принималось равным 0,476 4, что соответствует кубическому типу упаковки пористой среды, состоящей из сферических частиц [Игошин, Сабуров, 2015].

## Математическая модель

Запишем уравнения баланса массы для подвижной жидкой фазы (воды) и неподвижной твердой фазы (льда):

$$\frac{\partial(mS_w\rho_w)}{\partial t} + \text{div}(mS_w\rho_w\vec{v}_w) = -J_i, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(mS_i\rho_i)}{\partial t} = J_i, \quad (3)$$

где  $\vec{v}_w$  — скорость воды, м/с;  $t$  — время, с;  $S_j$  ( $j = w, i$ ) — насыщенность пористой среды водой и льдом, д. ед.;  $J_i$  — интенсивность льдообразования, кг/(м<sup>3</sup>·с).

В качестве закона движения примем линейный закон фильтрации Дарси [Басниев и др., 1993]:

$$mS_w\vec{v}_w = -\frac{k_w}{\mu}(\text{grad } p - \rho_w\vec{g}). \quad (4)$$

Здесь  $k_w = kk_{rw}$  — коэффициент проницаемости пористой среды для воды,  $m^2$ ;  $k_{rw}$  — относительная фазовая проницаемость воды;  $\mu$  — динамическая вязкость флюида,  $Па \cdot c$ ;  $p$  — давление,  $Па$ .

Сумма насыщенностей пористой среды водой и льдом равна единице:

$$S_w + S_i = 1. \quad (5)$$

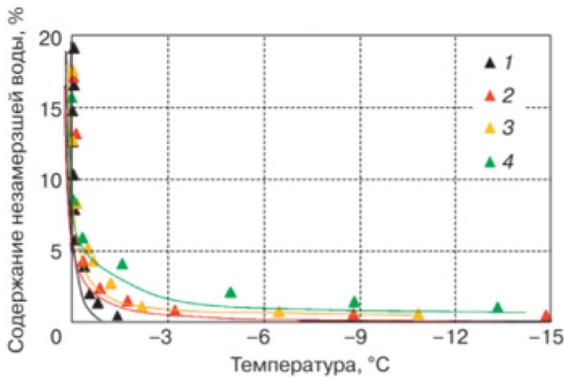
Уравнение баланса энергии:

$$(\rho C)_{ef} \frac{\partial T}{\partial t} + m S_w \rho_w C_w \bar{v}_w \left( \text{grad} T - \frac{\bar{g}}{C_w} \right) - \text{div}(\lambda \text{grad} T) = m \rho_i L_i \frac{\partial S_i}{\partial t}, \quad (6)$$

где  $T$  — температура,  $K$ ;  $L_i$  — удельная теплота плавления льда,  $Дж/кг$ .

Для изучения структуры течения в данной работе пренебрегаем наличием солей, газов и каких-либо примесей, несмотря на их содержание в воде в реальных условиях.

Некоторое количество воды удерживается в грунте (в мелких и тупиковых порах, в узких местах контактов зерен, не участвующих в фильтрации жидкостей), а также на поверхности породы (в виде неподвижных местных пленок и микрокапель). Эта часть воды является неподвижной фазой. Количество воды, сохраняющейся незамерзшей, убывает при понижении температуры грунта вплоть до  $-70^\circ C$  [Цытович, 1973]. Каждому типу грунта соответствует своя кривая содержания незамерзшей воды, которая зависит от дисперсности скелета грунта и начальной засоленности. Вода интенсивно замерзает до  $-1,5^\circ C$ , далее остаточная водонасыщенность не меняется [Чувиллин и др., 2020]. Следовательно, учитывая экспериментальные данные [Чувиллин и др., 2020], предполагаем, что фазовый переход «вода — лед» в песчаном грунте начинается при  $0^\circ C$  ( $273,15 K$ ), а заканчивается при  $-1,5^\circ C$ . Остаточную водонасыщенность принимаем равной 1% (рис. 2).



**Рис. 2.** Зависимость содержания незамерзшей воды от температуры. Песчаный грунт с различным содержанием каолиновой глины: 1 — песок; 2 — песок + 15% глины; 3 — песок + 25% глины; 3 — песок + 40% глины [Чувиллин и др., 2020]

**Fig. 2.** The dependence of the content of unfrozen water on temperature. Sandy soil with different content of kaolinite clay: 1 — sand; 2 — sand + 15% clay; 3 — sand + 25% clay; 3 — sand + 40% clay [Chuvililn et al., 2020]

Преследуя цель изучить только структуры течения в пористой среде, в рамках данного исследования считаем, что грунт недеформируемый, несмотря на вероятность возникновения больших давлений при фазовом переходе.

При замораживании/оттаивании грунтов меняется пористость и проницаемость. Процесс замораживания/оттаивания происходит не мгновенно, поэтому для корректного описания модели требуется зависимость относительной фазовой проницаемости от пористости или водонасыщенности. Зависимость фазовой проницаемости пористой среды для воды от водонасыщенности принимаем в виде [Лейбензон, 1947]:

$$k_w = k(S_w)^{3,5}. \quad (7)$$

Для моделирования принималось, что кристаллизация воды в пористой среде гетерогенная [Возникновение — пересыщение] и время индукции (время, необходимое для начала кристаллизации) пренебрежимо мало в сравнении с характерными временами задачи.

## Оценка характерных времен

Пусть в неограниченном горизонтальном слое пористой среды с постоянной толщиной  $h$  и температурой  $T_0$  расположен вертикальный охлаждающий элемент с радиусом  $r_c$ . Оценим скорость распространения температурных возмущений от охлаждающего элемента в пористой среде. Радиус тепловой волны определим из предложенной в работе [Басниев и др., 1993] формулы:

$$R_\tau = \sqrt{r_c^2 + 4\chi\tau_\chi}, \quad (8)$$

где  $R_\tau$  — радиус тепловой волны, м;  $\tau_\chi$  — время распространения тепловой волны, с.

Время достижения тепловой волной наружной стенки сосуда:

$$\tau_\chi = \frac{R_\tau^2 - r_c^2}{4\chi} = \frac{R_\tau^2}{4\chi} \left( 1 - \frac{r_c^2}{R_\tau^2} \right).$$

Так как  $\frac{r_c^2}{R_\tau^2} = \frac{0,01^2}{0,5^2} = 0,0004 \ll 1$ , то пренебрегаем  $\frac{r_c^2}{R_\tau^2}$  и получаем:

$$\tau_\chi = \frac{R_\tau^2}{4\chi}. \quad (9)$$

Коэффициент температуропроводности принимаем  $\chi \approx 2 \cdot 10^{-7}$  [Симонов, Филимонова, 2021], тогда характерное время, за которое тепловая волна достигнет внешней границы моделируемой области, будет найдено по формуле:

$$\tau_\chi = \frac{(0,5)^2}{4 \cdot 2 \cdot 10^{-7}} = 3,125 \cdot 10^5. \quad (10)$$

В условиях моделирования скорость охлаждения принята  $v_{cool} = (T_{in} - T_{min})/\tau_{cool}$ , где  $\tau_{cool} = 10^8$  с, т. е.  $v_{cool} = (277,13 - 262,13)/10^8 = 1,5 \cdot 10^{-7}$  К/с. Следовательно, за время  $\tau_\chi$  температура на охлаждающем элементе изменится на  $\Delta T = \tau_\chi v_{cool} = 3,125 \cdot 10^5 \cdot 1,5 \cdot 10^{-7} = 0,469$  К.

Необходимо сравнить это изменение температуры с диапазоном температур, в которых происходит фазовый переход. Согласно исследованию [Чувиллин и др., 2020], это 1,5 К, а поскольку  $\Delta T \ll 1,5$  К, то можем считать тепловую и гидродинамическую задачи стационарными в каждый момент времени. Следует отметить, что медленное охлаждение — это вычислительный прием, который позволяет экономить вычислительные мощности.

## Результаты моделирования и их обсуждение

При достижении температуры фазового перехода в пористой среде вокруг охлаждающего элемента образуется лед. Тепло от внешней, нагретой поверхности подводится к области фазового перехода за счет теплопроводности пористой среды и сформировавшихся конвективных потоков. Соотношение конвективного и кондуктивного теплопереноса определяет объем образовавшегося льда и форму фронта фазового перехода.

В условиях численного эксперимента температура на внешней поверхности моделируемой области поддерживалась равной температуре, при которой плотность воды максимальна, поэтому, если учитывать в расчетах явление максимума плотности воды, в пористой среде образуется один вихрь с восходящим течением вдоль границы фазового перехода и с нисходящим у нагретой стенки. Без учета явления максимума плотности в расчетной области также возникает один вихрь, но направление его движения противоположное: вода поднимается у нагретой стенки и опускается вдоль границы фазового перехода.

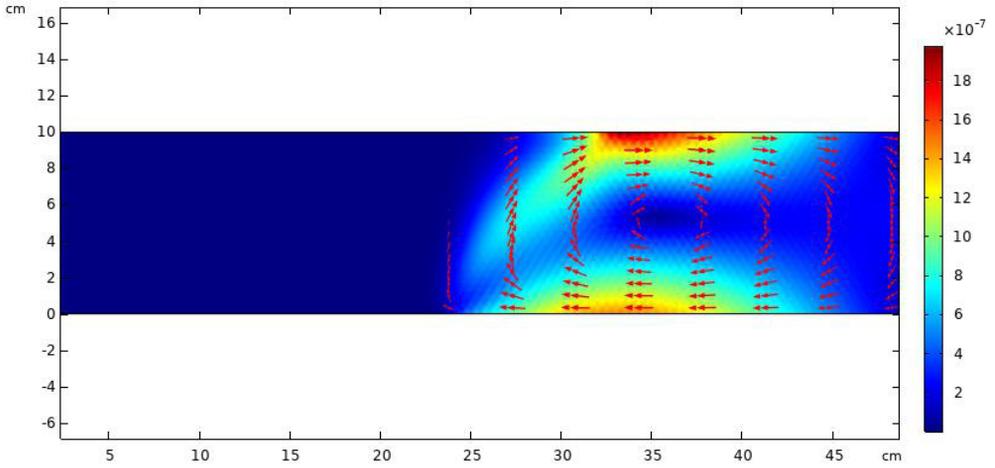
На рис. 3а и 3б представлены поля скоростей в расчетной области при минимальной в численном эксперименте температуре охлаждающего элемента ( $T = 261,98$  К) с учетом максимума плотности воды (рис. 3а) и без (рис. 3б). Возникшее конвективное течение определяет распределение температуры и скорости по вертикальной координате. Профили скорости и температуры в сечении  $R/2$  представлены на рис. 4 и 5.

Теплая, более тяжелая вода фильтруется в нижней части цилиндра, достигает линии фазового перехода и, охлаждаясь, поднимается вверх, вследствие чего в верхней части цилиндра образование льда происходит более интенсивно, что приводит к кривизне фронта фазового перехода (рис. 6). Если в моделировании не учитывать максимум плотности воды, то направление конвективного течения изменяется (рис. 3б), теплая вода движется в верхней части расчетной области, соответственно, изменяются и профили скоростей (рис. 4), профили температуры (рис. 5), кривизна линии фазового перехода (рис. 6б).

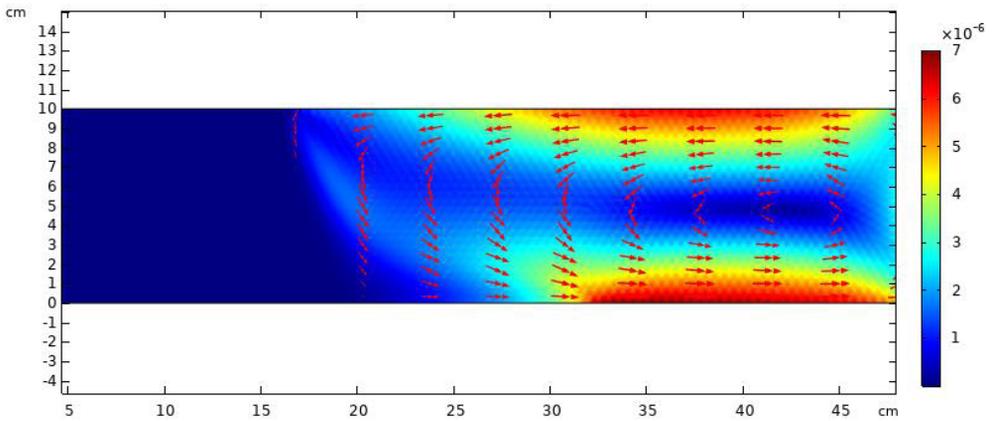
На рис. 7 представлена зависимость доли объема пористой среды, занятой льдом, от температуры охлаждающего элемента для двух численных моделей воды.

Численное моделирование фиксирует наличие гистерезиса объема образовавшегося льда: при повышении температуры охлаждающего элемента фронт фазового перехода отстает несколько быстрее, и объемы образовавшегося льда при промерзании пористой среды и ее оттаивании не совпадают. Причем этот гистерезис фиксируется только для расчетов с использованием модели воды с учетом максимума ее плотности. Вероятно, причина этого явления связана с энергией, необходимой для фазового перехода, что требует отдельного изучения вне данного исследования.

На рис. 8 приведена зависимость доли объема пористой среды, занятой льдом, от проницаемости. Расчеты выполнены для двух моделей воды.



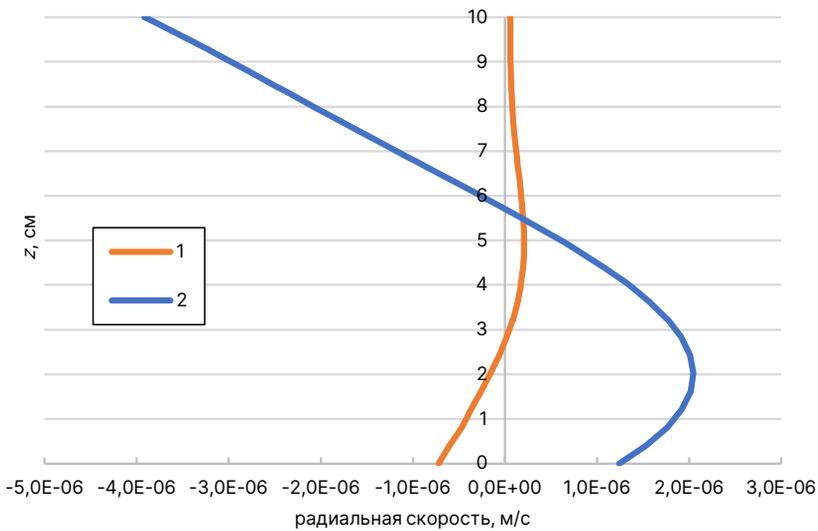
**а**



**б**

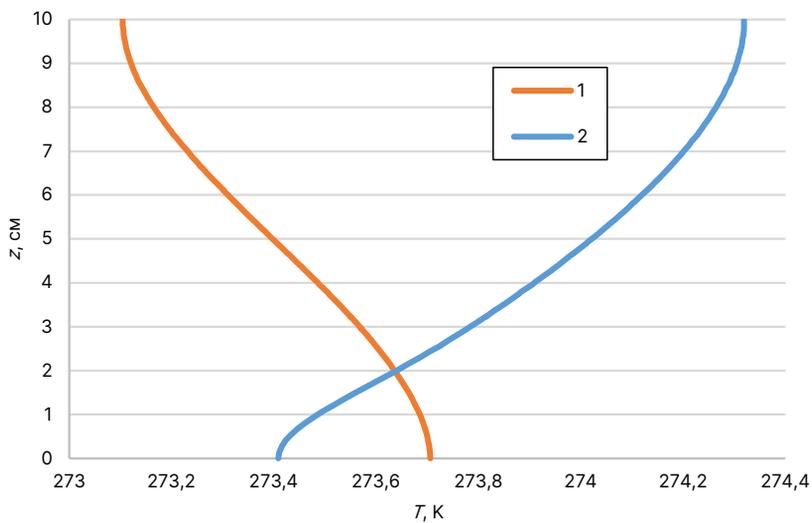
**Рис. 3.** Распределение скоростей свободного конвективного течения в пористой среде ( $\alpha = 1,25$ ) в сечении  $(z, r)$  при минимальной температуре охлаждающего элемента: а — с учетом максимума плотности воды; б — без учета максимума плотности воды

**Fig. 3.** The distribution of velocities of free convective flow in a porous medium ( $\alpha = 1.25$ ) in the section  $(z, r)$  at the minimum temperature of the cooling element: а — taking into account the maximum water density; б — without taking into account the maximum density of water



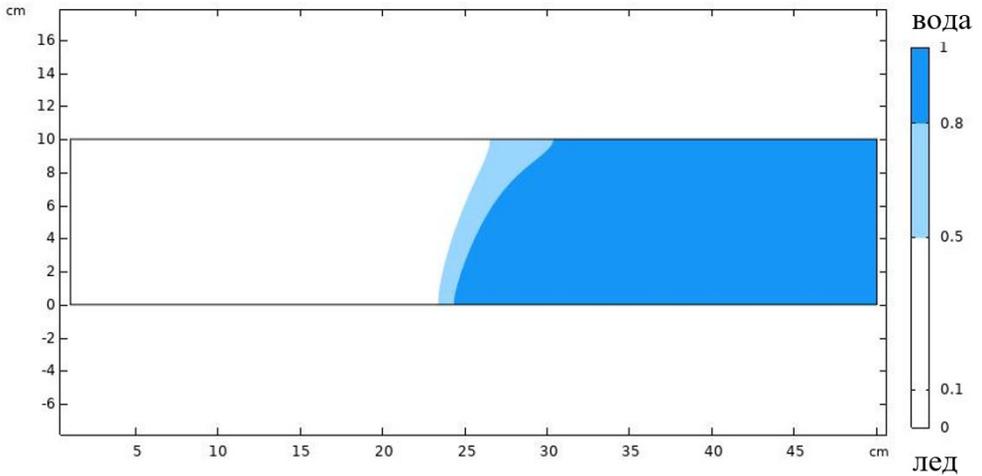
**Рис. 4.** Профили скорости конвективного течения по вертикальной координате в сечении  $R/2$  ( $r = 0,25$  м,  $\alpha = 1,25$ ): 1 — с учетом максимума плотности воды; 2 — без учета максимума плотности воды

**Fig. 4.** Convective flow velocity profiles along the vertical coordinate in the section  $R/2$  ( $r = 0.25$  м,  $\alpha = 1.25$ ): 1 — taking into account the maximum density of water; 2 — without taking into account the maximum density of water

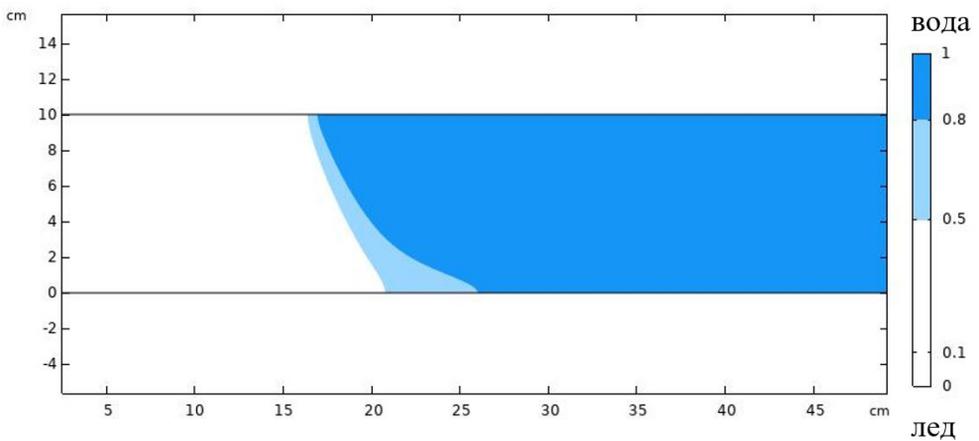


**Рис. 5.** Распределение температуры по высоте в сечении  $R/2$  ( $r = 0,25$  м,  $\alpha = 1,25$ ): 1 — с учетом максимума плотности воды; 2 — без учета максимума плотности воды

**Fig. 5.** Temperature distribution along the height in the section  $R/2$  ( $r = 0.25$  м,  $\alpha = 1.25$ ): 1 — taking into account the maximum water density; 2 — without taking into account the maximum density of water



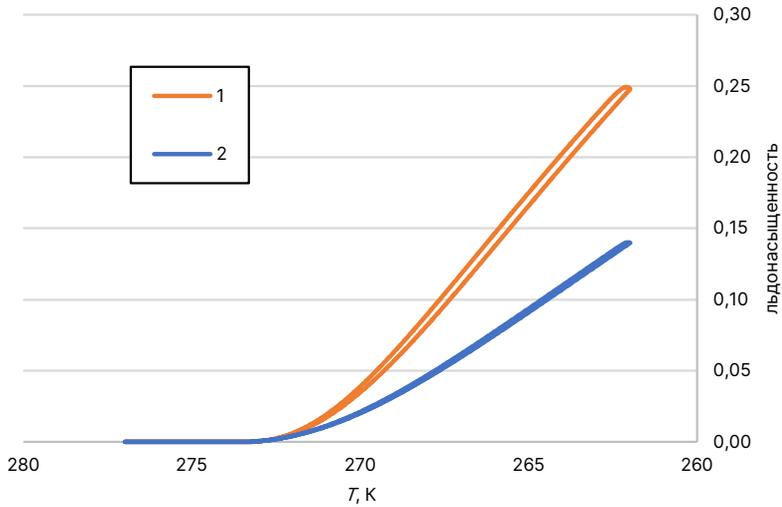
а



б

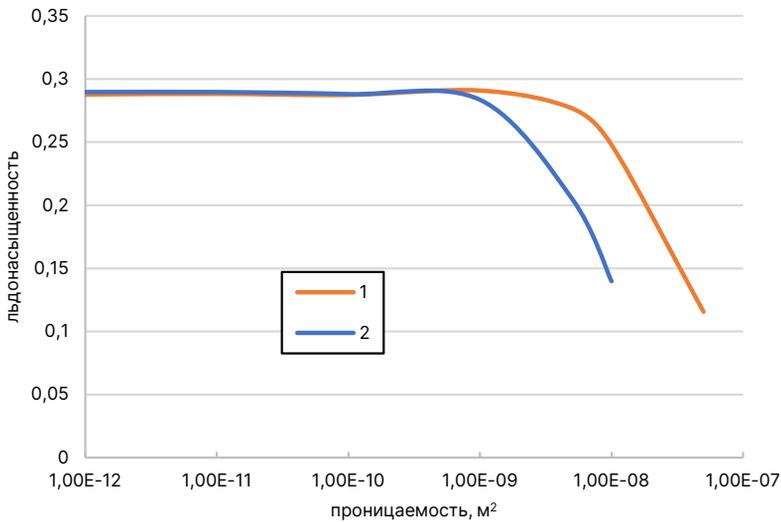
**Рис. 6.** Распределение водонасыщенности в пористой среде ( $\alpha = 1,25$ ) в сечении  $(z, r)$  при минимальной температуре охлаждаемого элемента: а — с учетом максимума плотности воды; б — без учета максимума плотности воды

**Fig. 6.** Distribution of water saturation in a porous medium ( $\alpha = 1.25$ ) in the section  $(z, r)$  at the minimum temperature of the cooled element: а — taking into account the maximum density of water; б — without taking into account the maximum density of water



**Рис. 7.** Зависимость доли объема пористой среды ( $\alpha = 1,25$ ), занятой льдом, от температуры охлаждающего элемента: 1 — с учетом максимума плотности воды; 2 — без учета максимума плотности воды

**Fig. 7.** Dependence of the volume fraction of a porous medium ( $\alpha = 1.25$ ) occupied by ice on the temperature of the cooling element: 1 — taking into account the maximum density of water; 2 — without taking into account the maximum density of water



**Рис. 8.** Доля объема пористой среды, занятой льдом, в зависимости от абсолютной проницаемости: 1 — с учетом максимума плотности воды; 2 — без учета максимума плотности воды

**Fig. 8.** Fraction of the volume of a porous medium occupied by ice, depending on the absolute permeability: 1 — taking into account the maximum density of water; 2 — without taking into account the maximum density of water

С понижением проницаемости пористой среды пространственная неоднородность фронта фазового перехода выравнивается, роль конвективного теплопереноса уменьшается, что подтверждает наши выводы о применимости оценочного параметра, сделанные в [Симонов, Филимонова, 2021]. Объем образовавшегося льда не зависит от фильтрационных свойств среды и конвективного течения в ней. Так как учет максимума плотности воды приводит к уменьшению интенсивности конвективного потока, выполаживание фронта фазового перехода происходит при более высоких проницаемостях, и независимость объема образовавшегося льда в пористой среде от ее фильтрационных свойств проявляется раньше.

## Заключение

Наличие максимума плотности воды существенным образом влияет на процесс промерзания насыщенных водой пористых сред, поэтому в определенных случаях важно учитывать этот максимум при расчетах, чтобы избежать значительных ошибок. К таким случаям можно отнести расчет течения вблизи области фазового перехода. В природе вдоль вертикальной линии фазового перехода всегда формируется восходящий конвективный поток, в то время как расчеты без учета явления инверсии плотности зададут нисходящий конвективный поток. Это имеет принципиальное значение, в частности, при расчетах переноса примесей.

Расчеты с использованием модели воды без максимума плотности завышают роль конвективного теплопереноса и объема тепла, переносимого флюидом. Полученные таким образом результаты значительно искажают реальную степень промерзания пористой среды. Наличие у воды максимума ее плотности приводит к уменьшению роли конвективного теплопереноса, что делает возможным не учитывать конвекцию в решении задач с фазовым переходом «вода — лед» в пористых средах при их низкой и средней проницаемости. Безразмерный параметр, предложенный авторами в работе [Симонов, Филимонова, 2021], позволяет определить случаи, когда можно выполнить расчеты без учета движения воды и получить более точные результаты.

В условиях, когда проницаемость пористой среды высокая или необходимо рассчитать конвективные потоки для решения других задач, использование модели воды без максимума плотности в расчетах свободных конвективных течений с фазовыми переходами в пористой среде не обосновано, т. к. это существенным образом исказит как физическую картину фильтрации, так и интегральные показатели моделируемой системы.

## Список источников

- Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. 1993. Подземная гидромеханика: учеб. для вузов. М.: Недра. 416 с.
- Возникновение — пересыщение // Большая энциклопедия нефти и газа. <https://www.ngpedia.ru/id558090p1.html>
- Ганопольский Р. М., Гильманов А. Я. 2022. Гидродинамическое моделирование на OpenFOAM: учеб. пос. для самостоятельного изучения. Тюмень: Экспресс. 104 с.
- Гарифуллин Ф. А. 2000. Возникновение конвекции в горизонтальных слоях жидкости // Соросовский образовательный журнал. Том 6. № 8. С. 108–114.

- Григорьев Б. А., Качалов В. В., Пазюк Ю. В., Сокотущенко В. Н. 2017. Обзор работ по теории фильтрации углеводородных систем // Вести газовой науки. № 2 (30). С. 182–202.
- Ершов Э. Д. (ред.). 2001. Основы геокриологии: монография. Ч. 4. Динамическая геокриология. М.: Изд-во Моск. ун-та. 686 с.
- Игошин Д. Е., Сабуров Р. С. 2015. Численное исследование зависимости проницаемости от пористости среды, образованной каналами регулярной структуры // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 1. № 1 (1). С. 84–90.
- Лейбензон Л. С. 1947. Курс теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат. 464 с.
- Симонов О. А., Филимонова Л. Н. 2019. Численное исследование влияния поверхностного натяжения на структуру течения в цилиндрическом сосуде с учетом максимума плотности воды // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 5. № 3. С. 131–146. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2019-5-3-131-146>
- Симонов О. А., Филимонова Л. Н. 2021. Влияние максимума плотности воды на охлаждение водонасыщенной пористой среды // Прикладная механика и техническая физика. Том 62. № 4 (368). С. 68–79. <https://doi.org/10.15372/PMTF20210407>
- Цытович Н. А. 1973. Механика мерзлых грунтов: учеб. пос. М.: Высшая школа. 488 с.
- Чувилин Е. М., Соколова Н. С., Буханов Б. А., Шевчик Ф. А., Истомин В. А., Мухаметдинова А. З., Алексеев А. Г., Гречищева Э. С. 2020. Применение водно-потенциометрического метода для определения содержания незамерзшей воды в мерзлых грунтах различного состава. Криосфера Земли. Том 24. № 5. С. 16-28. [https://doi.org/10.21782/KZ1560-7496-2020-5\(16-28\)](https://doi.org/10.21782/KZ1560-7496-2020-5(16-28))
- Anselmi C., De Paz M., Marciano A., Pilo M., Sonnino G. 1990. Free convection experiments in water and deuterated mixtures at temperatures including the density maxima // International Journal of Heat and Mass Transfer. Vol. 33. No. 11. Pp. 2519–2524. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(90\)90009-J](https://doi.org/10.1016/0017-9310(90)90009-J)
- Cawley M. F., McBride P. 2004. Flow visualization of free convection in a vertical cylinder of water in the vicinity of the density maximum // International Journal of Heat and Mass Transfer. Vol. 47. No. 6–7. Pp. 1175–1186. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.09.028>

## References

- Basniev, K. S., Kochina, I. N., & Maksimov, V. M. (1993). *Underground hydromechanics*. Nedra. [In Russian]
- Big encyclopedia of oil and gas. (n.d.). *Occurrence — supersaturation*. <https://www.ngpedia.ru/id558090p1.html> [In Russian]
- Ganopolskij, R. M., & Gilmanov, A. Ya. (2022). *Hydrodynamic modeling on OpenFOAM*. Express. [In Russian]
- Garifullin, F. A. (2000). The occurrence of convection in horizontal layers of liquid. *Soros Educational Journal*, 6(8), 108–114. [In Russian]
- Grigoryev, B. A., Kachalov, V. V., Pazyuk, Yu. V., & Sokotushenko, V. N. (2017). Review of state-of-art theoretical works on filtration in hydrocarbon systems. *Vesti gazovoy nauki*, (2), 182–202. [In Russian]
- Ershov, E. D. (Ed.). (2001). *Fundamentals of geocryology. Part 4. Dynamic geocryology*. Moscow State University. [In Russian]

- Igoshin, D. E., & Saburov, R. S. (2015). Numerical research of permeability dependence of porosity in the media formed by regular structure channels. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 1(1), pp. 84–90. [In Russian]
- Leybenzon, L. S. (1947). *Course of elasticity theory*. Gostekhizdat. [In Russian]
- Simonov, O. A., & Filimonova, L. N. (2019). Numerical study of the effect of surface tension on the flow structure in a cylindrical vessel, taking into account the maximum density of water. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 5(3), 131–146. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2019-5-3-131-146> [In Russian]
- Simonov, O. A., & Filimonova, L. N. (2021). Effect of a water density maximum on the cooling of a water-saturated porous medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 62(4), 583–592. <https://doi.org/10.1134/S0021894421040076>
- Tsytovich, N. A. (1973). *The mechanics of frozen ground*. Vysshaya shkola. [In Russian]
- Chuvilin, E. M., Sokolova, N. S., Bukhanov, B. A., Shevchik, F. A., Istomin, V. A., Mukhametdinova, A. Z., Alekseev, A. G., & Grechishcheva, E. S. (2020). Application of water-potentiometric method for unfrozen water content determination in different frozen soils. *Earth's Cryosphere*, 24(5), 16–28. [https://doi.org/10.21782/KZ1560-7496-2020-5\(16-28\)](https://doi.org/10.21782/KZ1560-7496-2020-5(16-28)) [In Russian]
- Anselmi, C., De Paz, M., Marciano, A., Pilo, M., & Sonnino, G. (1990). Free convection experiments in water and deuterated mixtures at temperatures including the density maxima. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 33(11), 2519–2524. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(90\)90009-J](https://doi.org/10.1016/0017-9310(90)90009-J)
- Cawley, M. F., & McBride, P. (2004). Flow visualization of free convection in a vertical cylinder of water in the vicinity of the density maximum. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(6–7), 1175–1186. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.09.028>

## Информация об авторах

Олег Анатольевич Симонов, кандидат физико-математических наук, заместитель директора, Тюменский научный центр СО РАН, Тюмень, Россия; ведущий научный сотрудник, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия  
s\_o\_a@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2362-3588>

Людмила Николаевна Филимонова, младший научный сотрудник, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, Россия; научный сотрудник, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия  
filimonovaln@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6761-8292>

## Information about the authors

Oleg A. Simonov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director, Tyumen Scientific Center of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia; Leading Researcher, Tyumen Industrial University, Tyumen, Russia  
s\_o\_a@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2362-3588>

Ljudmila N. Filimonova, Junior Researcher, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia; Researcher, Tyumen Industrial University, Tyumen, Russia  
filimonovaln@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6761-8292>

## Реконструкция системы электроснабжения на основе альтернативного источника энергии

Людмила Борисовна Половникова

Тобольский индустриальный институт, Тобольск, Россия  
Контакт для переписки: ludmila-polov@mail.ru✉

**Аннотация.** В статье представлено решение реконструкции нефтеперерабатывающего завода с использованием газопоршневых электростанций. Нефтеперерабатывающий завод является структурным подразделением «Когалымнефтегаз». Работа завода предназначена для выработки качественных нефтепродуктов для технологического транспорта подразделений ООО «Лукойл — Западная Сибирь» в Когалыме, Лангепасе, Покачи. Кроме этого, продукция завода востребована и на других предприятиях Ханты-Мансийского региона. В ходе исследования была поставлена цель предложить альтернативный источник энергии для безаварийной работы нефтеперерабатывающего завода, по обеспечению надежности объектов относящегося к первой категории. На основе проведенного анализа существующей системы электроснабжения завода было установлено, что электроприемники установки ЭЛОУ-АВТ-Битумной обеспечиваются от двух источников электроснабжения сети «Тюменьэнерго», что не гарантирует бесперебойность и безаварийность работы завода. Электроснабжение НПЗ предусматривается напряжением 6 кВ от ПС № 7 35/6 кВ. ПС № 7 запитана от ПС «Дружная» 110/35/10 кВ со стороны среднего напряжения по двум силовым фидерам «Дружная-1» и «Дружная-3». В исследовании проведен расчет нагрузок, токов короткого замыкания, выбрано необходимое силовое оборудование и предложен способ перевода НПЗ на энергоснабжение от стационарной электростанции, эксплуатируемой на утилизируемом от производственного процесса углеводородном газе. Предлагаемое решение позволяет исключить возникновение аварийных ситуаций на НПЗ из-за перебоев в электроснабжении, уменьшить затраты на приобретение электроэнергии и тем самым снизить себестоимость товарных нефтепродуктов, увеличить процент утилизации углеводородного газа за счет снижения количества сжигаемого на факеле газа.

**Ключевые слова:** электроснабжение, силовое оборудование, исследование электропотребления, токи короткого замыкания, реконструкция системы электроснабжения

**Цитирование:** Половникова Л. Б. 2023. Реконструкция системы электроснабжения на основе альтернативного источника энергии // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 1 (33). С. 39–59. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-39-59>

Поступила 18.01.2023; одобрена 20.03.2023; принята 31.03.2023

## Reconstruction of the power supply system based on an alternative energy source

Lyudmila B. Polovnikova

Tobolsk Industrial Institute, Tobolsk, Russia  
Corresponding author: ludmila-polov@mail.ru ✉

**Abstract.** The article presents a solution for the reconstruction of an oil refinery using gas piston power plants. The oil refinery is a structural subdivision of Kogalymneftegaz. The work of the plant is intended for the production of high-quality petroleum products for technological transport of the divisions of Lukoil — Western Siberia LLC in Kogalym, Langepas, Pokachi; in addition, the plant's products are in demand at other enterprises of the Khanty-Mansiysk region. In the course of the study, the goal was to offer an alternative source of energy for the trouble-free operation of an oil refinery, to ensure the reliability of objects belonging to the first category. Based on the analysis of the existing power supply system of the plant, it was found that the power receivers of the ELOU-AVT-Bitumen plant are provided from two sources of power supply from the Tyumenenergo network, which does not guarantee uninterrupted and trouble-free operation of the plant. The power supply of the refinery is provided with a voltage of 6 kV from Substation No. 7 35/6 kV. Substation No. 7 is powered by 110/35/10 kV Substation Druzhnaya from the medium voltage side via two power feeders Druzhnaya-1 and Druzhnaya-3. In the study, the calculation of loads, short circuit currents was carried out, the necessary power equipment was selected, and a method was proposed for transferring the refinery to power supply from a stationary power plant operated on hydrocarbon gas utilized from the production process. The proposed solution allows: to eliminate the occurrence of emergencies at the refinery due to a power outage; reduce the cost of purchasing electricity and thereby reduce the cost of commercial petroleum products; increase the percentage of hydrocarbon gas utilization by reducing the amount of gas flared.

**Keywords:** power supply, power equipment, study of power consumption, short-circuit currents, reconstruction of the power supply system

**Citation:** Polovnikova, L. B. (2023). Reconstruction of the power supply system based on an alternative energy source. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(1), 39–59. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-39-59>

Received January 18, 2023; Reviewed March 20, 2023; Accepted March 31, 2023

## Введение

Нефтеперерабатывающий завод (НПЗ) является функциональным звеном в цепочке производственной деятельности нефтегазодобывающего предприятия «Когалымнефтегаз». Завод по переработке нефти относится к объектам первой категории надежности, поэтому необходимо иметь безопасное энергоснабжение [Новокрещенова, Шарендо, 2019]. Источником такой электроэнергии может являться электростанция, работающая на утилизируемом в результате производственного процесса углеводородном газе. Ее введение позволит гарантировать бесперебойность энергоснабжения, уменьшить затраты на электроэнергию и снизить себестоимость нефтепродуктов, а также обеспечить экологичность: процент утилизации углеводородного газа повысится за счет снижения сжигания газа.

Цель исследования — обосновать и разработать систему энергоснабжения на основе утилизируемого в ходе производственного процесса углеводородного газа.

## Методы

Значимость и актуальность проблемы системы энергоснабжения нефтеперерабатывающего предприятия послужили для определения темы данного исследования. В ходе решения проблемы перевода электроснабжения НПЗ, работающего на месторождении Дружное (ООО «Лукойл-Энергосети»), на работу от газопоршневой электростанции (ГПЭС) нами были использованы теоретические (системный анализ и синтез, моделирование, математико-статистические подходы) и эмпирические (обработка данных) методы исследования.

Безопасное энергоснабжение [Новокрещенова, Шарендо, 2019] — гарант качественной бесперебойной и безаварийной работы предприятия. Генеральный план площадки НПЗ, представленный на рис. 1, разработан исходя из условий наиболее рационального использования участка, с учетом технологического процесса и производственной взаимосвязи зданий и сооружений. Территория НПЗ разделена на зоны:

- участок установки переработки товарной нефти;
- участок электрообессоливающей установки атмосферно-вакуумной трубчатки;
- участок комбинированной установки гидроочистки широкой фракции и каталитического риформинга;
- товарный парк;
- участки под объекты общезаводского хозяйства;
- факельное хозяйство.

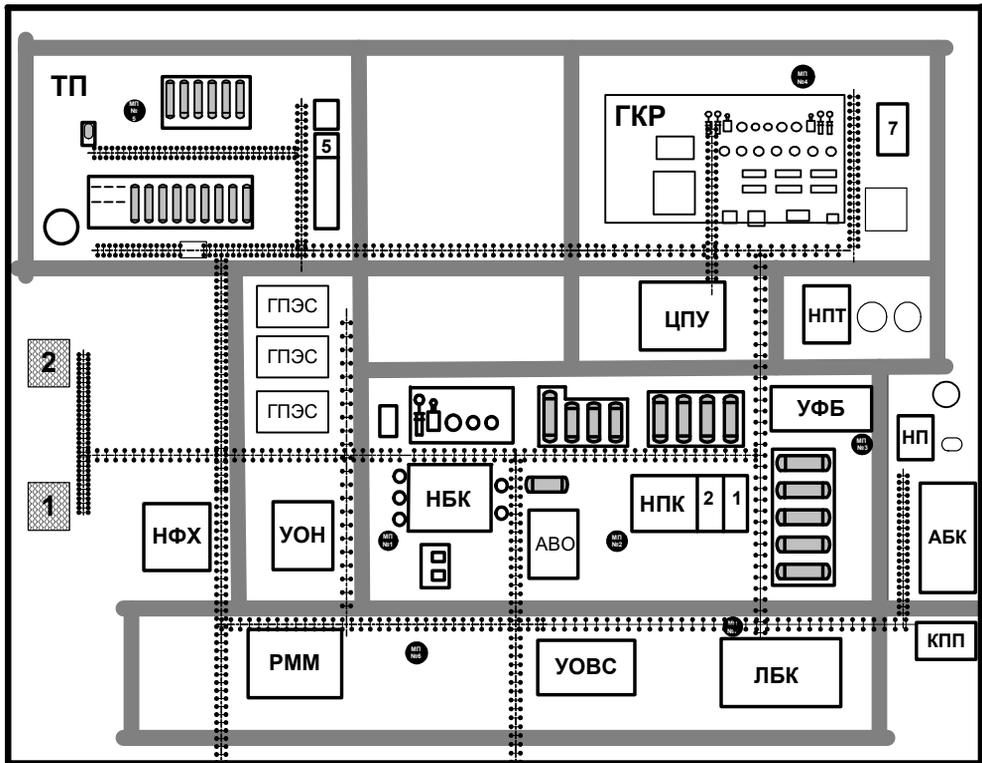


Рис. 1. Схема генерального плана НПЗ

**Условные обозначения:** 1, 2, 5, 7 — КТП — комплектная трансформаторная подстанция; АБК — административно-бытовой корпус; ГКР — комбинированная установка гидрокрекинга и риформинга (II очередь НПЗ); КПП — контрольно-пропускной пункт; ЛБК — лабораторно-бытовой корпус; НБК — насосная блока колонн; НП — насосная пенотушения; НПК — насосная производственного корпуса; НПТ — насосная пожаротушения; НФХ — наземное факельное хозяйство; РММ — ремонтно-механическая мастерская; ТП — товарный парк; УОВС — узел оборотного водоснабжения; УОН — узел охлаждения насосов; УФБ — узел фасовки битума; ЦПУ — центральный пункт управления.

☒ — факелы, ● МЭП — прожекторные мачты.

Fig. 1. The scheme of the general plan of the oil refinery

**Conventions:** 1, 2, 5, 7 — КТП — complete transformer substation; АБК — administrative and amenity building; ГКР — combined hydrocracking and reforming unit (second stage of the oil refinery); КПП — checkpoint; ЛБК — laboratory and amenity building; НБК — pumping unit of columns; НП — foam pumping station; НПК — pump room of the production building; НПТ — fire extinguishing pumping station; НФХ — ground flare; РММ — mechanical repair shop; ТП — commodity park; УОВС — recycling water supply unit; УОН — pump cooling unit; УФБ — bitumen packing unit; ЦПУ — central control point.

☒ — torches, ● МЭП — searchlight masts.

На НПЗ поступает товарная нефть, прошедшая предварительную подготовку на центральном пункте сбора месторождения Дружное. Технологическая схема НПЗ представлена компонентами:

- установка ЭЛОУ-АВТ-Битумная (электрообессоливающая установка — атмосферно-вакуумная трубчатка);
- УПТН-2 (установка переработки товарной нефти);
- установка ГКР-126/33 (установка гидрокрекинга и риформинга).

Кроме того, проектом предусмотрена взаимосвязь основных установок с общезаводским хозяйством по сырью, промежуточной продукцией и товарной.

В результате проведения анализа электроснабжения нефтеперерабатывающего завода [Русина, Филиппова, 2022; Сивков и др., 2022] установлено, что оно обеспечено напряжением 6 кВ от электрической подстанции ПС № 7 с рабочим напряжением 35/6 кВ.

В свою очередь, подстанция № 7 запитана от системы питания постоянного тока «Дружная» (110/35/10 кВ) со стороны среднего напряжения по двум силовым фидерам: «Дружная-1» и «Дружная-3». Для распределения электроэнергии на напряжении 380/220 В на установках предприятия предусмотрено четыре комплектных трансформаторных подстанции: № 1 и № 5 (1 000 кВА), № 2 и № 7 (1 600 кВА). Трансформаторы запитаны через масляные выключатели (6 кВ) кабельными линиями от закрытого распределительного устройства (6 кВ). Электроснабжение осуществляется от трансформаторов собственных нужд ТСН-1 и ТСН-2 (63 кВА), установленных на каждой секции шин. Секции шин в аварийных режимах разделяются секционным масляным выключателем. Электроприемники установки ЭЛОУ-АВТ-Битумной нефтеперерабатывающего завода имеют два источника электроснабжения [Кудрин, 2011]. Для безаварийной и надежной работы необходимо предусмотреть третий независимый источник питания.

После изучения организационной структуры и технологии производства нефтепродуктов нефтеперерабатывающего завода проведен расчет электрических нагрузок потребителей [Кудряшов, Кудряшова, 2016], расчет токов короткого замыкания (КЗ) и осуществлена подборка оборудования [Немировский и др., 2020].

Для расчета электрических нагрузок потребителей воспользовались графиком нагрузки и коэффициентом мощности нефтедобывающей промышленности. Коэффициент мощности  $\cos \varphi = 0,9$ . Максимальная активная мощность в зимний период:

$$P_{\max 1} = 2\,836 \text{ МВт}, S_{\max 1} = \frac{P_{\max 1}}{\cos \varphi}, S_{\max 1} = \frac{2\,836}{0,9} = 3\,151,1 \text{ МВ} \cdot \text{А}. \quad (1)$$

Максимальная реактивная мощность в зимний период:

$$Q_{\max 1} = \sqrt{S_{\max 1}^2 - P_{\max 1}^2}, Q_{1\max} = \sqrt{3\,151,1^2 - 2\,836^2} = 1\,373,5 \text{ МВар}. \quad (2)$$

Оборудование и трансформаторы подстанции выбираются по средней нагрузке в наиболее загруженную смену.  $P_i$  и  $Q_i$  (%) вычисляются из графиков активной и реактивной нагрузки нефтедобывающего предприятия (таблица 1 и 2).

**Таблица 1.** Суточный график нагрузок НПЗ в зимний период  
**Table 1.** Daily load schedule for the oil refinery in winter

<b>Интервал времени <math>\Delta t</math>, ч</b>	<b><math>P_i</math>, %</b>	<b><math>P_i</math>, МВт</b>	<b><math>Q_i</math>, %</b>	<b><math>Q_i</math>, МВар</b>	<b><math>S_i</math>, МВ·А</b>
0–1	0,80	2 268,80	0,75	1 029,75	2 491,553
1–2	0,82	2 325,52	0,71	974,83	2 521,574
2–3	0,85	2 410,60	0,86	1 180,78	2 684,257
3–4	0,81	2 297,16	0,76	1 043,48	2 523,053
4–5	0,85	2 410,60	0,78	1 070,94	2 637,784
5–6	0,78	2 212,08	0,72	988,56	2 422,922
6–7	0,82	2 325,52	0,75	1 029,75	2 543,311
7–8	0,91	2 580,76	0,82	1 125,86	2 815,650
8–9	1,00	2 836,00	0,98	1 345,54	3 139,008
9–10	0,97	2 750,92	0,96	1 318,08	3 050,393
10–11	0,97	2 750,92	1,00	1 373,00	3 074,523
11–12	0,90	2 552,40	0,88	1 208,24	2 823,932
12–13	0,94	2 665,84	0,94	1 290,62	2 961,824
13–14	0,94	2 665,84	0,95	1 304,35	2 967,833
14–15	0,89	2 524,04	0,95	1 304,35	2 841,145
15–16	0,89	2 524,04	0,88	1 208,24	2 798,325
16–17	0,94	2 665,84	0,92	1 263,16	2 949,962
17–18	0,94	2 665,84	0,89	1 221,97	2 932,561
18–19	0,91	2 580,76	0,85	1 167,05	2 832,371
19–20	0,91	2 580,76	0,86	1 180,78	2 838,056
20–21	0,94	2 665,84	0,88	1 208,24	2 926,866
21–22	0,88	2 495,68	0,87	1 194,51	2 766,816
22–23	0,82	2 325,52	0,84	1 153,32	2 595,802
23–24	0,79	2 240,44	0,79	1 084,67	2 489,193

**Таблица 2.** Суточный график нагрузок НПЗ в летний период**Table 2.** Daily load schedule of the oil refinery in summer

Интервал времени $\Delta t$ , ч	$P_{\text{п}}$ , %	$P_{\text{п}}$ , МВт	$Q_{\text{п}}$ , %	$Q_{\text{п}}$ , МВАр	$S_{\text{п}}$ , МВ·А
0–1	0,80	924,720	0,75	419,8125	1 015,5540
1–2	0,82	947,838	0,71	397,4225	1 027,7850
2–3	0,85	982,515	0,86	481,3850	1 094,1060
3–4	0,81	936,279	0,76	425,4100	1 028,3930
4–5	0,85	982,515	0,78	436,6050	1 075,1560
5–6	0,78	901,602	0,72	403,0200	987,5785
6–7	0,82	947,838	0,75	419,8125	1 036,6480
7–8	0,91	1 051,869	0,82	458,9950	1 147,6520
8–9	1,00	1 155,900	0,98	548,5550	1 279,4600
9–10	0,97	1 121,223	0,96	537,3600	1 243,3410
10–11	0,97	1 121,223	1,00	559,7500	1 253,1800
11–12	0,90	1 040,310	0,88	492,5800	1 151,0340
12–13	0,94	1 086,546	0,94	526,1650	1 207,2410
13–14	0,94	1 086,546	0,95	531,7625	1 209,6920
14–15	0,89	1 028,751	0,95	531,7625	1 158,0590
15–16	0,89	1 028,751	0,88	492,5800	1 140,5980
16–17	0,94	1 086,546	0,92	514,9700	1 202,4040
17–18	0,94	1 086,546	0,89	498,1775	1 195,3090
18–19	0,91	1 051,869	0,85	475,7875	1 154,4710
19–20	0,91	1 051,869	0,86	481,3850	1 156,7890
20–21	0,94	1 086,546	0,88	492,5800	1 192,9870
21–22	0,88	1 017,192	0,87	486,9825	1 127,7550
22–23	0,82	947,838	0,84	470,1900	1 058,0530
23–24	0,79	913,161	0,79	442,2025	1 014,5970

$$P_i = \frac{P_{i\max} \cdot P_i(\%)}{100} \text{ МВт}, \quad (3)$$

$$Q_i = \frac{Q_{i\max} \cdot Q_i(\%)}{100} \text{ МВар}, \quad (4)$$

$$S_i = \sqrt{P_i^2 + Q_i^2} \text{ МВ} \cdot \text{А}. \quad (5)$$

Максимальная активная мощность в летний период:

$$P_{\max 2} = 1\,155,9 \text{ МВт}, S_{\max 2} = \frac{P_{\max 2}}{\cos\varphi}, S_{\max 2} = \frac{1\,155,9}{0,9} = 1\,284,3 \text{ МВ} \cdot \text{А}. \quad (6)$$

Максимальная реактивная мощность в летний период:

$$Q_{\max 2} = \sqrt{S_{\max 2}^2 - P_{\max 2}^2}, Q_{2\max} = \sqrt{1\,284,3^2 - 1\,155,9^2} = 559,7 \text{ МВар}. \quad (7)$$

Полная средняя мощность:

$$S_{\text{ср}} = \frac{\sum_0^{24} S_i \cdot \Delta t_i}{24}. \quad (8)$$

Полная средняя мощность в зимний период:

$$S_{\text{ср1}} = 2\,776,2 \text{ МВ} \cdot \text{А}.$$

Полная средняя мощность в летний период:

$$S_{\text{ср2}} = 1\,131,5 \text{ МВ} \cdot \text{А}.$$

Число часов использования максимума:

$$T_{i\max} = \frac{\sum_0^{24} P \cdot \Delta t_i}{P_{i\max}} \cdot 365, T_{\max} = 7\,337,3 \text{ ч}. \quad (9)$$

Для расчета числа часов использования максимума за  $P_{i\max}$  для подстанции принимается максимальное значение  $P_i$ .

Для расчета токов КЗ составляется расчетная схема на основе схемы системы электроснабжения, представленной на рис. 2.

На схеме замещения рис. 3 показана точка короткого замыкания К-1. Расчет тока короткого замыкания в этой точке позволит проверить выбранные выключатели вводных ячеек, секционный выключатель и выключатели отходящих фидеров. Схема замещения представляет собой электрическую схему, соответствующую расчетной схеме, в которой все магнитные связи заменены электрическими и все элементы системы электроснабжения представлены сопротивлениями.

При расчете токов КЗ необходимо учитывать сопротивление  $X_r$  и электродвижущую силу (ЭДС)  $E_r$ . Индуктивное сопротивление и ЭДС генераторов определяются из выражений:

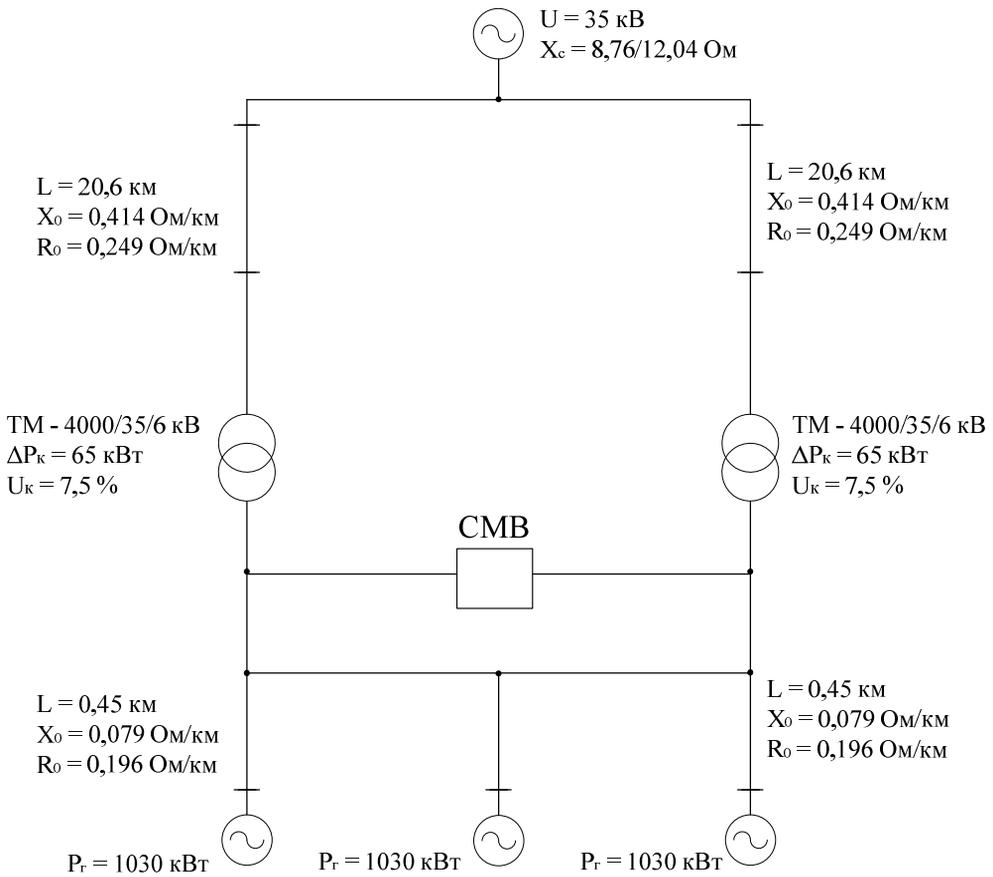


Рис. 2. Расчетная схема системы электроснабжения НПЗ

Fig. 2. Calculation scheme of refinery power supply system

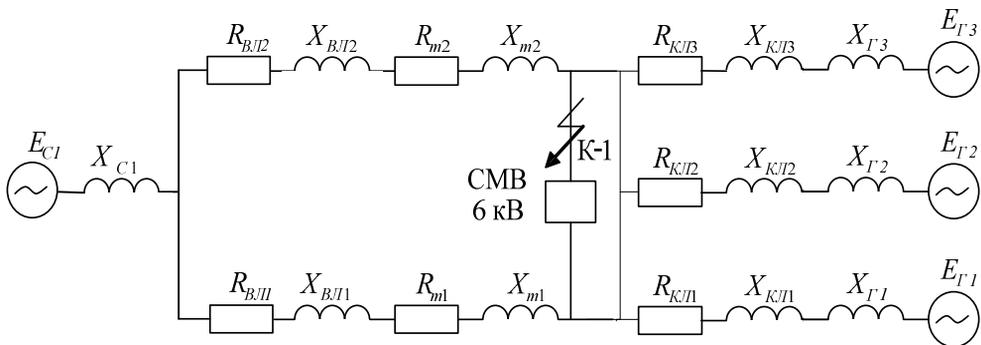


Рис. 3. Схема замещения системы электроснабжения НПЗ

Fig. 3. Equivalent scheme of refinery power supply system

$$X_{\Gamma} = \frac{X_{\Gamma}'' \cdot U_{\text{ном}}^2 \cdot \cos \varphi}{P_{\text{ном}}}, \quad E_{\Gamma 1} = E_{\Gamma 2} = E_{\Gamma 3} = 6,3 \text{ кВ}, \quad (10)$$

где  $X_{\Gamma}''$  — приведенное индуктивное сопротивление генератора;  $U_{\text{ном}}$  — номинальное напряжение генератора, кВ;  $\cos \varphi$  — коэффициент мощности генератора;  $P_{\text{ном}}$  — номинальная активная мощность генератора, кВт;  $E_{\Gamma}$  — приведенная ЭДС генератора, кВ.

Согласно выражению (10):

$$X_{\Gamma 1} = X_{\Gamma 2} = X_{\Gamma 3} = \frac{0,125 \cdot 6,3^2 \cdot 0,8 \cdot 10^3}{1030} = 4,82 \text{ Ом}.$$

Активное и индуктивное сопротивления кабельных линий КЛ1, КЛ2 и КЛ3 определяются по формулам:

$$R_{\text{л}} = r_0 \cdot l, \quad (11)$$

$$X_{\text{л}} = x_0 \cdot l, \quad (12)$$

где  $r_0$  и  $x_0$  — соответственно активное и индуктивное сопротивления 1 км линии, Ом/км;  $l$  — длина линии, км.

Поскольку КЛ взяты одной марки и имеют равную протяженность, то:

$$R_{\text{КЛ1}} = R_{\text{КЛ2}} = R_{\text{КЛ3}} = 0,196 \cdot 0,45 = 0,088 \text{ Ом},$$

$$X_{\text{КЛ1}} = X_{\text{КЛ2}} = X_{\text{КЛ3}} = 0,079 \cdot 0,45 = 0,036 \text{ Ом}.$$

Так как линии работают параллельно, найдем суммарное активное и индуктивное сопротивления КЛ1–2 и индуктивное сопротивление генераторов.

$$E_{\Gamma 1-2} = 6,3 \text{ кВ}.$$

Суммарное активное и индуктивное сопротивления определяются из выражений:

$$R_{\Sigma} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \quad (13)$$

$$X_{\Sigma} = \frac{X_1 \cdot X_2}{X_1 + X_2}. \quad (14)$$

Найдем суммарное индуктивное сопротивление генераторов 1–2:

$$X_{\Gamma 1-2} = \frac{X_{\Gamma 1} \cdot X_{\Gamma 2}}{X_{\Gamma 1} + X_{\Gamma 2}}.$$

Подставив значения, получаем:

$$X_{\Gamma 1-2} = \frac{4,82 \cdot 4,82}{4,82 + 4,82} = 2,41 \text{ Ом}.$$

Согласно выражениям (13) и (14), суммарное активное и индуктивное сопротивления КЛ1–2 равны:

$$R_{\text{КЛ1-2}} = \frac{R_{\text{КЛ1}} \cdot R_{\text{КЛ2}}}{R_{\text{КЛ1}} + R_{\text{КЛ2}}}, \quad X_{\text{КЛ1-2}} = \frac{X_{\text{КЛ1}} \cdot X_{\text{КЛ2}}}{X_{\text{КЛ1}} + X_{\text{КЛ2}}}.$$

Таким образом, получаем:

$$R_{\text{КЛ1-2}} = \frac{0,088 \cdot 0,088}{0,088 + 0,088} = 0,044 \text{ Ом}, \quad X_{\text{КЛ1-2}} = \frac{0,036 \cdot 0,036}{0,036 + 0,036} = 0,018 \text{ Ом}.$$

Теперь найдем суммарное сопротивление и суммарное ЭДС генераторов:

$$X_{\Gamma\Sigma} = \frac{X_{\Gamma1-2} \cdot X_{\Gamma3}}{X_{\Gamma1-2} + X_{\Gamma3}}, \quad X_{\Gamma\Sigma} = \frac{2,41 \cdot 4,82}{2,41 + 4,82} = 1,61 \text{ Ом}, \quad E_{\Gamma\Sigma} = 6,3 \text{ кВ}.$$

Аналогично найдем суммарное активное и индуктивное сопротивления КЛ:

$$R_{\text{КЛ}\Sigma} = \frac{0,044 \cdot 0,088}{0,044 + 0,088} = 0,029 \text{ Ом},$$

$$X_{\text{КЛ}\Sigma} = \frac{0,018 \cdot 0,036}{0,018 + 0,036} = 0,012 \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление схемы до точки К-1 равно:

$$Z_{1\Sigma} = \sqrt{R_{\Sigma}^2 + X_{\Sigma}^2},$$

$$Z_{1\Sigma} = \sqrt{R_{\text{КЛ}\Sigma}^2 + (X_{\Gamma\Sigma} + X_{\text{КЛ}\Sigma})^2}, \quad (15)$$

$$Z_{1\Sigma} = \sqrt{0,029^2 + (1,61 + 0,012)^2} = 1,62 \text{ Ом}.$$

Аналогично найдем полное сопротивление схемы до точки К-1 со стороны энергосистемы. Параметры отдельных ее элементов представлены в таблице 3.

**Таблица 3.** Параметры отдельных элементов энергосистемы

**Table 3.** Parameters of individual elements of the power system

<b>Энергосистема</b>			
$U_{с'}$ , кВ	$X_{\text{min}'}$ , Ом	$X_{\text{max}'}$ , Ом	
38,5	8,76	12,04	
<b>Воздушная линия 1 и 2</b>			
$r_{0'}$ , Ом/км	$x_{0'}$ , Ом/км	$l$ , км	
0,249	0,414	20,6	
<b>Трансформатор</b>			
$U_{\text{ном}'}$ , кВ	$U_{\text{кВН-НН}'}$ , %	$\Delta P_{\text{к}'}$ , кВт	$S_{\text{ном}'}$ , МВ·А
35	7,5	65	4

Из выражений (11), (12) найдем:

$$R_{\text{ВЛ1}} = R_{\text{ВЛ2}} = 0,249 \cdot 20,6 = 5,13 \text{ Ом}, \quad X_{\text{ВЛ1}} = X_{\text{ВЛ2}} = 0,414 \cdot 20,6 = 8,53 \text{ Ом}.$$

Из выражений (13), (14) найдем:

$$R_{\text{ВЛ}\Sigma} = \frac{5,13 \cdot 5,13}{5,13 + 5,13} = 2,56 \text{ Ом}, \quad X_{\text{ВЛ}\Sigma} = \frac{8,53 \cdot 8,53}{8,53 + 8,53} = 4,26 \text{ Ом}.$$

Активное сопротивление трансформатора:

$$R_{\tau} = \frac{\Delta P_{\kappa} \cdot U_{\text{НОМ}}^2}{S_{\text{НОМ}}^2}, \quad (16)$$

где  $\Delta P_{\kappa}$  — потери мощности в трансформаторе на короткое замыкание, кВт;  $U_{\text{НОМ}}$  — номинальное напряжение трансформатора, кВ;  $S_{\text{НОМ}}$  — номинальная мощность трансформатора, кВ·А.

$$R_{\tau 1} = R_{\tau 2} = \frac{65 \cdot 36,75^2}{4^2} = 5,48 \text{ Ом.}$$

Индуктивное сопротивление обмоток высшего (ВН) и низшего напряжения (НН) трансформатора:

$$X_{\tau} = \frac{U_{\text{кВН-НН}} \cdot U_{\text{НОМ}}^2}{100 \cdot S_{\text{НОМ}}}, \quad (17)$$

где  $U_{\text{кВН-НН}}$  — напряжение короткого замыкания обмоток ВН и НН трансформатора, %.

$$X_{\tau 1} = X_{\tau 2} = \frac{7,5 \cdot 36,75^2}{100 \cdot 4} = 25,32 \text{ Ом.}$$

Согласно выражениям (13) и (14), суммарное активное и индуктивное сопротивления трансформаторов:

$$R_{\tau \Sigma} = \frac{5,48 \cdot 5,48}{5,48 + 5,48} = 2,74 \text{ Ом, } X_{\tau \Sigma} = \frac{25,32 \cdot 25,32}{25,32 + 25,32} = 12,66 \text{ Ом.}$$

Полное сопротивление схемы до точки К-1 со стороны энергосистемы равно:

$$Z_2 = \sqrt{(R_{\text{ВЛ}\Sigma} + R_{\tau \Sigma})^2 + (X_{\text{с}} + X_{\text{ВЛ}\Sigma} + X_{\tau \Sigma})^2},$$

$$Z_2 = \sqrt{(2,56 + 2,74)^2 + (8,76 + 4,26 + 12,66)^2} = 26,2 \text{ Ом.}$$

Зная ЭДС и полное сопротивление, найдем периодическую составляющую тока короткого замыкания по следующей формуле:

$$I_{\text{ПК}} = \frac{E}{\sqrt{3} \cdot Z} \cdot \frac{U_{\text{ВН}}}{U_{\text{НН}}}, \quad (18)$$

где  $E$  — ЭДС источника питания, кВ;  $Z$  — полное сопротивление до точки К3, Ом.

Подставляя численные значения, получаем периодическую составляющую тока К3 со стороны генератора:

$$I_{\text{ПК1}} = \frac{E_{\Gamma}}{\sqrt{3} \cdot Z_{1\Sigma}} = \frac{6,3}{\sqrt{3} \cdot 1,62} = 2,25 \text{ кА.}$$

Периодическая составляющая тока К3 со стороны энергосистемы:

$$I_{\text{ПК2}} = \frac{E_{\text{с}}}{\sqrt{3} \cdot Z_2} \cdot \frac{U_{\text{ВН}}}{U_{\text{НН}}} = \frac{38,5}{\sqrt{3} \cdot 45,5} \cdot \frac{38,5}{6,3} = 5,18 \text{ кА.}$$

Для проверки выбираемого оборудования необходимо знать максимальное мгновенное значение тока короткого замыкания  $I_{\text{уд}}$ :

$$I_{\text{уд}} = \sqrt{2} \cdot (I_{\text{пк1}} \cdot K_{\text{уд1}} + I_{\text{пк2}} \cdot K_{\text{уд2}}). \quad (19)$$

Следовательно, необходимо найти ударный коэффициент:

$$K_{\text{уд}} = 1 + e^{-\frac{0,01}{T_a}}, \quad (20)$$

где  $T_a$  — постоянная времени аperiodической составляющей тока КЗ.  $T_a$  можно определить по следующей формуле:

$$T_a = \frac{X_{\Sigma}}{314 \cdot R_{\Sigma}}, \quad (21)$$

где  $X_{\Sigma}$  — суммарное индуктивное сопротивление,  $R_{\Sigma}$  — суммарное активное сопротивление схемы замещения.

Постоянная времени аperiodической составляющей тока КЗ для  $I_{\text{пк1}}$ :

$$T_a = \frac{X_{\Gamma\Sigma} + X_{\text{ВЛ}\Sigma}}{314 \cdot R_{\text{ВЛ}\Sigma}} = \frac{1,61 + 0,012}{314 \cdot 0,029} = 0,178 \text{ с.}$$

Ударный коэффициент:

$$K_{\text{уд1}} = 1 + e^{-0,01/0,178} = 1,95.$$

Постоянная времени аperiodической составляющей тока КЗ для  $I_{\text{пк2}}$ :

$$T_{a1} = \frac{X_c + X_{\text{ВЛ}\Sigma} + X_{\text{т}\Sigma}}{\omega \cdot (R_{\text{ВЛ}\Sigma} + R_{\text{т}\Sigma})} = \frac{8,76 + 4,26 + 12,66}{314 \cdot (2,56 + 2,74)} = 0,015 \text{ с.}$$

Ударный коэффициент:

$$K_{\text{уд2}} = 1 + e^{-0,01/0,015} = 1,67.$$

Ударный ток КЗ в точке К-1 в начальный момент времени равен:

$$I_{\text{уд}} = \sqrt{2} \cdot (5,18 \cdot 1,67 + 2,25 \cdot 1,95) = 18,4 \text{ кА.}$$

Для выполнения задач бесперебойного электроснабжения НПЗ как в нормальном, так и в аварийном режиме были подобраны наиболее современные и надежные технические средства, которые обеспечивают бесперебойное электроснабжение [Шлейников, 2012]. Для энергоснабжения нефтеперерабатывающего завода выбраны ГПЭС фирмы Caterpillar (США) с типами двигателей G3516 и генераторами SR4, а также вакуумные выключатели марки ВВ-TEL-6/630, ограничители перенапряжения ОПН У/TEL 35/38 на линии 35 кВ и ОПН Т/TEL 6/6,9 на линии 6 кВ, с кабельным сечением 95 мм<sup>2</sup>. Установку надежно защищают элементы релейной защиты системы Simatic фирмы Siemens (Германия).

Схема электроснабжения до введения ГПЭС представлена на рис. 4.

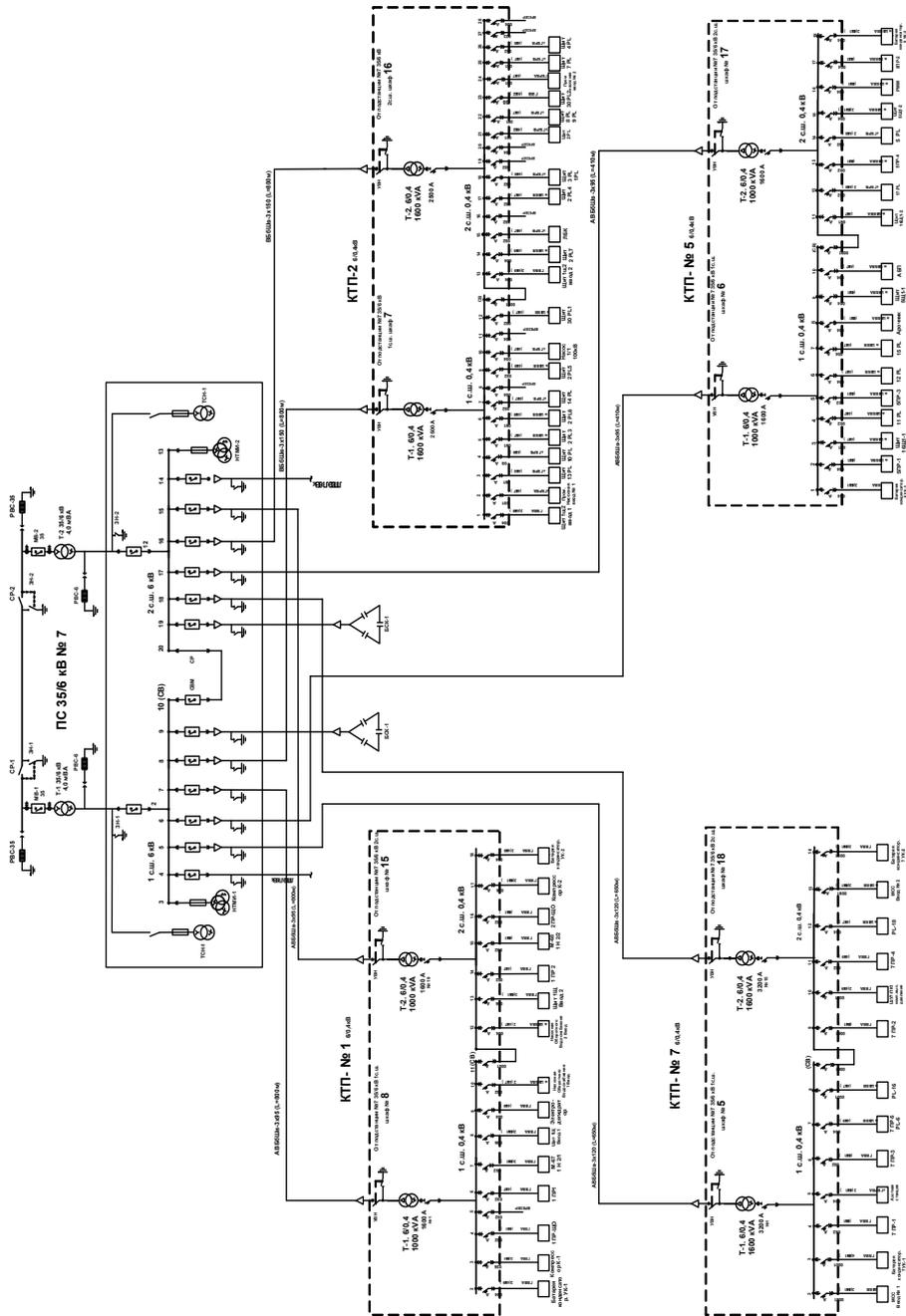


Рис. 4. Схема электроснабжения до введения ГПЭС  
 Fig. 4. Power supply scheme before the introduction of the gas-piston power plant (GPP)

При выборе альтернативного источника энергии для энергоснабжения НПЗ провели сравнительный анализ установок, функционирующих на углеводородном газе, а именно газопоршневой электростанции (ГПЭС) и газотурбинной электростанции (ГТЭС) [Eckardt, 2014; Jahnson, 2013]. Результаты сравнения установок [Новокрещенова, Шарендо, 2019] представлены в таблице 4.

**Таблица 4.** Сравнительная характеристика альтернативных источников энергии  
**Table 4.** Comparative characteristics of alternative energy sources

Характеристика	ГПЭС	ГТЭС
Долговечность	Без ограничения при соблюдении правил эксплуатации и обслуживания	
Условия работы	Количество пусков и остановок не влияет на общий моторесурс двигателя	100 пусков уменьшают ресурс газовой турбины на 500 часов
Ремонтопригодность	Ремонт производится на месте и требует меньших затрат времени	Ремонт производится на специальных заводах, что требует дополнительных затрат времени и денег на транспортировку, центровку и т. д.
Экономичность	КПД мало меняется при изменении со 100 до 50% нагрузок	КПД резко снижается на частичных нагрузках

Преимущество отдано газопоршневым установкам. Для электроснабжения НПЗ предпочтительно применение моноблочных газопоршневых электрогенераторов в полной заводской готовности, позволяющих производить электрическую энергию за счет ресурсов углеводородного газа как сопутствующего продукта при переработке нефти и списываемого в отходы. Конструкция газопоршневого электрогенератора показана на рис. 5.

Газопоршневая установка изготовлена монолитно, поэтому для ее монтажа достаточно площадки размером 20 × 30 м в арктическом контейнере. Схема подключения ГПЭС к установке по переработке газа представлена на рис. 6.

При введении в схему электроснабжения НПЗ (рис. 7) газопоршневых электрогенераторов [Быстрицкий, 2022] обеспечивается надежное и безопасное энергообеспечение. Это особенно важно при пиковых нагрузках энергопотребления в зимнее время года, а также при нестабильном электроснабжении в весенне-летний период от Сургутской ГРЭС, надежность поставки энергоресурсов которой снижается из-за большой выработки газоэнергетических установок.

В целях предупреждения возникающих повреждений элементов электроснабжения при введении ГПЭС и предотвращения аварий устанавливают релейную защиту (РЗ) [Ершов, 2020; Иванов и др., 2021], которая представляет собой совокупность автоматических устройств, обеспечивающих отключение поврежденной части сети или электроустановки.

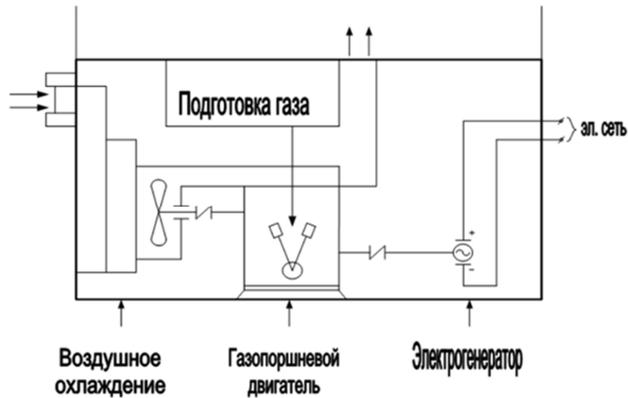


Рис. 5. Принципиальная схема ГПЭС

Fig. 5. Circuit diagram of the GPPP

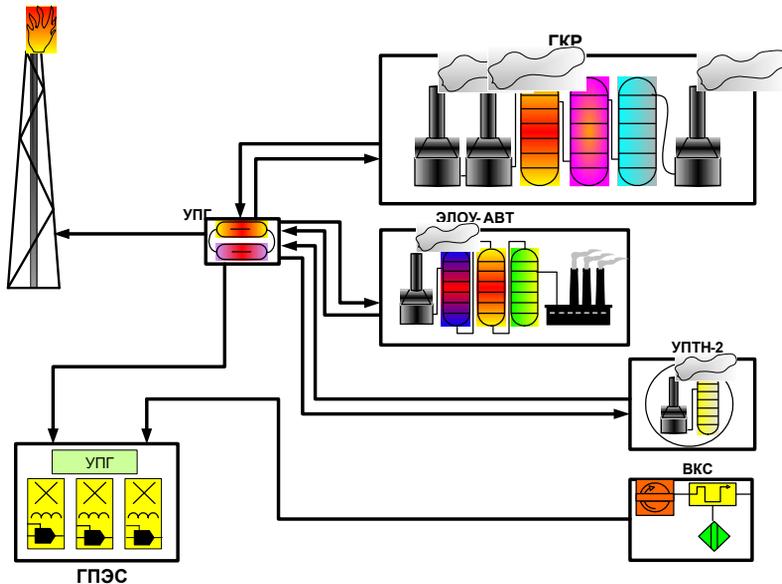


Рис. 6. Схема подключения ГПЭС к установке подготовки газа

**Условные обозначения:** ВКС — воздушная компрессорная станция; ГКР — комбинированная установка гидрокрекинга и риформинга; ГПЭС — газопоршневая электростанция; УПГ — установка по переработке газа; УПТН-2 — установка переработки товарной нефти; ЭЛОУ-АВТ — электрообессоливающая установка — атмосферно-вакуумная трубчатка.

Fig. 6. Connection diagram of the GPPP to the gas processing plant

**Conventions:** ВКС — air compressor station; ГКР — combined hydrocracking and reforming unit; ГПЭС — gas piston power plant; УПГ — gas processing plant; УПТН-2 — commercial oil processing unit; ЭЛОУ-АВТ — electric desalination plant — atmospheric-vacuum tube.

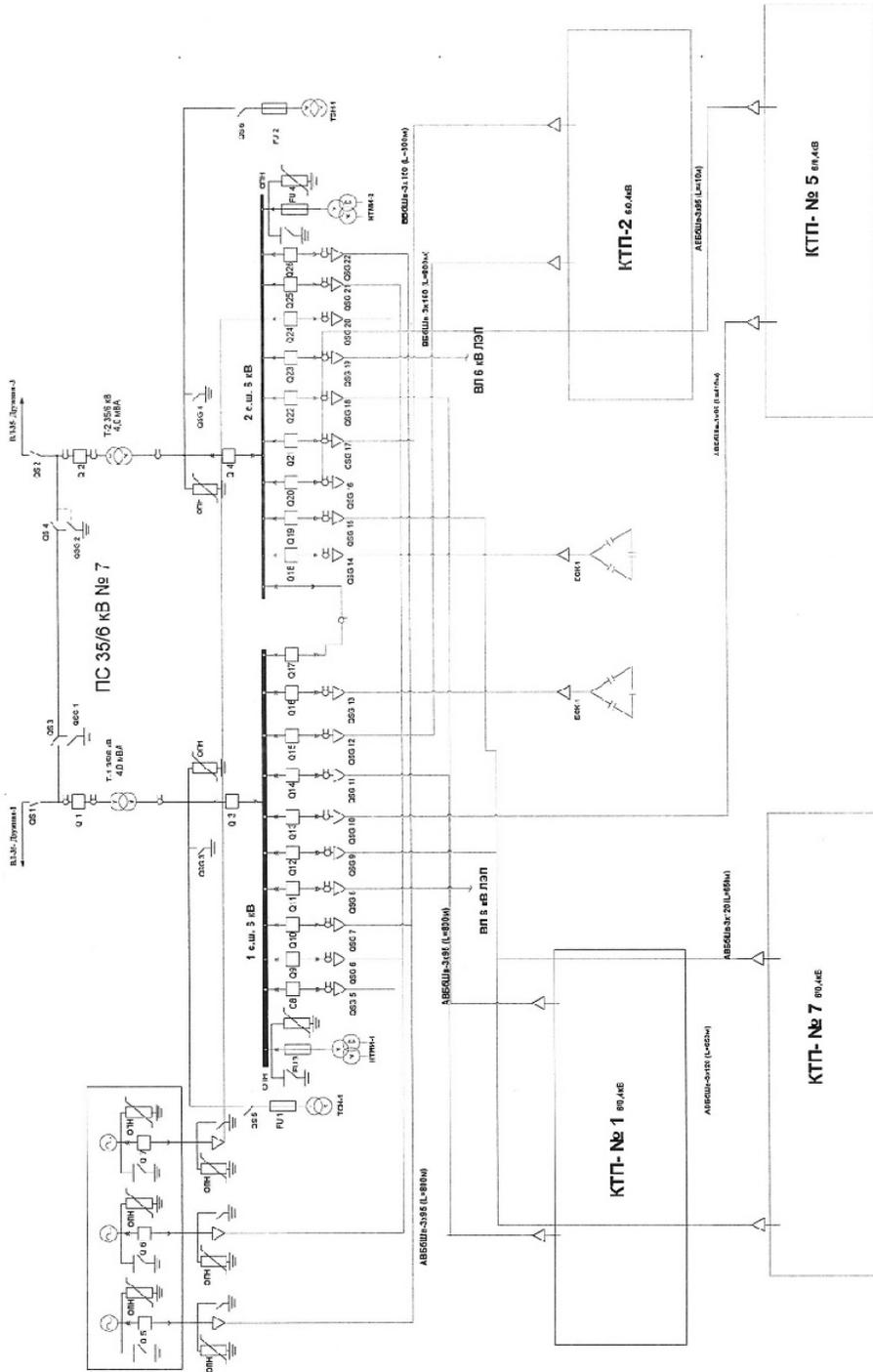


Рис. 7. Схема электроснабжения после введения ГПЭС  
 Fig. 7. Power supply scheme after the introduction of GPPS

**Таблица 5.** Показатели экономической эффективности проекта  
**Table 5.** Project economic efficiency indicators

Год	К	Э	А	$H_{ин}$	$H_{пр}$	ДП	НДП	$\alpha$	ЧДД	НЧДД
0	112 945	—	—	—	—	-112 945	-112 945	1,00	-112 945	-112 945
1	—	48 000	7 567	2 108	9 178	44 281	-64 945	0,87	38 505	-74 440
2	—	48 000	7 567	1 956	9 209	44 402	-16 945	0,76	33 575	-40 865
3	—	48 000	7 567	1 805	9 239	44 523	31 055	0,66	29 275	-11 590
4	—	48 000	7 567	1 654	9 269	44 645	79 055	0,57	25 526	13 936
5	—	48 000	7 567	1 502	9 300	44 766	127 055	0,50	22 256	36 192
6	—	48 000	7 567	1 351	9 330	44 887	175 055	0,43	19 406	55 598
7	—	48 000	7 567	1 199	9 360	45 008	223 055	0,38	16 920	72 518
8	—	48 000	7 567	1 048	9 390	45 129	271 055	0,33	14 753	87 270
9	—	48 000	7 567	897	9 421	45 250	319 055	0,28	12 863	100 133
10	—	48 000	7 567	745	9 451	45 371	367 055	0,25	11 215	111 348

**Условные обозначения:** К — капитальные вложения в проект, тыс. руб.; Э — годовой экономический эффект, тыс. руб.; А — амортизационные отчисления, тыс. руб.;  $H_{ин}$  — ставка налога на имущество, тыс. руб.;  $H_{пр}$  — ставка налога на прибыль, тыс. руб.; ДП — денежный поток за определенный период времени, тыс. руб.; НДП — накопленный денежный поток за определенный период времени, тыс. руб.;  $\alpha$  — коэффициент дисконтирования дохода расчетного периода; ЧДД — чистый дисконтированный доход инвестиционного проекта, тыс. руб.; НЧДД — накопленный чистый дисконтированный доход инвестиционного проекта, тыс. руб.

**Conventions:** К — capital investments in the project, thousand rubles; Э — annual economic effect, thousand rubles; А — depreciation charges, thousand rubles;  $H_{ин}$  — property tax rate, thousand rubles;  $H_{пр}$  — income tax rate, thousand rubles; ДП — cash flow for a certain period of time, thousand rubles; НДП — accumulated cash flow for a certain period of time, thousand rubles;  $\alpha$  — discount factor for the income of the billing period; ЧДД — net present value of the investment project, thousand rubles; НЧДД — accumulated net present value of the investment project, thousand rubles.

Приведенное технико-экономическое обоснование капиталовложений, представленное в таблице 5 и на рис. 8, доказывает рентабельность реконструкции системы электроснабжения НПЗ на основе альтернативного источника энергоснабжения.

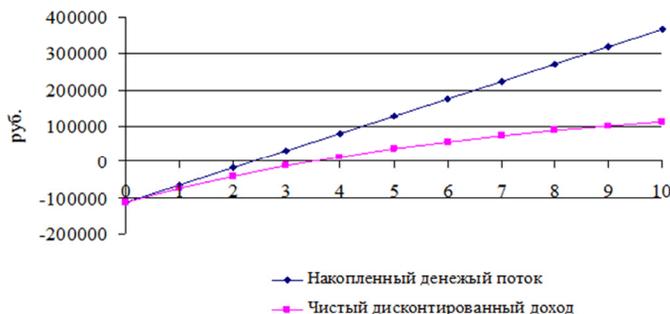


Рис. 8. График окупаемости инвестиций

Fig. 8. Schedule return on investment

Из расчетов видно, что по показателю НЧДД проект окупается к четвертому году, а по показателю НДП — уже к третьему.

## Заключение

В статье показан план реконструкции системы электроснабжения нефтеперерабатывающего завода на основе проведенного анализа электропотребления. Выполнен расчет нагрузок и токов короткого замыкания, осуществлен выбор основного силового оборудования, приведено технико-экономическое обоснование капиталовложений. Также были рассмотрены вопросы экологичности и безопасности и сделан вывод, что проект является рентабельным.

Надежность системы электроснабжения всего производства повышается путем внедрения газопоршневых электростанций, что дает следующие результаты: безаварийность работы предприятия при перебоях в электроснабжении; уменьшение затрат на приобретение электроэнергии и, как следствие, снижение себестоимости товарных нефтепродуктов; увеличение процента утилизации углеводородного газа при снижении количества сжигаемого на факеле газа.

## Список источников

- Быстрицкий Г. Ф. 2022. Теплотехника и энергосиловое оборудование промышленных предприятий: учеб. для вузов. М.: Юрайт. 305 с.
- Ершов А. М. 2020. Релейная защита в системах электроснабжения напряжением 0,38–110 кВ: учеб. пос. для практических расчетов. М.: Инфра-Инженерия. 608 с.
- Иванов И. И., Соловьев Г. И., Фролов В. Я. 2021. Электротехника и основы электроники: учеб. для вузов. СПб.: Лань. 736 с.
- Кудрин Б. И. 2011. Системы электроснабжения: учеб. пос. М.: Академия. 351 с.

- Кудряшов Р. А., Кудряшова О. М. 2016. Расчет электрических нагрузок в нефтегазодобыче: учеб. пос. Тюмень: Тюменский индустриальный университет. 95 с.
- Немировский А. Е., Сергиевская И. Ю., Крепышева Л. Ю. 2020. Электрооборудование электрических сетей, станций и подстанций: учеб. пос. М.; Вологда: Инфра-Инженерия. 174 с.
- Новокрещенова Л. Д., Шарендо Н. О. 2019. Электрооборудование предприятия и его система электроснабжения: учеб. пос. М.: Российский университет транспорта. 134 с.
- Русина А. Г., Филиппова Т. А. 2022. Режимы электрических станций и электроэнергетических систем: учеб. пос. М.: Юрайт. 399 с.
- Сивков А. А., Сайгаш А. С., Герасимов Д. Ю. 2022. Основы электроснабжения: учеб. пос. М.: Юрайт. 173 с.
- Шлейников В. Б. 2012. Электроснабжение цеха промышленного предприятия: учеб. пос. Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ. 115 с.
- Eckardt D. 2014. Gas Turbine Powerhouse: The Development of the Power Generation Gas Turbine at BBC — ABB — Alstom. Munchen: De Gruyter Oldenbourg. 498 p. <https://doi.org/10.1524/9783110359770>
- Jahson P. 2013. Modern Gas Turbine Systems: High Efficiency, Low Emission, Fuel Flexible Power Generation. Cambridge: Woodhead. 838 p.

## References

- Bystritsky, G. F. (2022). *Heat engineering and power equipment of industrial enterprises*. Urait. [In Russian]
- Ershov, A. M. (2020). *Relay protection in power supply systems with a voltage of 0.38–110 kV*. Infra-Engineering. [In Russian]
- Ivanov, I. I., Soloviev, G. I., & Frolov, V. Ya. (2021). *Electrical engineering and fundamentals of electronics*. Lan. [In Russian]
- Kudrin, B. I. (2011). *Power supply systems*. Academy. [In Russian]
- Kudryashov, R. A., & Kudryashova, O. M. (2016). *Calculation of electrical loads in oil and gas production*. Industrial University of Tyumen. [In Russian]
- Nemirovskiy, A. E., Sergievskaya, I. Yu., & Krepyшева, L. Yu. (2020). *Electrical equipment of electrical networks, stations and substations*. Infra-Engineering. [In Russian]
- Novokreschenova, L. D., & Sharendo, N. O. (2019). *Electrical equipment of the enterprise and its power supply system*. Russian University of Transport. [In Russian]
- Rusina, A. G., & Filippova, T. A. (2022). *Modes of electric power stations and electric power systems*. Urait. [In Russian]
- Sivkov, A. A., Saigash, A. S., & Gerasimov, D. Yu. (2022). *Fundamentals of power supply*. Urait. [In Russian]
- Shleynikov, V. B. (2012). *Power supply of the workshop of an industrial enterprise*. Orenburg State University, EBS DIA. [In Russian]
- Eckardt, D. (2014). *Gas turbine powerhouse: The development of the power generation gas turbine at BBC — ABB — Alstom*. De Gruyter Oldenbourg. <https://doi.org/10.1524/9783110359770>
- Jahson, P. (2013). *Modern gas turbine systems: High efficiency, low emission, fuel flexible power generation*. Woodhead.

## Информация об авторе

*Людмила Борисовна Половникова*, кандидат педагогических наук, доцент кафедры электро-энергетики, Тобольский индустриальный институт, Тобольск, Россия

*ludmila-polov@mail.ru*

## Information about the author

*Ljudmila B. Polovnikova*, Cand. Sci. (Ped.), Associate Professor, Department of Electric Power Engineering, Tobolsk Industrial Institute, Tobolsk, Russia

*ludmila-polov@mail.ru*

## Изучение теплообменных процессов при индукционном нагреве обсадной колонны применительно к определению заколонных перетоков

Филиус Фанизович Давлетшин, Денис Фавилович Исламов<sup>✉</sup>,  
Тимур Раильевич Хабиров, Марат Сальманович Гаязов,  
Ирина Григорьевна Низаева

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия  
Контакт для переписки: [islamovden@rambler.ru](mailto:islamovden@rambler.ru)<sup>✉</sup>

**Аннотация.** Одним из перспективных методов геофизического исследования действующих скважин является активная термометрия. Технология проведения исследований данным методом включает индукционный нагрев участка металлической обсадной колонны, регистрацию и анализ изменения температуры в интервале индукционного воздействия. В результате теплообмена с нагретым участком колонны в потоке жидкости, движущейся внутри колонны или в канале заколонного перетока, создается тепловое возмущение. Анализ нестационарной температуры в процессе индукционного воздействия позволяет решать актуальные практические задачи, например определять наличие перетоков жидкости в пространстве за обсадной колонной.

В данной работе на основе численного моделирования изучаются особенности формирования температурного поля в процессе индукционного нагрева обсадной колонны применительно к определению заколонных перетоков жидкости. Численное моделирование выполнено в программном пакете Ansys Fluent. Движение жидкости в скважине описывается уравнением Навье — Стокса в приближении Буссинеска — Обербека, а ее температура рассчитывается с учетом вынужденной и свободной конвекции. Для расчета температуры в индукторе, обсадной колонне, горных породах и цементном кольце используется нестационарное уравнение теплопроводности. Рассмотрено применение индукционного нагрева при диагностике заколонных перетоков в зумпфе, локализованных ниже работающих перфорированных пластов, в кольцевом пространстве между обсадной колонной и цементным кольцом.

Построены кривые распределения средней по сечению температуры в теле обсадной колонны в интервале индукционного нагрева при различном расходе в канале заколонного перетока. Показано, что с увеличением объемного расхода в канале перетока максимальный разогрев колонны снижается за счет более интенсивной теплоотдачи потоку в канале перетока. Установлено, что на температурных кривых отмечается «затяжка» температуры (температурные возмущения в теле обсадной колонны распространяются по направлению потока в канале перетока), величина которой возрастает с ростом расхода в канале перетока. Показано, что «затяжка» температуры (величина расстояния, на которое распространяется тепловое возмущение) при перетоке вверх превышает «затяжку» при перетоке вниз, что связано с влиянием естественной тепловой конвекции в жидкости внутри обсадной колонны. На примере принятых в работе условий моделирования установлено, что перетоки вверх и вниз величиной более  $0,5 \text{ м}^3/\text{сут}$  могут достоверно определяться по температурным замерам в процессе индукционного воздействия.

**Ключевые слова:** активная термометрия, индукционный нагрев, температура, Ansys Fluent, CFD-моделирование, заколонный переток, расход в канале перетока

**Благодарности:** работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования по теме: «Создание интеллектуальной комплексной технологии исследования и интерпретации данных промыслово-геофизических исследований скважин, включая оптоволоконные измерения для контроля за разработкой нефтегазовых месторождений и экологического мониторинга состояния недр, на основе использования математического моделирования, машинного обучения, алгоритмов обработки и роботизированной аппаратуры индукционного воздействия» (соглашение № 075-11-2021-061 от 25 июня 2021 г.). Лицензия Ansys Academic Research CFD используется в рамках договора с Башкирским государственным университетом от 15 июня 2020 г.

**Цитирование:** Давлетшин Ф. Ф., Исламов Д. Ф., Хабиров Т. Р., Гаязов М. С., Низаева И. Г. 2023. Изучение теплообменных процессов при индукционном нагреве обсадной колонны применительно к определению заколонных перетоков // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 1 (33). С. 60–77. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-60-77>

Поступила 22.02.2023; одобрена 24.03.2023; принята 31.03.2023

# The study of heat exchange processes during induction heating of the casing string in relation to the determination of behind-the-casing flows

Filyus F. Davletshin, Denis F. Islamov✉, Timur R. Khabirov, Marat S. Gayazov, Irina G. Nizaeva

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia  
Corresponding author: islamovden@rambler.ru✉

**Abstract.** One of the promising methods of geophysical survey of existing wells is active thermometry. The technology for conducting research using this method includes induction heating of a section of a metal casing string, registration and analysis of temperature changes in the range of induction exposure. As a result of heat exchange with the heated section of the column, a thermal disturbance is created in the fluid flow moving inside the column or in the behind-the-casing flow channel. The analysis of non-stationary temperature in the process of induction action allows solving actual practical problems, for example, determining the presence of fluid overflows in the space behind the casing string.

In this work, on the basis of numerical simulation, the features of the formation of a temperature field in the process of inductive heating of the casing string are studied in relation to the determination of behind-the-casing fluid flows. Numerical simulation was performed using the Ansys Fluent software package. Fluid movement in the well is described by the Navier–Stokes equation in the Boussinesq–Oberbeck approximation, and its temperature is calculated taking into account forced and free convection. To calculate the temperature in the inductor, casing string, rocks and cement sheath, a non-stationary heat equation is used. The application of induction heating in diagnosing behind-the-casing flows in the sump, localized below the working perforated formations, in the annular space between the casing string and the cement ring is considered.

The distribution curves of the cross-sectional average temperature in the casing string body in the induction heating interval at different flow rates in the casing cross-flow channel are plotted. It is shown that with an increase in the volume flow in the overflow channel, the maximum heating of the column decreases due to more intense heat transfer to the flow in the overflow channel. It has been established that the temperature curves show a “pull” of temperature (temperature disturbances in the body of the casing string propagate in the direction of flow in the overflow channel), the value of

which increases with the flow rate in the overflow channel. It is shown that the temperature “pull” (the distance over which the thermal disturbance propagates) during upward flow exceeds the “pull” during downward flow, which is due to the influence of natural thermal convection in the fluid inside the casing string. On the example of the modeling conditions adopted in the work, it was found that up and down flows of more than  $0.5 \text{ m}^3/\text{day}$  can be reliably determined from temperature measurements during the induction effect.

**Keywords:** active thermometry, induction heating, temperature, Ansys Fluent, CFD modeling, behind-the-casing flows, flow rate in behind the casing channel

**Acknowledgements:** this research was supported by Ministry of Science and Higher Education (Russian Federation) on the topic: “Creation of an intelligent integrated technology for research and interpretation of data from production and geophysical studies of wells, including fiber-optic measurements for monitoring the development of oil and gas fields and environmental monitoring of the state of subsoil, based on the use of mathematical modeling, machine learning, processing algorithms and robotic equipment for induction impact” (agreement No. 075-11-2021-061 of June 25, 2021). Ansys Academic Research CFD license is used under an agreement with Bashkir State University dated June 15, 2020.

**Citation:** Davletshin, F. F., Islamov, D. F., Khabirov, T. R., Gayazov, M. S., & Nizaeva, I. G. (2023). The study of heat exchange processes during induction heating of the casing string in relation to the determination of behind-the-casing flows. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(1), 60–77. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-60-77>

Received February 22, 2023; Reviewed March 24, 2023; Accepted March 31, 2023

## Введение

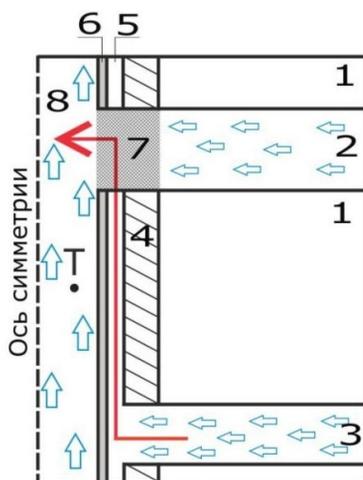
Эффективность разработки нефтегазовых месторождений в значительной степени зависит от своевременного мониторинга и контроля работы скважин [Ипатов, Кремнецкий, 2022]. Одной из важных задач контроля за разработкой является обоснование причин обводнения добываемой продукции, приводящего к росту объемов попутно добываемой воды. Отделение нефти от воды, подготовка и утилизация воды — эти трудоемкие технологические операции требуют существенных материальных затрат. Таким образом, с увеличением объемов добываемой воды снижается рентабельность добычи нефти, в связи с чем своевременное выявление источников обводнения и их предупреждение является важной задачей эффективной эксплуатации скважин [Леонтьев, Клещенко, 2015].

Существует несколько основных причин обводнения в нефтяных скважинах:

- поступление воды из законтурной области (пластовой, или нагнетаемой) по высокопроницаемым каналам в продуктивных пластах;

- нарушение герметичности цементного кольца скважин, приводящее к возникновению притока жидкости из неперфорированных обводненных пластов (заколонного перетока в цементном кольце, т. е. в кольцевом пространстве между обсадной колонной и горными породами) (рис. 1);
- образование конуса подошвенной воды в залежах высокой мощности.

При этом нарушение герметичности цементного кольца, причиной которого является некачественное цементирование, отслоение цемента вследствие плохой адгезии с обсадной колонной или горными породами, является оперативно устранимой проблемой: посредством закачки специальных изолирующих составов в пространство за обсадной колонной перетоки надежно ликвидируются [Коровин и др., 2010]. Ввиду этого вопросы своевременной и эффективной диагностики интервалов заколонного движения приобретают актуальность с прикладной точки зрения.



**Рис. 1.** Схема движения пластовых флюидов при заколонном перетоке снизу вверх: 1 — горные породы, 2 — перфорированный пласт, 3 — неперфорированный пласт, 4 — цементное кольцо, 5 — канал перетока (красная линия), 6 — металлическая обсадная колонна, 7 — интервал перфорации, 8 — поток жидкости в обсадной колонне

**Fig. 1.** Scheme of formation fluids flow during behind-the-casing flow from bottom to top: 1 — rocks, 2 — perforated reservoir, 3 — non-perforated reservoir, 4 — cement sheath, 5 — flow channel (red line), 6 — metal casing, 7 — perforation interval, 8 — casing fluid flow

Для определения заколонных перетоков применяются термические, акустические и радиоактивные методы, при этом наибольшее распространение на промысле получили методы термометрии и акустической шумометрии. Однако известные методы имеют ограничения: они не позволяют количественно определить расходные параметры заколонного потока, что связано со сложным характером акустического и термического полей, небольшой величиной регистрируемых аномалий температуры и акустического шума. Информативность этих методов снижается также при условии наличия потока в скважине, экранирующего влияние заколонного движения жидкости. В связи с вышесказанным

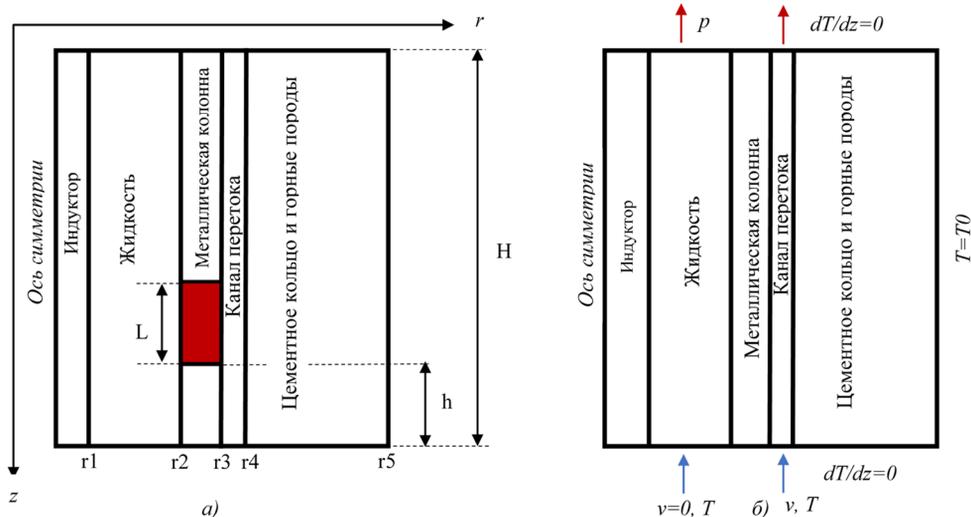
актуальным является совершенствование существующих методов диагностики заколонных перетоков в скважинах. В данной работе рассматривается перспективный метод активной термометрии, основанный на применении искусственных источников тепла в скважине. В качестве источника теплового поля используется скважинный индукционный нагреватель, который осуществляет локальный нагрев участка обсадной колонны.

Возможности использования искусственного теплового поля для решения различных практических задач и результаты промысловых испытаний рассмотрены в работах [Валиуллин и др., 2002а, 2002б]. Показана эффективность термометрических исследований скважин с использованием индукционного нагрева для определения расхода жидкости в низкодебитных скважинах. Однако в рассмотренных работах даны только общие рекомендации по методике проведения исследований. На сегодняшний день требуют развития теоретические основы применения индукционного воздействия при оценке расхода скважинной жидкости и диагностике заколонных перетоков. В работах [Sharafutdinov и др., 2012; Valiullin и др., 2012] представлена математическая модель для расчета нестационарного температурного поля в скважине при индукционном нагреве. Модель базируется на уравнении теплопроводности с тепловым источником, соответствующим удельной мощности тепловыделения в теле обсадной колонны. Теоретически обоснованы величины температурных возмущений в скважине, развиваемых в процессе индукционного нагрева. Показано, в частности, что возмущения тепла в теле обсадной колонны могут достигать нескольких десятков градусов. Однако в рассмотренных работах не учитывается наличие потока жидкости за обсадной колонной (заколонного перетока), оказывающего существенное влияние на формирование теплового поля. В данной работе исследуются особенности формирования нестационарного температурного поля при индукционном нагреве обсадной колонны с учетом наличия заколонного перетока жидкости. Рассматривается применение индукционного нагрева при диагностике заколонных перетоков в зумпфе скважины (перетоков в кольцевом пространстве между обсадной колонной и цементным кольцом, локализованных ниже работающих перфорированных пластов). Определение перетоков в зумпфе является одной из наиболее актуальных задач геофизического контроля за разработкой скважин.

## Математическое моделирование индукционного нагрева

Решается задача расчета поля температуры в скважине при индукционном нагреве металлической обсадной колонны. Моделирование выполняется в модуле CFD программного пакета Ansys Fluent. Геометрия модели в осесимметричной 2D-постановке показана на рис. 2а. На рис. 2б представлены граничные условия, используемые в модели.

Расчетная область состоит из пяти отличающихся зон с различными составляющими: индуктором, жидкостью в обсадной колонне (ее скорость равна нулю, поскольку мы рассматриваем перетоки в зумпфе скважины), металлической обсадной колонной, каналом заколонного перетока, в котором движется жидкость, цементным кольцом и горными породами.



**Рис. 2.** Геометрия задачи (а) (цветом выделен интервал нагрева). Граничные условия (б)

**Fig. 2.** Geometry of the problem (а) (the heating interval is highlighted in color). Boundary conditions (б)

При моделировании приняты следующие допущения:

- вертикальный однофазный поток в канале перетока, обсадная колонна и скважинный прибор с индуктором расположены concentрично;
- несжимаемая жидкость, учет изменения плотности жидкости вследствие изменения температуры согласно приближению Буссинеска — Обербека;
- скважинный прибор с индуктором представлен в виде однородного сплошного цилиндра из углепластика (корпус индуктора выполнен из данного материала), расположенного вдоль оси скважины по всей длине участка моделирования длиной  $H$ ;
- при включении индуктора происходит нагрев участка металлической обсадной колонны длиной  $L$ , тепловыделение равномерно происходит вдоль нагреваемого участка.

Ниже интервала нагрева моделируется участок скважины длиной  $h$ . На рис. 2 показаны также радиусы элементов модели: внешний радиус индуктора  $r_1$ , внутренний и внешний радиусы обсадной колонны  $r_2$  и  $r_3$  соответственно, внешний радиус области моделирования  $r_4$  (в расчетах принято:  $r_1 = 21$  мм,  $r_2 = 63,5$  мм,  $r_3 = 73,5$  мм,  $r_4 = 74,4$  мм,  $r_5 = 1$  м,  $h = 2,8$  м,  $H = 6$  м,  $L = 0,4$  м). Интервал индукционного нагрева располагается в диапазоне глубин 2,8–3,2 м.

Движение жидкости по скважине описывается уравнением Навье — Стокса в приближении Буссинеска — Обербека, что позволяет учитывать влияние естественной тепловой конвекции в жидкости [Henkes и др., 1991]:

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \rho_0 (1 - \beta \theta) \vec{g}, \quad (1)$$

где  $\vec{v}$  — скорость течения, м/с;  $\rho$  — плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;  $p$  — давление, Па;  $\mu$  — динамическая вязкость, Па · с;  $\rho_0$  — плотность жидкости при равновесной температуре  $T_0$ , кг/м<sup>3</sup>;  $\vec{g}$  — ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $\nabla$  — оператор Гамильтона;  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $\theta = T - T_0$  — отклонение температуры от начальной, К;  $\beta$  — коэффициент термического расширения, К<sup>-1</sup>. Уравнение движения дополняется уравнением неразрывности.

Передача теплоты в жидкости осуществляется за счет конвективного теплопереноса (естественного и вынужденного) и теплопроводности [Bergman и др., 2019]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \nabla (\theta) = a \Delta \theta, \quad (2)$$

где  $a$  — температуропроводность, м<sup>2</sup>/с.

Распределение температуры в индукторе, обсадной колонне, горных породах и цементном кольце определяется нестационарным уравнением теплопроводности [Sharafutdinov и др., 2022]:

$$c\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \Delta \theta + w(z), \quad (3)$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности, Вт/(м · К);  $c$  — удельная теплоемкость, Дж/(кг · К);  $\rho$  — плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $w(z)$  — удельная мощность тепловыделения (тепловой источник присутствует в уравнении для обсадной колонны), Вт/м<sup>3</sup>.

Рассмотрим граничные условия, представленные на рис. 2б. Начальная температура  $T_0$  совпадает с температурой на внешней границе модели и является постоянной величиной. Для жидкости на входе (нижняя граница) задается постоянная скорость потока  $v$  и температура  $T_0$  в канале заколонного перетока, на выходе (верхняя граница) задается граничное условие по давлению  $p$  и условие равенства нулю производной температуры по вертикальной координате  $z$ . На оси симметрии (левая граница, рис. 2б) задается условие равенства нулю производной температуры по радиальной координате  $r$ . На правой границе задается условие постоянства температуры горных пород  $T = T_0$ . На верхней и нижней границах в области индуктора, обсадной колонны и горных пород задается условие равенства нулю производной температуры по вертикальной координате  $z$ . Теплообмен на границах «жидкость — индуктор», «жидкость — обсадная колонна», «обсадная колонна — горные породы» обусловлен теплопроводностью. На этих границах записывается условие равенства температур и тепловых потоков. На границах «жидкость — индуктор» и «жидкость — обсадная колонна» задается условие прилипания.

Теплофизические свойства каждой зоны представлены в таблице 1.

Вязкость жидкости принята равной 0,5 мПа · с, коэффициент теплового расширения — 0,000 53 К<sup>-1</sup>. Свойства жидкости были взяты для температуры 60 °С (333,15 К), принятой как начальная температура в модели и граничная температура жидкости

на входе. Мощность тепловыделения в обсадной колонне составляет 1 кВт. Рассматривается 40-минутный цикл исследований, включающий 20-минутную фазу нагрева и 20-минутную остановку индуктора (временной интервал между циклами нагрева).

**Таблица 1.** Теплофизические свойства зон  
**Table 1.** Thermophysical properties of zones

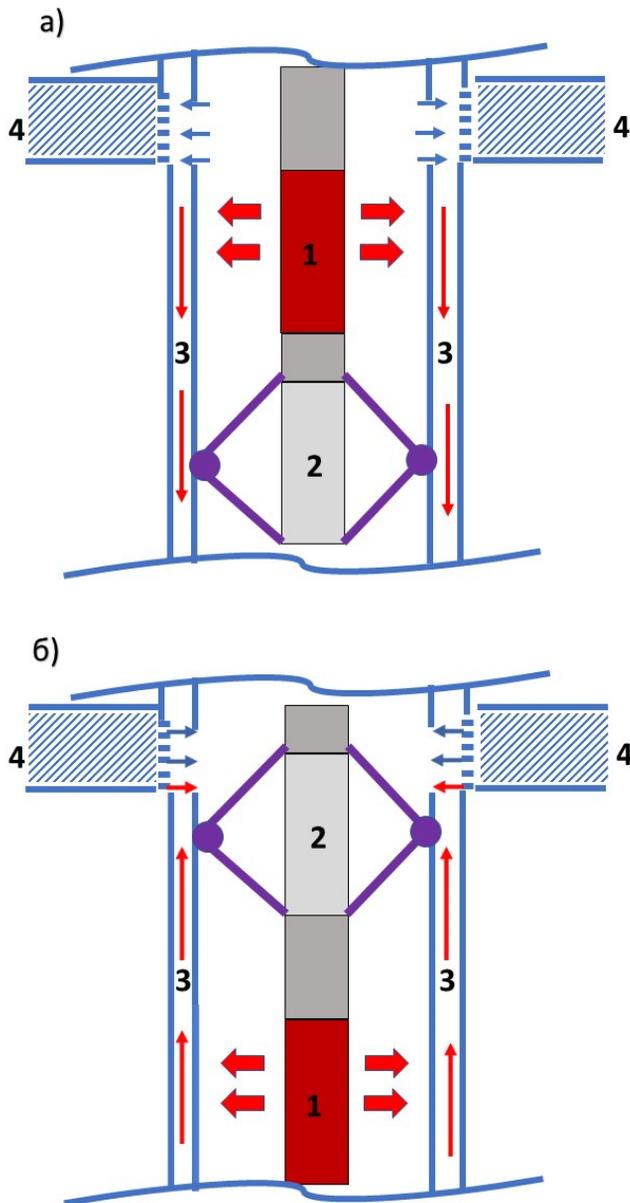
Зоны	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$c$ , Дж/(кг·К)	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Углепластик (корпус индуктора)	0,48	920	1 500
Жидкость (вода) в обсадной колонне и канале перетока	0,65	4 185	983
Металл (обсадная колонна)	50	500	8 000
Цементное кольцо + горная порода	2	1 000	2 500

## Анализ результатов расчетов

Исследуется тепловое поле, формируемое при индукционном нагреве колонны в зумпфе скважины, при заколонном перетоке сверху вниз (режим нагнетания жидкости в пласт) и перетоке снизу вверх (режим добычи пластового флюида) (рис. 3).

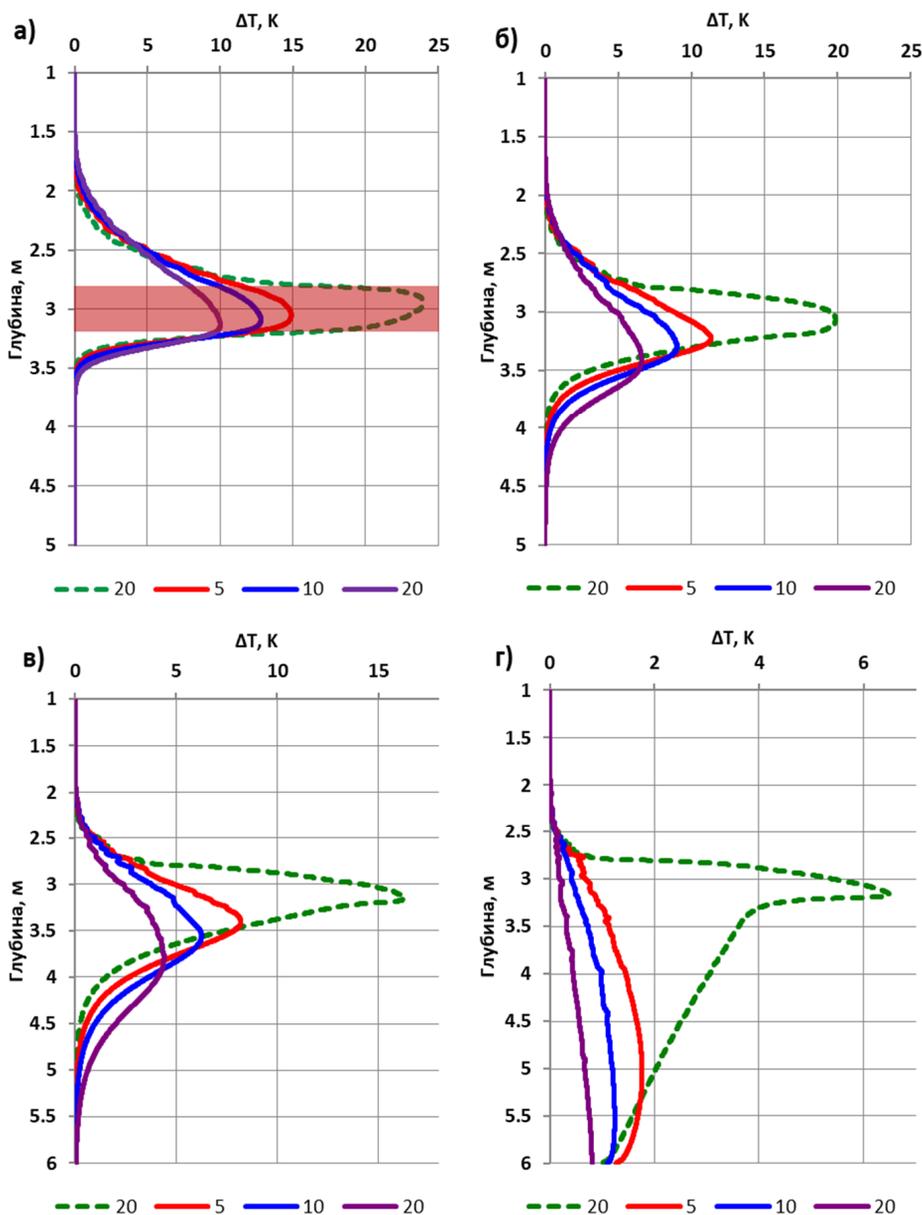
Параметром, информативным с точки зрения определения заколонного перетока, является температура колонны. Она регистрируется прижимными (прижатыми к колонне) датчиками в составе температурного модуля (позиция 2 на рис. 3), расположенного ниже/выше модуля индуктора (позиция 1 на рис. 3). Датчики экранированы от потока в обсадной колонне. В свою очередь, модуль индуктора располагается ниже интервала перфорации, осуществляя нагрев обсадной колонны, передающей тепло потоку жидкости в заколонном пространстве.

На рис. 4 показана динамика распределения средней по сечению температуры колонны в зумпфе в интервале индукционного нагрева при различных расходах заколонного перетока. Величины температурных возмущений на приведенных далее рис. 4-7 характеризуют изменение температуры  $\Delta T = \theta$  относительно начального значения. Наличие заколонного перетока приводит к снижению величины разогрева колонны за счет отдачи тепла движущемуся потоку в заколонном пространстве. С увеличением объемного расхода в канале перетока с 0,1 до 5 м<sup>3</sup>/сут максимальный разогрев колонны после 20-минутного цикла работы индуктора снижается с 23,9 до 6,7 К. Также с увеличением расхода в канале перетока увеличивается «затяжка» температуры вниз (величина расстояния, на которое передается тепловое возмущение): температурные возмущения в обсадной колонне распространяются по направлению потока в канале перетока. В частности, при расходе в канале перетока 0,1 м<sup>3</sup>/сут за 40-минутный цикл индукционного воздействия возмущения температуры распространяются вниз (относительно нижней границы интервала нагрева, расположенной на глубине 3,2 м) на расстояние порядка 0,4 м, при расходе 0,5 м<sup>3</sup>/сут — на расстояние более 1 м, при расходе 1 м<sup>3</sup>/сут — на расстояние более 2 м, при расходе 5 м<sup>3</sup>/сут — на расстояние более 3 м.



**Рис. 3.** Схема проведения исследований индукционным нагревателем при диагностике перетока сверху вниз (а) и снизу вверх (б): 1 — модуль индуктора, 2 — температурный измерительный модуль, 3 — канал перетока, 4 — продуктивный пласт

**Fig. 3.** Scheme of conducting research with an induction heater in the diagnosis of behind-the-casing flow from top to bottom (a) and from bottom to top (б): 1 — inductor module, 2 — temperature measuring module, 3 — flow channel, 4 — reservoir



**Рис. 4.** Распределение температуры в обсадной колонне через 20 мин нагрева (штриховая линия) и после остановки индуктора (сплошная линия) при перетоке вниз с различным расходом: а — 0,1 м<sup>3</sup>/сут; б — 0,5 м<sup>3</sup>/сут; в — 1 м<sup>3</sup>/сут; г — 5 м<sup>3</sup>/сут. Цветом выделен интервал индукционного нагрева

**Fig. 4.** Temperature distribution in the casing string after 20 min of heating (dashed line) and after the inductor shutdown (solid line) with downward flow with different flow rates: а — 0.1 m<sup>3</sup>/day; б — 0.5 m<sup>3</sup>/day; в — 1 m<sup>3</sup>/day; г — 5 m<sup>3</sup>/day. The color indicates the interval of induction heating

Динамика во времени температуры в обсадной колонне на различных расстояниях относительно нижней границы интервала нагрева при различном расходе в канале перетока представлена на рис. 5. При расходе  $0,1 \text{ м}^3/\text{сут}$  через 40 минут температурные возмущения на рассмотренных глубинах (0,5, 1, 1,5, 2 м ниже интервала нагрева) не превышают 0,03 К. При расходе  $0,5 \text{ м}^3/\text{сут}$  и более температурные возмущения в колонне достигают нескольких градусов и могут уверенно регистрироваться температурными датчиками, расположенными на указанных глубинах.

Важно отметить, что температуропроводность металла обсадной колонны равна около  $10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ . За 40-минутный цикл индукционного воздействия фронт температурного возмущения, обусловленного теплопроводностью, проходит расстояние не более  $s = \sqrt{\pi at} = 0,3 \text{ м}$ . Это показывает, что источником теплового возмущения в обсадной колонне на расстояниях более 0,5 м относительно интервала нагрева является поток в канале перетока. Следовательно, увеличение температуры обсадной колонны на расстоянии более 0,5 м ниже интервала нагрева является качественным признаком заколонного движения жидкости вниз.

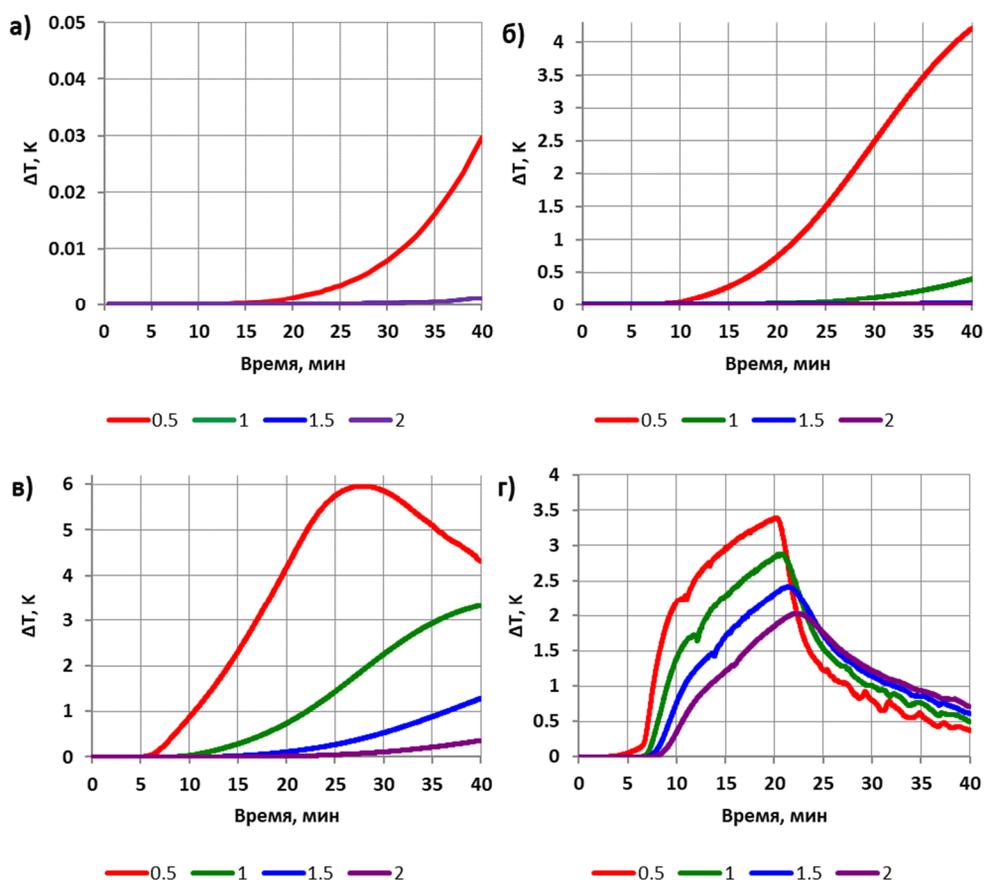
Схема расположения скважинного прибора с индуктором при определении заколонного перетока снизу вверх к интервалу перфорации в режиме отбора жидкости из перфорированного пласта показана на рис. 3б. Температура жидкости регистрируется прижатыми к колонне датчиками температуры, расположенными выше индуктора по потоку в канале перетока. На рис. 6 показаны кривые распределения температуры колонны в зумпфе в интервале индукционного нагрева в различные моменты времени после начала нагрева и при различном расходе в канале заколонного перетока.

С увеличением расхода заколонного перетока с  $0,1$  до  $5 \text{ м}^3/\text{сут}$  максимальный разогрев колонны после 20-минутного нагрева снижается с 24,2 до 6,6 К. Сравнивая с результатами расчетов при перетоке вниз, видим, что величины максимального разогрева колонны при перетоках вниз и вверх близки. Однако «затяжка» температуры для перетока вверх больше, чем для перетока вниз. Например, при расходе в канале перетока  $0,5 \text{ м}^3/\text{сут}$  возмущения температуры распространяются для перетока вниз на расстояние около 1,3 м, для перетока вверх — на расстояние около 2,8 м. Вышесказанное связано с влиянием естественной тепловой конвекции в жидкости внутри обсадной колонны: слои жидкости вблизи разогретой стенки колонны нагреваются и поднимаются вверх за счет более низкой плотности, передавая тепло внутренней стенке колонны выше интервала нагрева.

Динамика температуры обсадной колонны в процессе индукционного нагрева на различных расстояниях относительно верхней границы интервала нагрева (расположенной на глубине 2,8 м) при различных расходах в заколонной циркуляции (ЗКЦ) представлена на рис. 7.

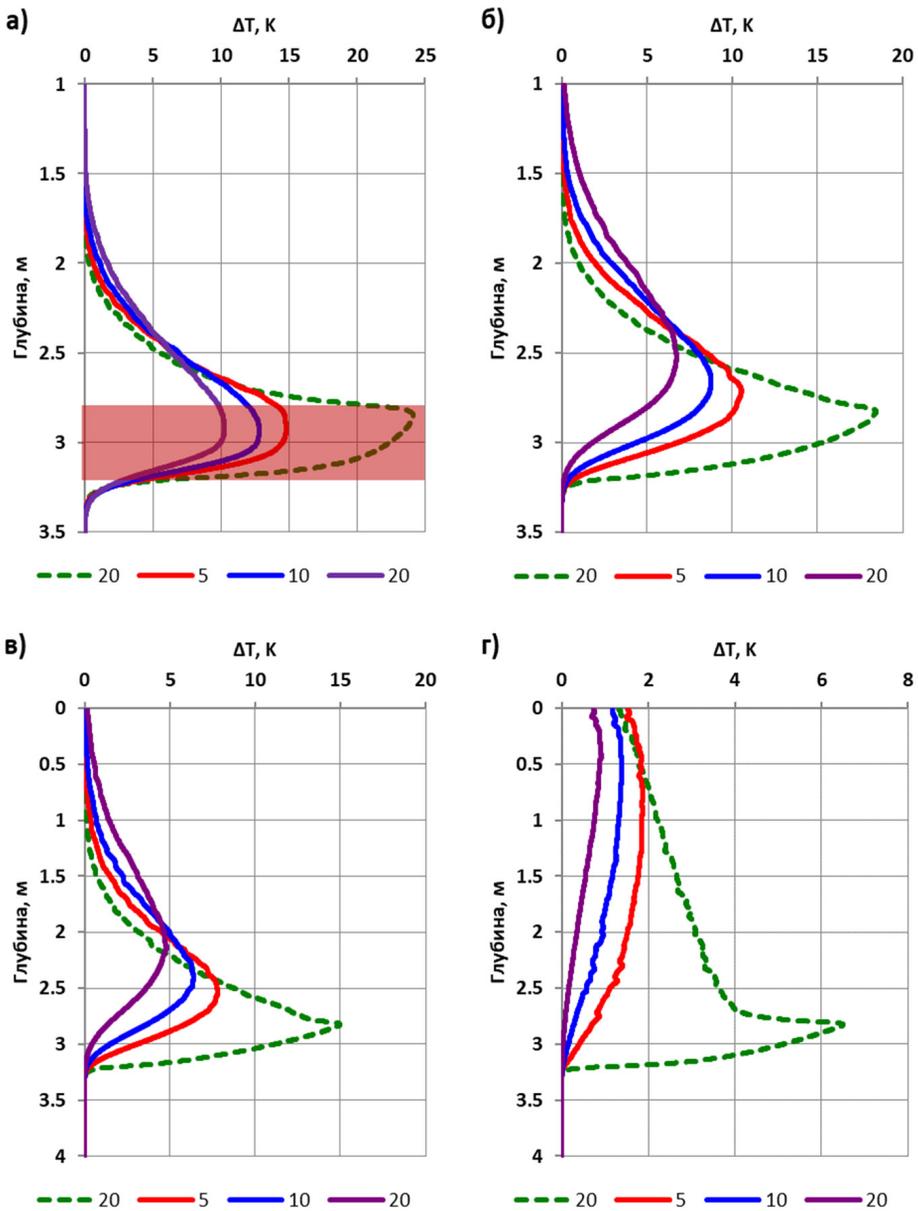
При расходе в канале перетока  $0,1 \text{ м}^3/\text{сут}$  (рис. 7а) в течение 40-минутного цикла индукционного воздействия отмечаются существенные температурные возмущения в колонне на расстояниях 0,5 и 1 м выше интервала нагрева, достигающие более 4 и 0,5 К соответственно. Поскольку при перетоке вниз подобных температурных

возмущений не наблюдается, можно заключить, что они в значительной степени связаны с влиянием естественной тепловой конвекции жидкости в обсадной колонне. На расстояниях 1,5 и 2 м возмущения температуры практически отсутствуют, поэтому данные интервалы представляют информативность с точки зрения обоснованного определения заколонного перетока вверх без влияния естественной тепловой конвекции. На расстоянии 1,5 м относительно интервала нагрева при расходе в канале перетока 0,5, 1 и 5 м<sup>3</sup>/сут температурные возмущения в колонне достигают 0,5, 2,5 и 2,6 К соответственно, т. е. заколонные перетоки вверх величиной более 0,5 м<sup>3</sup>/сут могут достоверно определяться по температурным замерам в процессе индукционного нагрева.



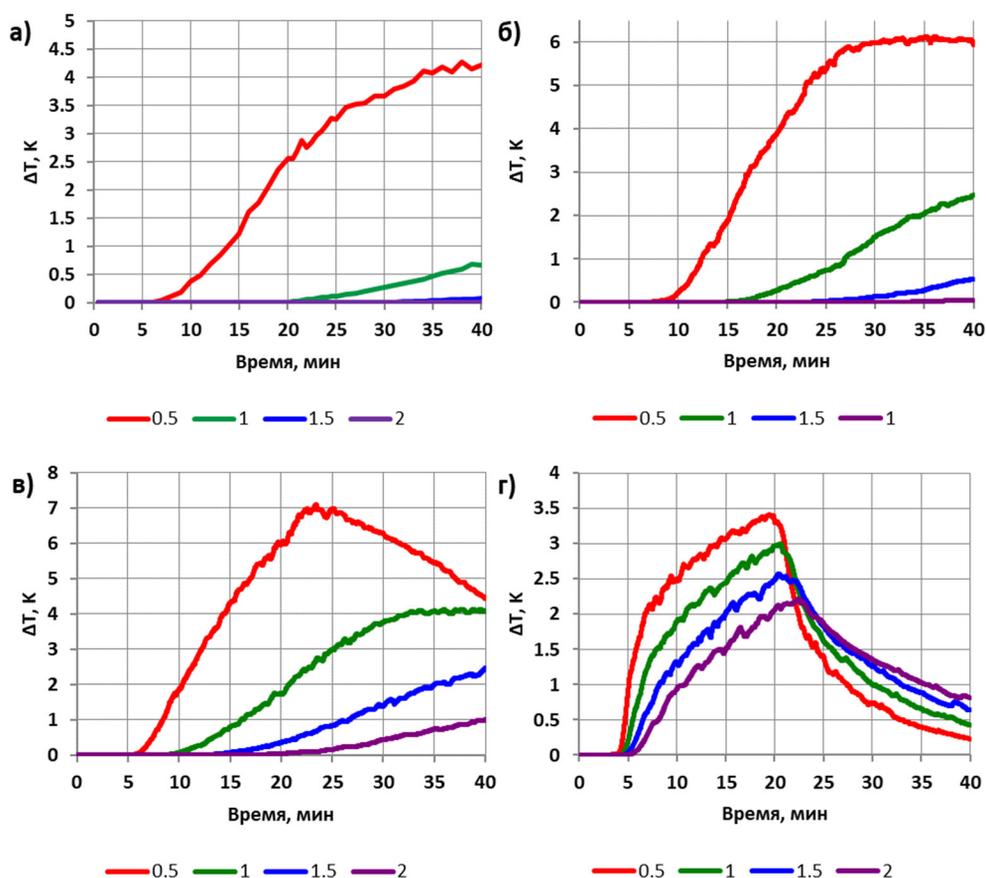
**Рис. 5.** Динамика температуры в теле обсадной колонны при перетоке вниз с различным расходом: а — 0,1 м<sup>3</sup>/сут; б — 0,5 м<sup>3</sup>/сут; в — 1 м<sup>3</sup>/сут; г — 5 м<sup>3</sup>/сут. Шифр кривых: расстояние до нижней границы интервала нагрева, м

**Fig. 5.** Temperature dynamics in the body of the casing during downward flow with different flow rates: а — 0.1 m<sup>3</sup>/day; б — 0.5 m<sup>3</sup>/day; в — 1 m<sup>3</sup>/day; г — 5 m<sup>3</sup>/day. The code of the curves: distance to the lower limit of the heating interval, m



**Рис. 6.** Распределение температуры в обсадной колонне через 20 мин нагрева (штриховая) и после остановки индуктора (сплошная линия) при перетоке вверх с различным расходом: а — 0,1 м<sup>3</sup>/сут; б — 0,5 м<sup>3</sup>/сут; в — 1 м<sup>3</sup>/сут; г — 5 м<sup>3</sup>/сут. Цветом выделен интервал индукционного нагрева

**Fig. 6.** Temperature distribution in the casing string after 20 min of heating (dashed line) and after the inductor shutdown (solid line) with upward flow with different flow rates: а — 0.1 m<sup>3</sup>/day; б — 0.5 m<sup>3</sup>/day; в — 1 m<sup>3</sup>/day; г — 5 m<sup>3</sup>/day. The color indicates the interval of induction heating



**Рис. 7.** Динамика температуры в теле обсадной колонны при перетоке вверх с различным расходом: а — 0,1 м³/сут; б — 0,5 м³/сут; в — 1 м³/сут; г — 5 м³/сут. Шифр кривых: расстояние от верхней границы интервала нагрева, м

**Fig. 7.** Temperature dynamics in the body of the casing during upward flow with different flow rates: а — 0.1 m³/day; б — 0.5 m³/day; в — 1 m³/day; г — 5 m³/day. The code of the curves: distance from the upper limit of the heating interval, m

## Закключение

Таким образом, на основе численного моделирования в программном пакете Ansys Fluent исследованы особенности нестационарного теплового поля в скважине, обусловленного локальным индукционным нагревом обсадной колонны, при наличии за- колонных перетоков вниз и вверх в кольцевом пространстве между обсадной колонной и цементным кольцом в зумпфе скважины (ниже работающих продуктивных пластов).

Установлено, что расход жидкости в канале перетока оказывает существенное влияние на конфигурацию кривых распределения температуры, зарегистрированных при- жатыми к обсадной колонне температурными датчиками: с увеличением объемного

расхода в канале перетока, во-первых, снижается величина максимального разогрева колонны, во-вторых, увеличивается «затяжка» температуры (величина расстояния, на которое передается тепловое возмущение) по направлению движения потока в канале перетока. Показано, что «затяжка» температуры при перетоке вверх превышает по расстоянию «затяжку» при перетоке вниз, что связано с влиянием естественной тепловой конвекции в жидкости внутри обсадной колонны. На примере принятых в работе условий моделирования определены величины объемного расхода потока в канале перетока, которые могут достоверно определяться по температурным замерам в процессе индукционного воздействия, и расстояния относительно границ интервала нагрева, на которых должны быть расположены датчики для регистрации температурного сигнала.

Полученные данные дополняют известные результаты по формированию нестационарных тепловых полей при наличии искусственных скважинных источников тепла и могут быть использованы при интерпретации результатов термометрических измерений в добывающих и нагнетательных скважинах.

## Список литературы

- Валиуллин Р. А., Шарафутдинов Р. Ф., Сорокань В. Ю. 2002а. Использование искусственных тепловых полей в скважинной термометрии // Каротажник. № 10. С. 124–137.
- Валиуллин Р. А., Шарафутдинов Р. Ф., Рамазанов А. Ш., Дрягин В. В., Адиев Я. Р., Шилов А. А. 2002б. Способ активной термометрии действующих скважин (варианты): пат. 2194160 РФ / заявитель и патентообладатель Башкирский государственный университет, НПФ «ГеоТЭК». № 2001102007/03; заявл. 22.01.2001; опубл. 10.12.2002.
- Ипатов А. И., Кременецкий М. И. 2022. Проблемы промыслово-геофизического контроля в условиях «новой экономической политики» // Актуальные проблемы нефти и газа. № 2 (37). С. 87–99. <https://doi.org/10.29222/ipng.2078-5712.2022-37.art6>
- Коровин В. М., Лобанков В. М., Миллер А. В., Миллер А. А., Сулейманов А. А., Барышев В. И., Соломина И. Л., Шаисламова Г. Г. 2010. Геофизические исследования и работы в скважинах: в 7 т. Том 4. Контроль технического состояния скважин. Уфа: Информреклама. 436 с.
- Леонтьев Д. С., Клещенко И. И. 2015. Методические аспекты диагностики причин обводнения нефтяных скважин // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. № 2 (110). С. 61–67. <https://doi.org/10.31660/0445-0108-2015-2-61-67>
- Bergman Th. L., Lavine A. S., Incropera F. P., DeWitt D. P. 2019. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 8<sup>th</sup> ed. John Wiley & Sons. 992 p.
- Henkes R. A. W. M., Van der Flugt F. F., Hoogendoorn C. J. 1991. Natural-convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds-number turbulence models // International Journal of Heat and Mass Transfer. Vol. 34. No. 2. Pp. 377–388. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(91\)90258-G](https://doi.org/10.1016/0017-9310(91)90258-G)
- Sharafutdinov R., Valiullin R., Ramazanov A., Fedotov V., Sadretdinov A., Zakirov M. 2012. Application of active temperature logging at oilfields of Russia // SPE Russian Oil and Gas Exploration and Production Technical Conference and Exhibition (16–18 October 2012, Moscow, Russia). Paper SPE-161982-MS. <https://doi.org/10.2118/161982-MS>

- Sharafutdinov R., Akchurin R., Davletshin F., Ramazanov A. 2022. Numerical simulation of induction heating of well casing // *Aspects in Mining and Mineral Science*. Vol. 9. No. 3. Pp. 1047–1050. <https://doi.org/10.31031/AMMS.2022.09.000714>
- Valiullin R., Sharafutdinov R., Ramazanov A., Shilov A. 2012. Enhancement of well productivity using a technique of high-frequency induction treatment // *SPE Heavy Oil Conference* (12–14 June 2012, Calgary, Alberta, Canada). Paper SPE-157724-MS. <https://doi.org/10.2118/157724-MS>

## References

- Valiullin, R. A., Sharafutdinov, R. F., & Sorokan, V. Yu. (2002a). The use of artificial thermal fields in borehole thermometry. *Karotazhnik*, (10), 124–137. [In Russian]
- Valiullin, R. A., Sharafutdinov, R. F., Ramazanov, A. Sh., Dryagin, V. V., Adiev, Ya. R., & Shilov, A. A. (2002b). *Method of active temperature logging of operating wells (versions)* (R.F. Patent No. 2194160). Bashkir State University, GeoTEC. [In Russian]
- Ipatov, A. I., & Kremenetsky, M. I. (2022). Problems of field development control in the context of the “new economic policy”. *Actual Problems of Oil and Gas*, (2), 87–99. <https://doi.org/10.29222/ipng.2078-5712.2022-37.art6> [In Russian]
- Korovin, V. M., Lobankov, V. M., Miller, A. V., Miller, A. A., Suleimanov, A. A., Baryshev, V. I., Solomina, I. L., & Shaislamova, G. G. (2010). *Geophysical surveys and work in wells. Volume 4. Control of the technical condition of wells*. Informreklama. [In Russian]
- Leontiev, D. S., & Kleschenko, I. I. (2015). Methodical aspects of diagnostics of oil wells drowning causes. *Oil and Gas Studies*, (2), 61–67. <https://doi.org/10.31660/0445-0108-2015-2-61-67> [In Russian]
- Bergman, Th. L., Lavine, A. S., Incropera, F. P., & DeWitt, D. P. (2019). *Fundamentals of heat and mass transfer* (8th ed.). John Wiley & Sons.
- Henkes, R. A. W. M., Van der Flugt, F. F., & Hoogendoorn, C. J. (1991). Natural-convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds-number turbulence models. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34(2), 377–388. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(91\)90258-G](https://doi.org/10.1016/0017-9310(91)90258-G)
- Sharafutdinov, R., Valiullin, R., Ramazanov, A., Fedotov, V., Sadretdinov, A., & Zakirov, M. (2012). Application of active temperature logging at oilfields of Russia. *SPE Russian Oil and Gas Exploration and Production Technical Conference and Exhibition* (October 16–18, 2012, Moscow, Russia), Paper SPE-161982-MS. <https://doi.org/10.2118/161982-MS>
- Sharafutdinov, R., Akchurin, R., Davletshin, F., & Ramazanov, A. (2022). Numerical simulation of induction heating of well casing. *Aspects in Mining and Mineral Science*, 9(3), 1047–1050. <https://doi.org/10.31031/AMMS.2022.09.000714>
- Valiullin, R., Sharafutdinov, R., Ramazanov, A., & Shilov, A. (2012). Enhancement of well productivity using a technique of high-frequency induction treatment. *SPE Heavy Oil Conference* (June 12–14, 2012, Calgary, Alberta, Canada), Paper SPE-157724-MS. <https://doi.org/10.2118/157724-MS>

## Информация об авторах

*Филиус Фанизович Давлетишин*, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры геофизики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия  
felix8047@mail.ru

*Денис Фавилович Исламов*, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры геофизики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия  
islamovden@rambler.ru

*Тимур Раильевич Хабиров*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геофизики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия  
khabirovtr@mail.ru

*Марат Сальманович Гаязов*, старший преподаватель кафедры геофизики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия  
gaiver28@mail.ru

*Ирина Григорьевна Низаева*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геофизики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия  
nizaevaig@rambler.ru

## Information about the authors

*Filyus F. Davletshin*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assistant, Department of Geophysics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia  
felix8047@mail.ru

*Denis F. Islamov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associated Professor, Department of Geophysics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia  
islamovden@rambler.ru

*Timur R. Khabirov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associated Professor, Department of Geophysics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia  
khabirovtr@mail.ru

*Marat S. Gayazov*, Associated Professor, Department of Geophysics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia  
gaiver28@mail.ru

*Irina G. Nizaeva*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associated Professor, Department of Geophysics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia  
nizaevaig@rambler.ru

## Моделирование блокирования трещин автогидроразрыва пласта в гидродинамическом симуляторе

Александр Павлович Шевелёв<sup>✉</sup>, Александр Янович Гильманов,  
Антон Михайлович Касперович

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
Контакт для переписки: [a.p.shevelev@utmn.ru](mailto:a.p.shevelev@utmn.ru)<sup>✉</sup>

**Аннотация.** Месторождения, добыча нефти на которых ведется несколько лет, в большинстве случаев разрабатываются с помощью технологии заводнения. При длительной эксплуатации месторождения для поддержания расхода флюида на прежнем уровне приходится увеличивать забойное давление нагнетательной скважины, что при превышении давления разрыва пласта приводит к образованию трещин автогидроразрыва пласта (автоГРП). Неконтролируемый рост трещины автоГРП может привести к прорыву воды по ней в зону дренирования добывающей скважины и обводнению продукции. Такое явление наблюдалось на нескольких месторождениях, поэтому задача блокирования трещин автоГРП является актуальной. Существующие математические модели блокирования трещин автоГРП не позволяют определить объем утечек из трещины, чтобы точно рассчитать объем закачиваемого реагента. В статье описано построение физико-математической модели нагнетания раствора полимера в воде в трещину автоГРП, при этом впервые учитывался объем утечек реагента за пределы трещины. Целью работы является установление зависимостей критического времени заполнения трещины и объема утечек полимера от расхода закачиваемого реагента. Разработанная в статье математическая модель основана на законах сохранения массы, импульса и энергии для нефти, воды и полимера. Построена гидродинамическая модель, описывающая процесс коагуляции трещины автоГРП. Получено распределение концентрации осевшего полимера как в трещине, так и за ее пределами, определено критическое время заполнения трещины при заданных свойствах породы и технологических параметрах работы скважины. Обнаружено, что объем утечек полимера становится больше вследствие увеличения расхода закачиваемого раствора полимера.

**Ключевые слова:** гидродинамическое моделирование, автогидроразрыв пласта, кольтматация, поддержание пластового давления, концентрация полимера, объем утечек полимера, свойства пласта

**Цитирование:** Шевелёв А. П., Гильманов А. Я., Касперович А. М. 2023. Моделирование блокирования трещин автогидроразрыва пласта в гидродинамическом симуляторе // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 1 (33). С. 78–91. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-78-91>

Поступила 14.02.2023; одобрена 12.03.2023; принята 31.03.2023

## Simulation of blocking of hydraulic fracture near injector in a reservoir simulator

Alexander P. Shevelev<sup>✉</sup>, Alexander Ya. Gilmanov, Anton M. Kasperovich

University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: [a.p.shevelev@utmn.ru](mailto:a.p.shevelev@utmn.ru)<sup>✉</sup>

**Abstract.** Mature fields, as a rule, are developed using flooding technology. During long-term operation of field, in order to maintain the fluid flow rate at the same level, it is necessary to increase the bottom-hole pressure of the injector, which, when the pressure of the fracturing is exceeded, leads to the formation of fractures near the injectors. Uncontrolled growth of these fractures can lead to a breakthrough of water through it into the drainage zone of the producer and increase in the water cut of the production. This phenomenon has been observed in several fields, so the task of blocking of hydraulic fractures near injector is relevant. The existing mathematical models of blocking of hydraulic fractures near the injectors do not allow to determine the volume of leaks from the fracture in order to accurately calculate the volume of the injected reagent. The article describes the creation of a physical and mathematical model of injection of a polymer solution in water in the fracture. The aim of the work is to establish the dependencies of the critical fracture filling time and the volume of polymer leaks on the flow rate of the injected reagent. The mathematical model developed in the article is based on the laws of conservation of mass, momentum and energy for the oil, water and polymer. A reservoir simulator model describing the process of colmatation of hydraulic fracture near injector is created. The distribution of the concentration of the retained polymer was obtained both in the fracture and outside it. The critical time of filling the fracture was determined for the specified rock properties and technological parameters of the well operation. It is determined

that the volume of polymer leaks becomes larger due to an increase in the flow rate of the injected displacement agent.

**Keywords:** reservoir simulation, hydraulic fracture near the injector, colmatation, flooding technology, polymer concentration, polymer leakage volume, reservoir properties

**Citation:** Shevelev, A. P., Gilmanov, A. Ya., & Kasperovich, A. M. (2023). Simulation of blocking of hydraulic fracture near injector in a reservoir simulator. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(1), 78–91. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-78-91>

Received February 14, 2023; Reviewed March 12, 2023; Accepted March 31, 2023

## Введение

С целью увеличения коэффициента извлечения нефти в продуктивных пластах применяют системы поддержания пластового давления (ППД). В этом случае возможно как естественное (за счет свойств породы и упругого водонапорного режима разработки залежи), так и искусственное сохранение пластового давления (за счет закачки агентов ППД, также служащих агентами вытеснения для добываемого флюида). Закачка вытесняющего агента в пласт происходит через нагнетательные скважины с установленным значением давления на ее забое [Байков и др., 2012; Галимов, 2017; Тома и др., 2017]. В случае если забойное давление будет выше давления разрыва пласта, произойдет образование трещины автогидроразрыва пласта (автоГРП) [Гимазов, Базыров, 2020; Ручкин, Ягафаров, 2005; Черный и др., 2016]. Наличие трещин автоГРП в нефтенасыщенной области пласта приводит к быстрому прорыву воды в добывающие скважины и увеличению обводненности продукции, уменьшению коэффициента охвата пласта заводнением. Данное явление наблюдалось, в частности, на Приобском месторождении [Байков и др., 2012; Мальцев и др., 2012; Шель и др., 2020] и месторождении Daqing (Китай) [Yan et al., 2004]. Приобское месторождение характеризуется наличием высоких пластовых давлений и низкой приемистостью воды за счет малого значения относительной фазовой проницаемости воды при остаточной нефтенасыщенности. Это вынуждает держать забойное давление выше давления гидроразрыва. С помощью гидропрослушивания скважин и специальных гидродинамических исследований можно обнаружить трещины автоГРП, длина которых достигает 1 км.

Еще одним подходом к определению размеров трещин автоГРП является использование геомеханических моделей техногенных трещин. Как правило, для таких моделей требуется предварительно определить деформационные свойства породы, что осуществимо в лабораторных экспериментах [Cheng, Milsch, 2021; Rutqvist, 2015], к примеру с помощью бразильского теста [Cheng, Milsch, 2021].

Подробные обзоры существующих аналитических и численных моделей трещин автоГРП, а также численных методов решения задач механики твердого тела [Татосов, Шляпкин, 2018; Dontsov, Peirce, 2014; Seright, 1997] характеризуют современное состо-

яние научных исследований в представленной области. Кроме того, в них предлагаются новые критерии для описания распространения трещины.

Небольшие размеры трещины автоГРП в нагнетательных скважинах обычно способствуют увеличению приемистости скважины. Частичное или полное закрытие трещины автоГРП в таком случае достигается благодаря ограничению расхода воды [Байков и др., 2011; Davletbaev et al., 2014]. Если длина трещины автоГРП составляет несколько десятков и сотен метров, ограничивать расход воды без существенного снижения пластового давления становится затруднительно. Поэтому необходимо рассмотреть способы блокирования трещины автоГРП.

В работе [Гильманов и др., 2022] анализируется вероятность блокирования трещин автоГРП полимер-дисперсной системой [Seright, 2015]. Оценивается коагулирующее действие полимер-дисперсных составов с применением математической модели, описывающей поток суспензии по трещине. Определяется, что в момент подхода фронта оторочки суспензии к концу трещины формируется разрыв объемной доли частиц, который движется навстречу потоку. Описанная модель позволяет проводить экспресс-оценки эффективной длины трещины автоГРП после частичного блокирования, тем не менее для точных расчетов необходимо создание гидродинамической модели, например, с помощью симуляторов Schlumberger Eclipse, tNavigator, CMG STARS.

Изучаются особенности геолого-гидродинамического моделирования полимерного заводнения [Черемсин и др., 2012; Mobbs, Hammond, 2001]. Отличие полимерного заводнения от блокирования трещины автоГРП полимер-дисперсной смесью или раствором полимера заключается в закачке больших объемов реагента и отсутствии трещины в первом случае. Помимо этого, авторами [Черемсин и др., 2012; Mobbs, Hammond, 2001] проведено решение тестовых задач, сформулированы основные принципы создания гидродинамических моделей полимерного заводнения.

Вместо закачки суспензии в пласт современные гидродинамические симуляторы позволяют воспроизвести только закачку полимера. Адсорбируясь на поверхности породы [Cheng, Milsch, 2021; Sorbie, 1991], молекулы полимера оседают в трещине автоГРП и тем самым блокируют ее. Выделяют два механизма удержания молекул полимера в пористых средах:

- механический, когда более крупные молекулы полимера застревают в узких каналах пористой среды;
- гидродинамический, при котором некоторые молекулы полимера временно удерживаются за счет гидродинамического напора, формируя своеобразные «мостики».

Принципиальная схема оседания молекул полимера показана на рис. 1.

Анализ вышеприведенных публикаций показывает, что, несмотря на интерес исследователей к вопросу, на данный момент не представлена модель, описывающая блокирование трещины автоГРП с помощью закачки полимера. Уже разработанные модели, использующие подходы механики многофазных систем, не учитывают объем утечек закачанного реагента. Целью работы является установление зависимостей критического времени заполнения трещины и объема утечек реагента от технологических параметров работы скважины.

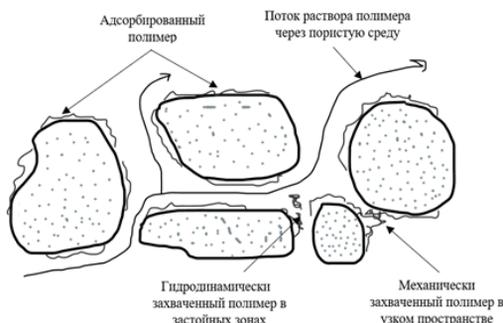


Рис. 1. Принципиальная схема механизмов удержания полимера в пористой среде  
 Fig. 1. Schematic diagram of polymer retention mechanisms in porous media

## Математическая модель

Решение обозначенной проблемы осуществляется с помощью физико-математической модели закачки полимера в трещину автоГРП с учетом объема утечек реагента за пределы трещины. Стоит отметить, что в качестве реагента для блокирования трещины автоГРП могут быть рассмотрены активные трассеры, однако полимер для этой цели имеет бóльшую актуальность и все чаще применяется на практике реальных месторождений. Результаты расчетов получены с помощью коммерческого гидродинамического симулятора tNavigator, в котором используется стандартная трехфазная трехкомпонентная изотермическая модель (black oil). Предложенная авторами математическая модель основана на законах механики многофазных систем. Уравнения фильтрации нефти, воды и полимера, полученные при подстановке закона Дарси в закон сохранения массы, имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi N_o) = \operatorname{div} \left( x_{c,o} \varepsilon_o \left( k \frac{k_{ro}}{\mu_o} (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D) \right) + q_c \right), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\varphi N_w) = \operatorname{div} \left( x_{c,w} \varepsilon_w \left( k \frac{k_{rw}}{\mu_w} (\nabla P_w - \gamma_w \nabla D) \right) + q_c \right), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\varphi N_{poly}) = \operatorname{div} \left( x_{c,poly} \varepsilon_{poly} \left( k \frac{k_{rpoly}}{\mu_{poly}} (\nabla P_{poly} - \gamma_{poly} \nabla D) \right) + q_c \right). \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь  $o$  — нефтяная фаза;  $w$  — фаза воды;  $poly$  — фаза полимера;  $N_{o,w,poly} = N_{o,w,poly}(t, x, y, z)$  — молярная плотность компонента;  $\varphi = \varphi(P_{o,w,poly}, x, y, z)$  — пористость;  $P_w$  — давление водной фазы;  $P_o$  — давление нефтяной фазы;  $P_{poly}$  — давление фазы полимера;  $x_{c,o}$  — молярная доля компонента  $c$  в нефтяной фазе;  $x_{c,w}$  — молярная доля компонента  $c$  в водной фазе;  $x_{c,poly}$  — молярная доля компонента  $c$  в фазе полимера;  $\rho_o$  — массовая плотность нефти;  $\rho_w$  — массовая плотность воды;  $\rho_{poly}$  — массовая плотность полимера;  $k = k(P_{o,w,poly}, x, y, z)$  — абсолютная проницаемость;  $k_{ro} = k_{ro}(S_w)$  — относительная фазовая проницаемость нефти;  $k_{rw} = k_{rw}(S_w)$  — относительная фазовая проницаемость

воды;  $k_{r\text{poly}} = k_{r\text{poly}}(S_w)$  — относительная фазовая проницаемость полимера;  $\mu_o$  — вязкость нефти;  $\mu_w$  — вязкость воды;  $\mu_{\text{poly}}$  — вязкость полимера;  $\gamma_{o,w,\text{poly}}$  — удельный вес нефти, воды, полимера;  $S_{o,w,\text{poly}}$  — насыщенность пористой среды нефтью, водой, полимером;  $D = D(x, y, z)$  — глубина;  $q_c$  — источник компонента  $c$  (скважина);  $t$  — время.

Молярная плотность компонентов представляется в виде:

$$N_w = \rho_{w0} \frac{S_w}{B_w}, \quad N_o = \rho_{o0} \frac{S_o}{B_o}, \quad N_{\text{poly}} = \rho_{\text{poly}0} \frac{S_{\text{poly}}}{B_{\text{poly}}}. \quad (2)$$

Здесь  $B_w$  — объемный коэффициент воды (отношение объема воды в поверхностных условиях к объему воды в пластовых условиях);  $B_o$  — объемный коэффициент нефти;  $B_{\text{poly}}$  — объемный коэффициент полимера;  $\rho_{o0}$  — массовая плотность нефти при стандартных условиях;  $\rho_{w0}$  — массовая плотность воды при стандартных условиях;  $\rho_{\text{poly}0}$  — массовая плотность полимера при стандартных условиях.

Закон сохранения массы полимера описывается следующей системой замкнутых уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (M_{\text{poly}} + M_{\text{ads}}) + \nabla (u_{\text{poly}} C_{\text{poly}}) - Q_{\text{poly}} = 0, \\ M_{\text{ads}} = C_{\text{ads}} \rho_{\text{rock}} V_{\text{rock}}, \\ V_{\text{rock}} = V_{\text{full}} - V_{\text{pore}}, \\ V_{\text{poly}} = V_{\text{pore}} (1 - \Phi_{d\text{pv}}). \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь  $M_{\text{poly}}$  — масса полимера;  $M_{\text{ads}}$  — масса адсорбата;  $u_{\text{poly}}$  — скорость фильтрации полимера;  $C_{\text{poly}}$  — концентрация полимера в растворе;  $Q_{\text{poly}}$  — масса полимера, поступающая из источников/стоков;  $V_{\text{pore}}$  — поровый объем;  $V_{\text{poly}}$  — поровый объем, доступный для заполнения полимером;  $\Phi_{d\text{pv}}$  — доля объема пористой среды не подверженного адсорбции полимера;  $C_{\text{ads}} = C_{\text{ads}}(C_{\text{poly}})$  — массовая доля адсорбированного полимера;  $\rho_{\text{rock}}$  — плотность породы;  $V_{\text{rock}}$  — объем породы;  $V_{\text{full}}$  — объем всей пористой среды.

Неизвестными функциями в системе уравнений (1)–(3) являются  $N_{o,w,\text{poly}}$ ,  $P_w$ ,  $P_o$ ,  $P_{\text{poly}}$ ,  $S_{o,w,\text{poly}}$ ,  $M_{\text{poly}}$ ,  $M_{\text{ads}}$ ,  $V_{\text{poly}}$ ,  $V_{\text{full}}$ .

Для решения данной задачи при помощи гидродинамического симулятора tNavigator необходимо задать начальное распределение капиллярных давлений на границе раздела фаз и начальное распределение насыщенностей. Распределение насыщенностей фаз задается с учетом водонефтяного контакта. Начальные условия для давления подбираются по следующей зависимости:

$$P_o(x, y, z, 0) - P_w(x, y, z, 0) = P_{\text{сов}}, \quad (4)$$

где  $P_{\text{сов}}$  — капиллярное давление в системе «нефть — вода».

В качестве замыкающего соотношения с целью определения насыщенностей фаз используется уравнение:

$$S_o + S_w + S_{\text{poly}} = 1. \quad (5)$$

Граничным условием для задачи является постановка нулевого градиента давления на внешней границе пласта:

$$\frac{\partial p_f}{\partial N} = \left( k \frac{k_{rf}}{B\mu_f} (\nabla P_f - \gamma_f \nabla D), n \right) = 0, \quad (6)$$

где  $f$  — индекс фазы.

Определение критического времени  $t_{кр}$  кольтации трещины автоГРП полимером осуществляется путем анализа зависимости объема закачанного реагента от времени. Объем трещины автоГРП принимается постоянным, тогда критическое время заполнения трещины определяется как время, при котором достигается равенство объема трещины автоГРП и объема закачанного в трещину полимера.

Объем утечек реагента  $V_y$  за пределы трещины автоГРП вычисляется как разница объема закачанного реагента и объема трещины автоГРП при заданных фильтрационно-емкостных свойствах породы и технологических параметрах работы нагнетательной скважины.

Для моделирования блокирования трещины при закачке раствора полимера в воде были заданы следующие параметры: коэффициент уменьшения проницаемости породы для водной фазы при адсорбции полимера — 1,3; массовая плотность породы в пластовых условиях — 2 115 кг/м<sup>3</sup>; доля объема пористой среды не подверженного адсорбции полимера — 0. Адсорбция полимера принята необратимой.

На основе уравнений (1)–(6) была построена трехфазная трехкомпонентная гидродинамическая модель в симуляторе tNavigator, геолого-физические характеристики которой указаны в таблице 1. Параметры подобраны таким образом, чтобы провести верификацию между результатами расчетов по упрощенной [Гильманов и др., 2022] и численной гидродинамической модели. В качестве корреляций относительных фазовых проницаемостей приняты корреляции Кори со значениями остаточной нефтенасыщенности 0,3 и связанной водонасыщенности 0,2.

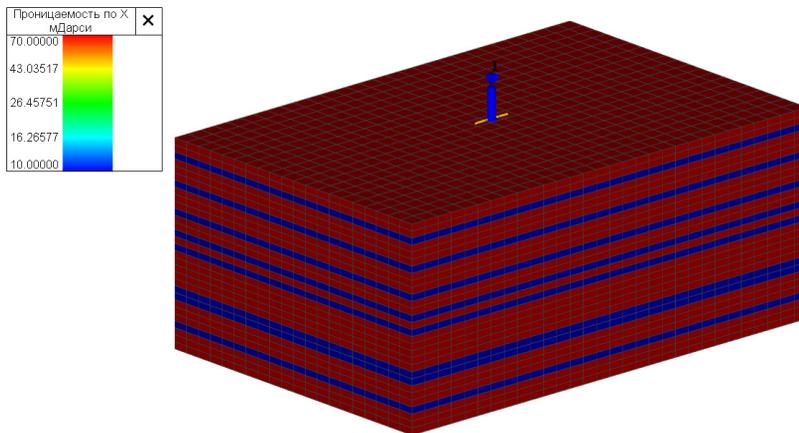
Геометрия расчетной сетки является блочно-центрированной. Выбор данного типа сетки обусловлен отсутствием нерегулярных и наклонных структур, разломов. Длины ячеек подобраны так, чтобы гарантировать сходимость результатов с полуаналитической моделью и уменьшить время расчета модели. Остальные геолого-физические характеристики модели были приняты такими же, как в работе [Гильманов и др., 2022].

Значения проницаемости по направлению оси  $x$  с учетом эффективной мощности пласта (равняющейся разности общей толщины пласта и толщины непроницаемых пропластков) представлены на рис. 2. В центре указана нагнетательная скважина с выбранным технологическим режимом работы, желтым цветом указана трещина автоГРП. Ячейки, окрашенные красным цветом, имеют значение проницаемости 70 мД, синим цветом — 0 мД. Следовательно, проводимость данных ячеек равняется нулю, что обеспечивает заданное значение эффективной мощности пласта.

**Таблица 1.** Исходные данные для создания модели

**Table 1.** Initial data for model calculations

Параметр	Значение
Количество активных ячеек	18 000
Длина ячейки по оси x, м	50
Длина ячейки по оси y, м	50
Длина ячейки по оси z, м	1
Эффективная толщина, м	20
Пористость, д. ед	0,15
Абсолютная проницаемость по оси x, мД	70
Абсолютная проницаемость по оси y, мД	70
Абсолютная проницаемость по оси z, мД	7
ОФП воды при остаточной водонасыщенности, д. ед	0,8
Объемный коэффициент воды, м <sup>3</sup> /м <sup>3</sup>	1
Вязкость воды, сП	1
Плотность пластовой воды, кг/м <sup>3</sup>	1 012
Сжимаемость воды, 1/атм	4 · 10 <sup>-5</sup>
Плотность полимера, кг/м <sup>3</sup>	2 115



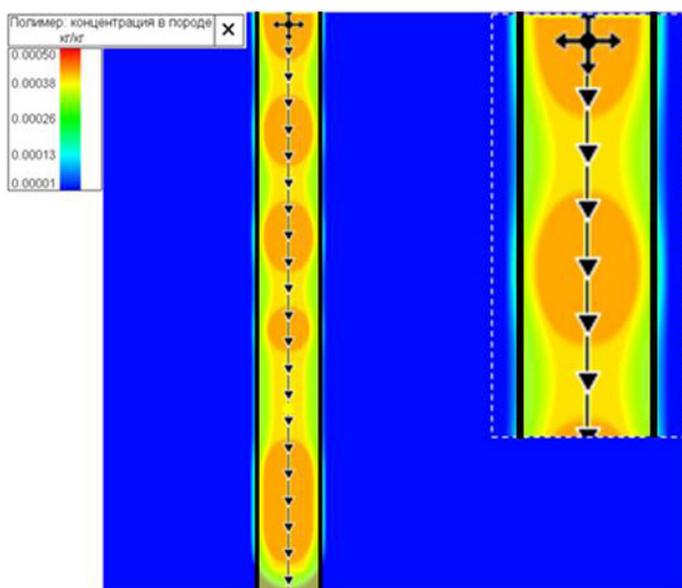
**Рис. 2.** Значения проницаемости по направлению оси x

**Fig. 2.** The values of permeability along the x-axis

Технологические параметры трещины автоГРП и параметры работы нагнетательной скважины: ширина трещины автоГРП  $w = 2$  мм; полуудлина трещины автоГРП  $l = 300$  м; высота трещины автоГРП  $h = 30$  м; расход нагнетаемой в пласт воды  $Q_w = 0,001$  м<sup>3</sup>/с; начальное забойное давление  $P_w = 27$  МПа; концентрация полимера в закачиваемой воде 0,3; объем трещины автоГРП  $V_f = 36$  м<sup>3</sup>.

## Результаты и обсуждение

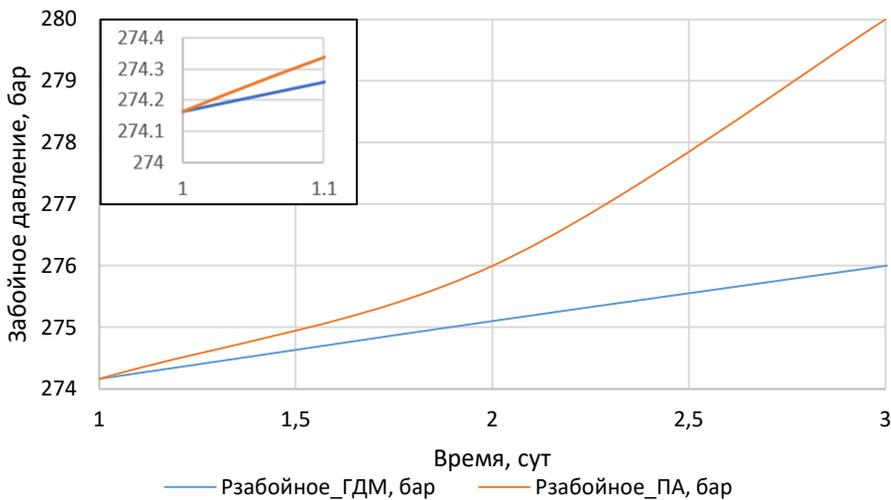
В результате гидродинамического моделирования блокирования трещины автоГРП с применением системы уравнений (1)–(6) и параметров, указанных в таблице 1, были определены значения времени полного блокирования трещины, оценен объем утечек реагента за пределы трещины, зафиксирован рост забойного давления в нагнетательной скважине в процессе блокирования. Время полного блокирования трещины составило 13 суток, объем утечек реагента за пределы трещины —  $3 \text{ м}^3$  при установленном объеме закачки реагента  $36 \text{ м}^3$ . Таким образом, 8,3% закачанного объема реагента убывает за пределы трещины, тем самым уменьшая эффективность процесса коагуляции трещины автоГРП. Пока вся трещина автоГРП не заблокирована в результате адсорбции полимера, через ее границы происходит фильтрация реагента в пористую среду из-за наличия перепада давления. Предотвратить эти утечки не представляется возможным, поэтому их необходимо учитывать в расчетах. Распределение расчетной концентрации полимера в трещине автоГРП в вертикальном сечении вблизи скважины представлено на рис. 3.



**Рис. 3.** Распределение расчетной концентрации полимера в трещине автоГРП: черные вертикальные линии — трещина автоГРП, треугольники — перфорации, через которые осуществляется закачка раствора полимера в пласт. Выноска в увеличенном масштабе демонстрирует объем утечек за пределы трещины автоГРП по значениям концентрации полимера, отличным от нуля, вне трещины

**Fig. 3.** The distribution of calculated polymer concentration in the hydraulic fracture near the injection well: black vertical lines — hydraulic fracture near the injector, triangles — perforations through which the polymer solution is injected into the formation. A zoomed-in callout shows the volume of leaks outside the hydraulic fracture near the injector for non-zero polymer concentrations outside the fracture

Сопоставление результатов расчета динамики забойного давления на полуаналитической модели (Рзабойное\_ПА) блокирования трещины автоГРП и расчета на численной гидродинамической модели (Рзабойное\_ГДМ) рассматривается на рис. 4, показывающем рост забойного давления в скважине в процессе блокирования трещины автоГРП.



**Рис. 4.** Рост забойного давления в скважине в процессе блокирования трещины автоГРП

**Fig. 4.** The increase of the well bottom pressure in colmatation process of the hydraulic fracture near the injector

Согласно результатам полуаналитического моделирования [Гильманов и др., 2022], рост забойного давления в скважине в процессе блокирования трещины автоГРП будет иметь нелинейный вид, т. к. рост давления определяется сокращением размеров незаколматированной трещины и несогласованием подаваемого расхода и приемистости скважины. Начальное значение забойного давления, обнаруженное в рамках гидродинамического моделирования, совпадает со значением забойного давления в рамках упрощенной модели. Вместе с тем дальнейший рост забойного давления, полученный с использованием гидродинамической модели, происходит медленнее и имеет линейный вид, поскольку полуаналитическая модель не учитывает утечек реагента за границы трещины автоГРП.

Необходимо заметить, что критическое время заполнения трещины и объем утечек реагента зависят от расхода закачиваемого раствора. По результатам гидродинамического моделирования критическое время кольтатации трещины составило 8,45 суток при расходе закачиваемого раствора  $0,0015 \text{ м}^3/\text{с}$  и неизменном значении концентрации полимера в закачиваемой воде и параметрах трещины автоГРП. При увеличении приемистости раствора в нагнетательной скважине в 1,5 раза критическое время кольтатации трещины уменьшилось в 1,55 раз.

Для оценки достоверности проведена верификация результатов расчетов забойного давления после блокирования трещины автоГРП с промысловыми данными одной скважины месторождения в Западной Сибири. Промысловые данные соответствуют приведенным модельным, при этом эффективная толщина пласта составляет 11 м, а полудлина трещины автоГРП — 218 м. Забойное давление после блокирования трещины автоГРП составляет по данным гидродинамического моделирования 275 атм, по промысловым данным — 313 атм, что свидетельствует о верификации модели с точностью 12%.

## Заключение

С помощью построенной в работе гидродинамической модели, описывающей процесс коагуляции трещины автоГРП, определен объем утечек реагента из трещины.

Сопоставление расчетов по гидродинамической и упрощенной модели показало, что полученные в обоих случаях начальные значения забойного давления совпадают, однако в дальнейшем из-за наличия утечек реагента забойное давление, рассчитанное по гидродинамической модели, растет медленнее, чем по полуаналитической.

В результате установлено, что критическое время заполнения трещины будет уменьшаться при увеличении расхода закачиваемого раствора и концентрации полимера в закачиваемой воде при постоянных параметрах трещины автоГРП.

Проведена верификация гидродинамической модели с помощью сопоставления расчетных данных забойного давления после блокирования трещины автоГРП с промысловыми данными. Сопоставление результатов свидетельствует о верификации модели с точностью 12%.

## Список литературы

- Байков В. А., Давлетбаев А. Я., Асмандияров Р. Н., Усманов Т. С., Степанова З. Ю. 2011. Специальные гидродинамические исследования для мониторинга за развитием трещин ГРП в нагнетательных скважинах // Нефтегазовое дело. № 1. С. 65–75.
- Байков В. А., Бураков И. М., Латыпов И. Д., Яковлев А. А., Асмандияров Р. Н. 2012. Контроль развития техногенных трещин автоГРП при поддержании пластового давления на месторождениях ООО «РН-Юганскнефтегаз» // Нефтяное хозяйство. № 11. С. 30–33.
- Галимов Р. И. 2017. Технология полимерного заводнения на поздней стадии разработки месторождений // Молодой ученый. № 40 (174). С. 4–6.
- Гильманов А. Я., Федоров К. М., Шевелёв А. П. 2022. Задача о блокировании техногенной трещины в пласте суспензионной смесью // Известия РАН. Механика жидкости и газа. № 6. С. 26–33. <https://doi.org/10.31857/S0568528122600230>
- Гимазов А. А., Базыров И. С. 2020. Способ разработки низкопроницаемых и сверхнизкопроницаемых коллекторов путем заводнения: пат. 2740357 РФ / патентообладатель Газпромнефть НТЦ. № 2020114981; заявл. 28.04.2020; опубл. 13.01.2021, Бюл. № 2.
- Мальцев В. В., Асмандияров Р. Н., Байков В. А., Усманов Т. С., Давлетбаев А. Я. 2012. Исследование развития трещин автоГРП на опытном участке Приобского месторождения с линейной системой разработки // Нефтяное хозяйство. № 5. С. 70–73.

- Ручкин А. А., Ягафаров А. К. 2005. Оптимизация применения потокоотклоняющих технологий на Самотлорском месторождении. Тюмень: Вектор Бук. 165 с.
- Татосов А. В., Шляпкин А. С. 2018. Движение проппанта в раскрывающейся трещине гидро разрыва пласта // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. Том 18. № 2. С. 217–226. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226>
- Тома А., Саюк Б., Абиров Ж., Мазбаев Е. 2017. Полимерное заводнение для увеличения нефтеотдачи на месторождениях легкой и тяжелой нефти // Территория Нефтегаз. № 7–8. С. 58–68.
- Черемсин А. Н., Тостолыткин Д. В., Орлова Н. С. 2012. Особенности моделирования полимерного заводнения в современных гидродинамических симуляторах // Наука и ТЭК. № 3. С. 39–42.
- Черный С. Г., Лапин В. Н., Есипов Д. В., Куранаков Д. С. 2016. Методы моделирования зарождения и распространения трещин. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд. РАН. 312 с.
- Шель Е. В., Кабанова П. К., Ткаченко Д. Р., Базыров И. Ш., Логвинюк А. В. 2020. Моделирование инициации и распространения трещины гидро разрыва пласта на нагнетательной скважине для нетрещиноватых терригенных пород на примере Приобского месторождения // ПРОнефть. Профессионально о нефти. № 2 (16). С. 36–42. <https://doi.org/10.7868/S2587739920020056>
- Cheng C., Milsch H. 2021. Hydromechanical investigations on the self-propping potential of fractures in tight sandstones // Rock Mechanics and Rock Engineering. Vol. 54. Pp. 5407–5432. <https://doi.org/10.1007/s00603-021-02500-4>
- Davletbaev A., Baikov V., Bikbulatova G., Asmandiyarov R., Nazargalin E., Slabetskiy A., Sergeychev A., Nuriev R. 2014. Field studies of spontaneous growth of induced fractures in injection wells // SPE Russian Oil and Gas Exploration & Production Technical Conference and Exhibition (14–16 October 2014, Moscow, Russia). Paper SPE-171232-MS. <https://doi.org/10.2118/171232-MS>
- Dontsov E. V., Peirce A. P. 2014. Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures // Journal of Fluid Mechanics. Vol. 760. Pp. 567–590. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.606>
- Mobbs A. T., Hammond P. S. 2001. Computer simulations of proppant transport in a hydraulic fracture // SPE Production & Facilities. Vol. 16. No. 2. Pp. 112–121. <https://doi.org/10.2118/69212-PA>
- Rutqvist J. 2015. Fractured rock stress-permeability relationships from *in situ* data and effects of temperature and chemical-mechanical couplings // Geofluids. Vol. 15. No. 1–2. Pp. 48–66. <https://doi.org/10.1111/gfl.12089>
- Seright R. S. 1997. Use of preformed gels for conformance control in fractured systems // SPE Production & Facilities. Vol. 12. No. 1. Pp. 59–65. Paper SPE-35351-PA. <https://doi.org/10.2118/35351-PA>
- Seright R. S. 2015. Examination of Literature on Colloidal Dispersion Gels for Oil Recovery. 63 p.
- Sorbie K. S. 1991. Polymer-Improved Oil Recovery. Springer Dordrecht. XII, 359 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3044-8>
- Yan W., Demin W., Zhi S., Changlan S., Gang W., Desheng L. 2004. Hydraulic fracturing of polymer injection wells // SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition (18–20 October 2004, Perth, Australia). Paper SPE-88592-MS. <https://doi.org/10.2118/88592-MS>

## References

- Baikov, V. A., Davletbaev, A. Ya., Asmandiyarov, R. N., Usmanov, T. S., & Stepanova, Z. Yu. (2011). Special well tests to fractured water injection wells. *Oil and Gas Business*, (1), 65–75. [In Russian]
- Baykov, V. A., Burakov, I. M., Latypov, I. D., Yakovlev, A. A., & Asmandiyarov, R. N. (2012). Waterflood induced hydraulic fracturing control under reservoir pressure maintenance conditions on RN-Yuganskneftegas oilfields. *Oil Industry*, (11), 30–33. [In Russian]
- Galimov, R. I. (2017). Technology of polymer flooding at the late stage of field development. *Young Scientist*, (40), 4–6. [In Russian]
- Gilmanov, A. Ya., Fedorov, K. M., & Shevelev, A. P. (2022). The problem of blocking a technological frack in a reservoir with a suspension mixture. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, (6), 26–33. <https://doi.org/10.31857/S0568528122600230> [In Russian]
- Gimazov, A. A., & Bazyrov, I. S. (2020). *Method of developing low-permeable and ultra-low-permeable collectors by flooding* (R.F. Patent No. 2740357). Gazpromneft Science and Technology Center. [In Russian]
- Maltsev, V. V., Asmandiyarov, R. N., Baikov, V. A., Usmanov, T. S., & Davletbaev, A. Ya. (2012). Testing of auto hydraulic-fracturing growth of the linear oilfield development system of Priobskoye oil field. *Oil Industry*, (5), 70–73. [In Russian]
- Ruchkin, A. A., & Yagafarov, A. K. (2005). *Optimization of the application of flow-bending technologies at the Samotlorskoye field*. Vector Buk. [In Russian]
- Tatosov, A. V., & Shlyapkin, A. S. (2018). The motion of propping agent in an opening crack in hydraulic fracturing plast. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 18(2), 217–226. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226> [In Russian]
- Thomas, A., Sahuc, B., Abirov, Zh., & Mazbayev, Ye. (2017). Polymer flooding to increase oil recovery at light and heavy oil fields. *Oil and Gas Territory*, (7–8), 58–68. [In Russian]
- Cheremisin, A. N., Tostolytkin, D. V., & Orlova, N. S. (2012). Features of modeling polymer flooding in modern reservoir simulators. *Nauka i TEK*, (3), 39–42. [In Russian]
- Cherny, S. G., Lapin, V. N., Esipov, D. V., & Kuranakov, D. S. (2016). *Methods of modeling the origin and propagation of fracks*. Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. [In Russian]
- Shel, E. V., Kabanova, P. K., Tkachenko, D. R., Bazyrov, I. S., & Logvinyuk, A. V. (2020). Modeling of a hydraulic fracture initiation and propagation on an injection well for non-fractured terrigenous rocks on the Priobskoye field. *PROneft. Professionally about Oil*, (2), 36–42. <https://doi.org/10.7868/S2587739920020056> [In Russian]
- Cheng, C., & Milsch, H. (2021). Hydromechanical investigations on the self-propping potential of fractures in tight sandstones. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 54, 5407–5432. <https://doi.org/10.1007/s00603-021-02500-4>
- Davletbaev, A., Baikov, V., Bikbulatova, G., Asmandiyarov, R., Nazargalin, E., Slabetskiy, A., Sergeychev, A., & Nuriev, R. (2014). Field studies of spontaneous growth of induced fractures in injection wells. *SPE Russian Oil and Gas Exploration & Production Technical Conference and Exhibition* (October 14–16, 2014, Moscow, Russia), Paper SPE-171232-MS. <https://doi.org/10.2118/171232-MS>

- Dontsov, E. V., & Peirce, A. P. (2014). Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures. *Journal of Fluid Mechanics*, 760, 567–590. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.606>
- Mobbs, A. T., & Hammond, P. S. (2001). Computer simulations of proppant transport in a hydraulic fracture. *SPE Production & Facilities*, 16(2), 112–121. <https://doi.org/10.2118/69212-PA>
- Rutqvist, J. (2015). Fractured rock stress-permeability relationships from *in situ* data and effects of temperature and chemical-mechanical couplings. *Geofluids*, 15(1–2), 48–66. <https://doi.org/10.1111/gfl.12089>
- Seright, R. S. (1997). Use of preformed gels for conformance control in fractured systems. *SPE Production & Facilities*, 12(1), 59–65, Paper SPE-35351-PA. <https://doi.org/10.2118/35351-PA>
- Seright, R. S. (2015). *Examination of literature on colloidal dispersion gels for oil recovery*.
- Sorbie, K. S. (1991). *Polymer-improved oil recovery*. Springer Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3044-8>
- Yan, W., Demin, W., Zhi, S., Changlan, S., Gang, W., & Desheng, L. (2004). Hydraulic fracturing of polymer injection wells. *SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition* (October 18–20, 2004, Perth, Australia), Paper SPE-88592-MS. <https://doi.org/10.2118/88592-MS>

## Информация об авторах

*Александр Павлович Шевелёв*, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры моделирования физических процессов и систем, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
[a.p.shevelev@utmn.ru](mailto:a.p.shevelev@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0017-4871>

*Александр Янович Гильманов*, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры моделирования физических процессов и систем, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
[a.y.gilmanov@utmn.ru](mailto:a.y.gilmanov@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7115-1629>

*Антон Михайлович Касперович*, магистрант кафедры моделирования физических процессов и систем, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
[stud0000122772@study.utmn.ru](mailto:stud0000122772@study.utmn.ru)

## Information about the authors

*Alexander P. Shevelev*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Professor, Department of Modeling of Physical Processes and Systems, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[a.p.shevelev@utmn.ru](mailto:a.p.shevelev@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0017-4871>

*Alexander Ya. Gilmanov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Lecturer, Department of Modeling of Physical Processes and Systems, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[a.y.gilmanov@utmn.ru](mailto:a.y.gilmanov@utmn.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7115-1629>

*Anton M. Kasperovich*, Master Student, Department of Modeling of Physical Processes and Systems, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[stud0000122772@study.utmn.ru](mailto:stud0000122772@study.utmn.ru)

# Математическое моделирование нового метода обработки сейсмосигнала на примере разреза Саратовского Правобережья. Часть 1

Анатолий Александрович Фонин<sup>✉</sup>, Сергей Германович Сучков,  
Виктор Андреевич Николаевцев, Сергей Иванович Михеев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия  
Контакт для переписки: fonin.a@mail.ru<sup>✉</sup>

**Аннотация.** В работе представлен новый способ сейсморазведки, который включает два приемника акустических сигналов, углубленных в породу друг под другом на некотором расстоянии. Данные приемники записывают сейсмограммы — акустические сигналы, источником которых может служить естественная сейсмическая активность Земной коры или целенаправленные источники акустических сигналов, например взрыв. Выполнено моделирование прямой задачи сейсморазведки с применением программных комплексов COMSOL Multiphysics и MatLab. Полученные при моделировании сейсмограммы совмещаются друг с другом со смещением на время задержки входного сейсмоимпульса между приемниками и складываются. При этом сигналы, пришедшие по вертикали, на суммарной сейсмограмме усиливают друг друга, а невертикальные сигналы ослабляются. Для математического моделирования вычисляется корреляционная функция сейсмограмм. Приведены результаты моделирования распространения акустической волны в горных породах и пример обработки сейсмограмм по предложенному алгоритму. Представленные результаты показывают, что новый способ расположения приемников и предложенный метод обработки сейсмограмм позволяют получить очищенную сейсмограмму, которая может быть использована для решения обратной задачи по определению параметров геологической среды.

**Ключевые слова:** сейсморазведка, сейсмограмма, акустические параметры слоев, отражение сейсмических волн, MatLab, COMSOL, Саратовское Правобережье

**Цитирование:** Фонин А. А., Сучков С. Г., Николаевцев В. А., Михеев С. И. 2023. Математическое моделирование нового метода обработки сейсмосигнала на примере разреза Саратовского Правобережья. Часть 1 // Вестник Тюменского государствен-

ного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 1 (33). С. 92–106. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-92-106>

Поступила 20.02.2023; одобрена 27.03.2023; принята 31.03.2023

## Mathematical modeling of a new method for processing a seismic signal on the example of a section of the Saratov right bank. Part 1

Anatoly A. Fonin , Sergey G. Suchkov, Victor A. Nikolayevtsev, Sergey I. Mikheyev

Saratov State University, Saratov, Russia  
Corresponding author: [fonin.a@mail.ru](mailto:fonin.a@mail.ru) 

**Abstract.** The paper presents a new method of seismic exploration, which includes two receivers of acoustic signals, deepened into the rock one under the other at some distance. These receivers record seismograms which are the acoustic signals, the source of which can be the natural seismic activity of the Earth's crust or targeted sources of acoustic signals, such as an explosion. Simulation of the direct problem of seismic exploration was performed using the COMSOL Multiphysics and MatLab software packages. The seismograms obtained during the simulation are combined and added with each other with the on the delay time shift of the input seismic pulse between the receivers. In this case, the signals that came along the vertical, “amplify” each other on the total seismogram, and non-vertical signals are damped. The correlation function of seismograms was obtained for mathematical simulation. The results of modeling the propagation of an acoustic wave in rocks and an example of processing seismograms according to the proposed algorithm are given. The presented results show that the new method of receiver location and the method of processing seismograms make it possible to obtain a cleared seismogram that can be used to solve the inverse problem of determining the parameters of the geological environment.

**Keywords:** seismic survey, seismogram, acoustic parameters of layers, reflection of seismic waves, MatLab, COMSOL, Saratov right bank

**Citation:** Fonin, A. A., Suchkov, S. G., Nikolayevtsev, V. A., & Mikheyev, S. I. (2023). Mathematical modeling of a new method for processing a seismic signal on the example of a section of the Saratov right bank. Part 1. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(1), 92–106. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-92-106>

Received February 20, 2023; Reviewed March 27, 2023; Accepted March 31, 2023

## Введение

На сегодняшний день сейсморазведка играет большую роль во многих отраслях производства. Даже с учетом того, что сейсморазведка зародилась еще в 1920-х гг. и уже более ста лет остается главным способом изучения глубинного строения Земли, сейсмической активности местности и исследования месторождений полезных ископаемых, разработка новых методов остается актуальной задачей геологии [Вакуленко и др., 2021; Bashir и др., 2022; Di и др., 2019; El-Raouf и др., 2021; Monk, 2020; Trofimov и др., 2022; Wei и др., 2019].

Сейсмические методы позволяют не только изучить глубины расположения границ раздела сред горных пород, но и их формы и физические свойства подповерхностных слоев Земли по отражениям звуковых волн, распространяющихся через слои горных пород [Бреховских, 1973]. Разница в плотностях и скоростях акустической волны в породах может быть обусловлена такими параметрами, как литология, пористость, наличие порового флюида, степень насыщения и диагенез.

Зависимость скорости распространения акустической волны в породе от этих параметров уже достаточно хорошо изучена [Бреховских, 1973; Квеско, Квеско, 2018; Урупов, 1966; Vačić и др., 2020]. По этой причине основными направлениями развития сейсморазведки являются методы увеличения точности исследований, сокращение времени и стоимости полевых работ, повышение производительности используемого оборудования или разработка новых математических методов для более точных и быстрых расчетов.

В первой части работы рассматривается новый способ сейсморазведки [Фонин и др., 2020] и моделирование прямой задачи с применением программных комплексов COMSOL Multiphysics и MatLab. Во второй части рассматривается решение обратной задачи, состоящей в определении акустических параметров слоев по сейсмограммам.

## Методы

Под прямой задачей исследования будем понимать численный эксперимент, в результате которого получаем сейсмограмму, соответствующую заранее известным параметрам среды [Конценебин и др., 1999].

Прямая задача решается на основе математической модели, использующей уравнения и граничные условия для акустических волн в слоистой среде [Бреховских, 1973] с учетом наклона границ, посредством компьютерного моделирования в программном комплексе COMSOL Multiphysics, который используется во всем мире инженерами и исследователями для описания реальных физических явлений.

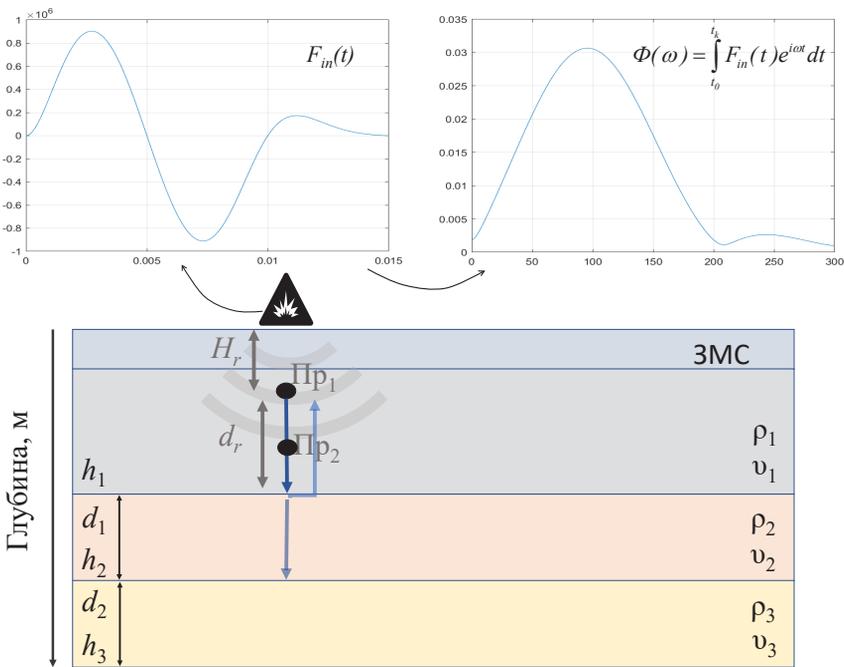
Обратная задача сейсморазведки заключается в определении параметров геологического разреза по заданной (экспериментальной) сейсмограмме.

Очевидно, наибольший интерес вызывает решение обратной задачи сейсморазведки, т. к. на практике регистрируются сейсмограммы малоизученных местностей для исследования их свойств и расположения границ раздела слоев. Представленные результаты являются первым этапом в решении обратной задачи.

### Метод вертикальных приемников

Суть предлагаемого нового метода обработки сейсмосигналов [Фонин и др., 2020] заключается в применении не менее двух приемников сигнала, расположенных в геологической структуре на вертикальной линии, один под другим на известном расстоянии друг от друга. Приемники следует размещать ниже зоны малых скоростей (ЗМС) вследствие того, что ЗМС является верхним слоем земной породы, характеризующимся, как правило, небольшими значениями скоростей сейсмических волн и сильным их затуханием. Также в ЗМС возможно наличие различных артефактов в приповерхностной зоне, что осложняет проведение сейсморазведки.

На рис. 1 изображена схема размещения сейсмоприемников по предлагаемому методу с возбуждением сейсмосигнала поверхностным взрывом.



**Рис. 1.** Схема исследуемого участка горных пород

**Примечание.** Пр1 — верхний приемник, Пр2 — нижний приемник;  $H_r$  — глубина расположения первого датчика,  $d_r$  — расстояние от верхнего датчика до первой границы раздела пород;  $h_1, h_2, h_3$  — глубины расположения границ разделов горных пород,  $d_1, d_2$  — мощности (толщины) слоев,  $v_1, v_2, v_3$  — скорости распространения акустической волны в породах,  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  — плотности горных пород в слоях.

**Fig. 1.** Scheme of the studied area of rocks

**Note.** Пр1 is the upper receiver, Пр2 is the lower receiver;  $H_r$  is the location depth of the first sensor,  $d_r$  is the distance from the upper sensor to the first rock interface;  $h_1, h_2, h_3$  are the depths of the location of the rock boundaries,  $d_1, d_2$  are the thicknesses (thicknesses) of the layers,  $v_1, v_2, v_3$  are the acoustic wave propagation velocities in the rocks,  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  are the rock densities in the layers.

При отражении от границ раздела сред горных пород зондирующий сейсмоимпульс частично возвращается к поверхности и приемники регистрируют отраженные сейсмоимпульсы. Сейсмограмма представляет собой зависимость упругих смещений сейсмических волн от времени в точке расположения приемника, выраженную в пропорциональном электрическом напряжении сейсмодатчика. Отраженные сейсмоимпульсы приходят на сейсмодатчики не только от различных участков неидеальных границ раздела слоев, но также и от различных артефактов, которые находятся на удалении от вертикали расположения приемников. Такие сейсмоимпульсы создают паразитные сигналы на сейсмограмме, наличие которых может привести к ошибочной интерпретации сейсмограммы. Для устранения таких паразитных сигналов разработан представляемый метод двух вертикальных приемников, который состоит в следующем:

1. По времени начального импульса сейсмограммы на приемниках определяют время  $t_0$  распространения сигнала по вертикали между приемниками Пр1 и Пр2 с высокой точностью. Для любых принятых невертикальных (паразитных) сигналов разница времен между соответствующими максимумами на сейсмограммах будет больше  $t_0$ .
2. С помощью приемника Пр2 измеряют амплитуду и форму сейсмоимпульса, вошедшего в геологическую структуру, и снимают сейсмограммы принятых отраженных от границ раздела слоев импульсов. Приемником Пр1 регистрируют отраженные сейсмоимпульсы, но с задержкой на время прохождения волной расстояния между приемниками. Следовательно, сигнал на Пр1 слабее и с меньшим соотношением сигнал/шум. С целью повышения соотношения сигнал/шум используется метод накопления сигнала [Симончик и др., 2012].

Для выявления и устранения паразитных импульсов необходимо сместить одну сейсмограмму относительно другой на время  $t_0$  и сравнить их. При этом полезные импульсы, пришедшие по вертикали на оба приемника, будут иметь совпадающие (в пределах длительности импульса) максимумы, а максимумы паразитных импульсов будут смещены относительно друг друга. Значит, при сложении смещенных сейсмограмм полезные сигналы увеличиваются, а паразитные (невертикальные) сигналы не возрастают и могут быть численно устранены.

Для математического моделирования требуется точное вычисление суммарной сейсмограммы, которое проводится в виде корреляционной функции [Ахизер, Пелетминский, 1977]:

$$S(t) = \int_{t_n}^{t_k} S_1(t' - t_0) S_2(t - t') dt', \quad (1)$$

где  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$  — сейсмограммы, принятые приемниками Пр1 и Пр2 соответственно;  $t_n$  — время начала сейсмограммы;  $t_k$  — время конца сейсмограммы.

Корреляционная функция будет иметь максимумы для сигналов, пришедших по вертикали, а для невертикальных сигналов корреляционная функция будет иметь малые значения.

Таким образом,  $S(t)$  — очищенная от паразитных (невертикальных) сигналов сейсмограмма, полученная в результате сейсморазведки, которая несет в себе информацию о геологической структуре вертикально под датчиками.

## Моделирование обработки сейсмосигнала в конкретном разрезе

Моделирование обработки сейсмосигналов предложенным методом двух вертикальных приемников для участка горных пород проведено на основе изучения фактических данных по Саратовскому Правобережью [Конценебин и др., 1999] с помощью разработанных программ в системе MatLab и составленной мультифизической модели в системе COMSOL Multiphysics.

Характеристики, используемые при моделировании, были взяты из работы [Конценебин и др., 1999], которая посвящена изучению теоретических и методических основ геофизического моделирования ловушек нефти и газа, решению прямой и обратной задачи для реальных разрезов с различными физико-геологическими параметрами.

Выбранная модель «палеоруло» является теоретической, составленной на основе обобщения фактических данных. Модель включает восемь слоев толщиной от 8 до 225 м. Параметрические характеристики модели представлены на рис. 2.

Моделирование производилось в программном комплексе COMSOL Multiphysics [Ground Motion after Seismic Event; Isotropic-Anisotropic Sample; Propagation of Seismic Waves through Earth] с помощью модуля Acoustics (Акустика) с настраиваемым интерфейсом и функциональностью, которая оптимизирована для анализа проблем акустики и вибрации. Этот модуль решает задачи в областях акустики конструкций, геометрической акустики, аэроакустики, термовязкостной акустики, рассчитывает давления и упругие волны в пористых материалах и др.

В разработанной в системе COMSOL Multiphysics программе была реализована двумерная акустическая модель слоистой структуры горных пород. Мощности слоев выбранного месторождения и характеристики горных пород указаны на рис. 2. Помимо плотностей и скоростей продольной волны в слоях в модели были использованы также скорости поперечных волн и добротности.

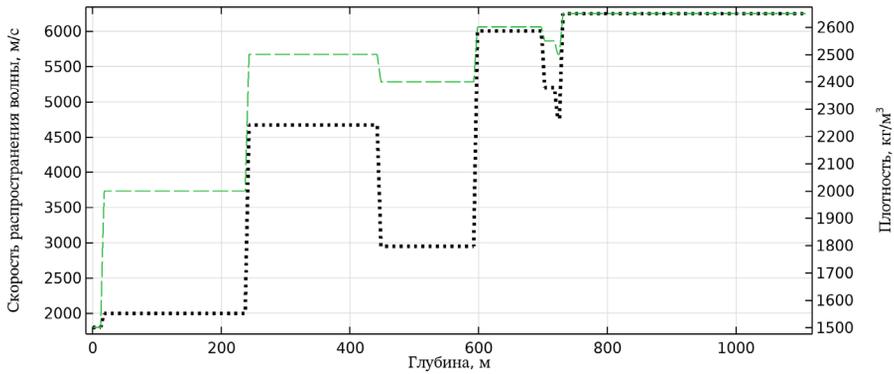
Вертикальные границы области моделирования выбраны на расстоянии 500 м от точки взрыва, что является достаточным для пренебрежения неvertикальными сигналами от более удаленных неоднородностей среды. Для того чтобы акустическая волна не отражалась от боковых границ и от последней нижней границы, они были смоделированы как Absorbing Layer (Поглощающий слой). Данные слои поглощают поперечные и продольные волны и не отражают их обратно в среду.

В модели считается, что при взрывной генерации сейсмоимпульса на верхней границе в точке приложена сила:

$$F_{in}(t) = \frac{1 - e^{-\frac{9t}{T_{imp}}}}{1 + e^{\left(\frac{t}{T_{imp}} - 1\right)}} \cdot \sin\left(2\pi F_{imp} t\right), \quad (2)$$

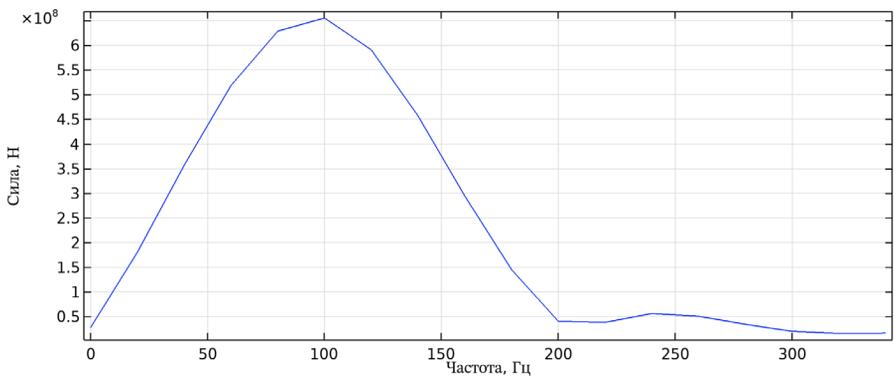
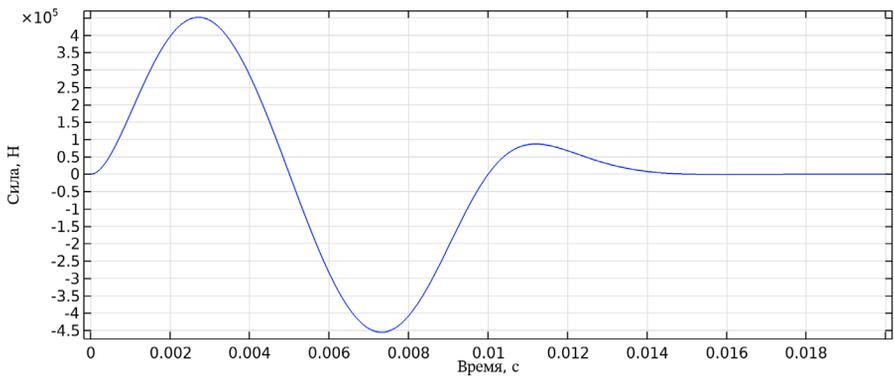
где  $T_{imp}$  — время импульса, с;  $F_{imp}$  — центральная частота, Гц;  $t$  — время, с.

Выражение (2) получено на основе аппроксимации формы первого импульса в экспериментальных сейсмограммах. Зависимость величины возбуждающей силы (2) от времени и ее спектр приведены на рис. 3.



**Рис. 2.** Зависимость скорости распространения акустической волны (точечная линия) и плотности горных пород (пунктирная линия) от глубины [Конценебин и др., 1999]

**Fig. 2.** Dependence of acoustic wave propagation velocity (dotted line) and rock density (dashed line) on depth [Kontsenebin et al., 1999]



**Рис. 3.** Форма (сверху) и спектр (снизу) входного импульса

**Fig. 3.** Shape (top) and spectrum (bottom) of the input pulse

В модели глубина ЗМС принята 15 м, а сейсмоприемники располагаются на глубине 50 и 80 м на вертикальной линии (рис. 4).

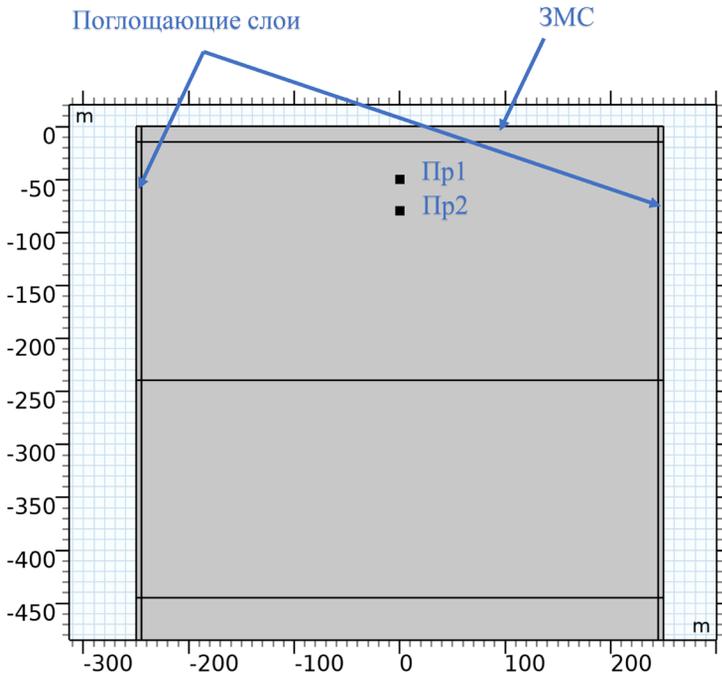


Рис. 4. Область моделирования и расположение приемников Пр1 и Пр2

Fig. 4. Modeling area and location of receivers Пр1 and Пр2

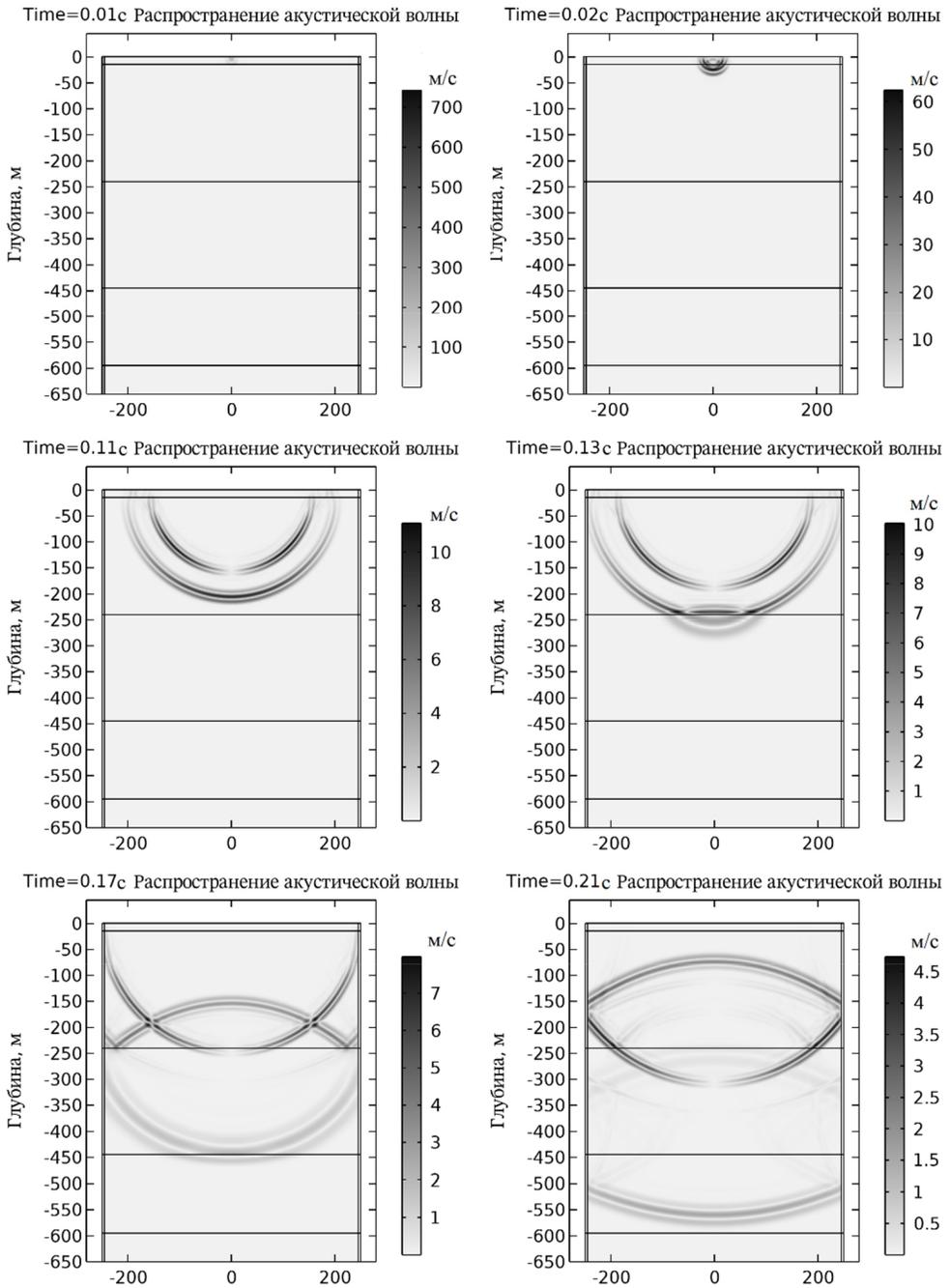
## Результаты и обсуждение

Далее (рис. 5) приведены результаты моделирования распространения акустической (сейсмической) волны при взрывном возбуждении в различные моменты времени в восьмислойной структуре с параметрами слоев, представленными на рис. 2.

Зависимость от времени акустических смещений среды в точках расположения приемников для многослойной структуры представлена на рис. 6.

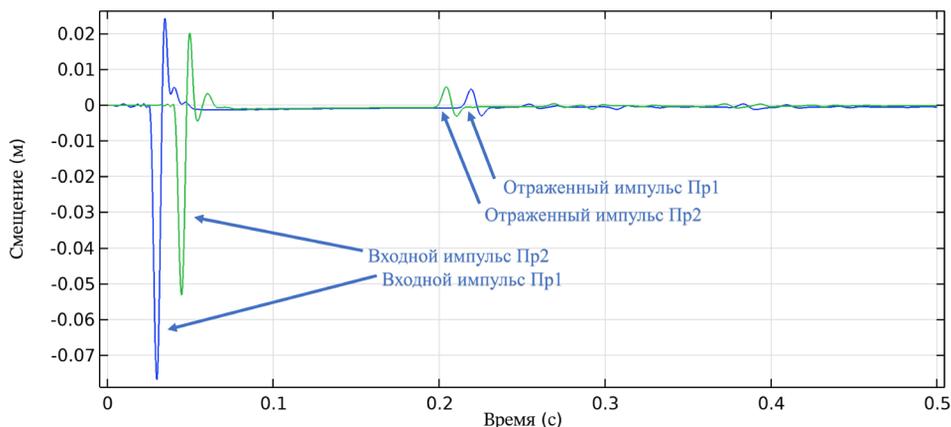
В многослойной структуре с наклонными границами вид модельных сейсмограмм значительно сложнее и включает отклики от неvertикальных сигналов.

Обработка модельных сейсмограмм производится разработанной в системе MatLab программой, реализующей изложенный выше алгоритм. Программа вычисляет время распространения волны между приемниками ( $t_0$ ), затем смещает сейсмограмму с нижнего приемника на полученное значение  $t_0$ . Следующим шагом программа находит импульсы, которые совпали в пределах половины длительности сейсмоимпульса, а несовпадающие импульсы удаляет. На последнем этапе формируется очищенная от неvertикальных сигналов суммарная сейсмограмма.



**Рис. 5.** Результат моделирования распространения акустической волны в различные моменты времени

**Fig. 5.** The result of modeling the propagation of an acoustic wave at different times



**Рис. 6.** Зависимость акустических смещений среды от времени в точках расположения приемников

**Fig. 6.** Dependence of the acoustic displacements of the structure on time at the points of location of the receivers

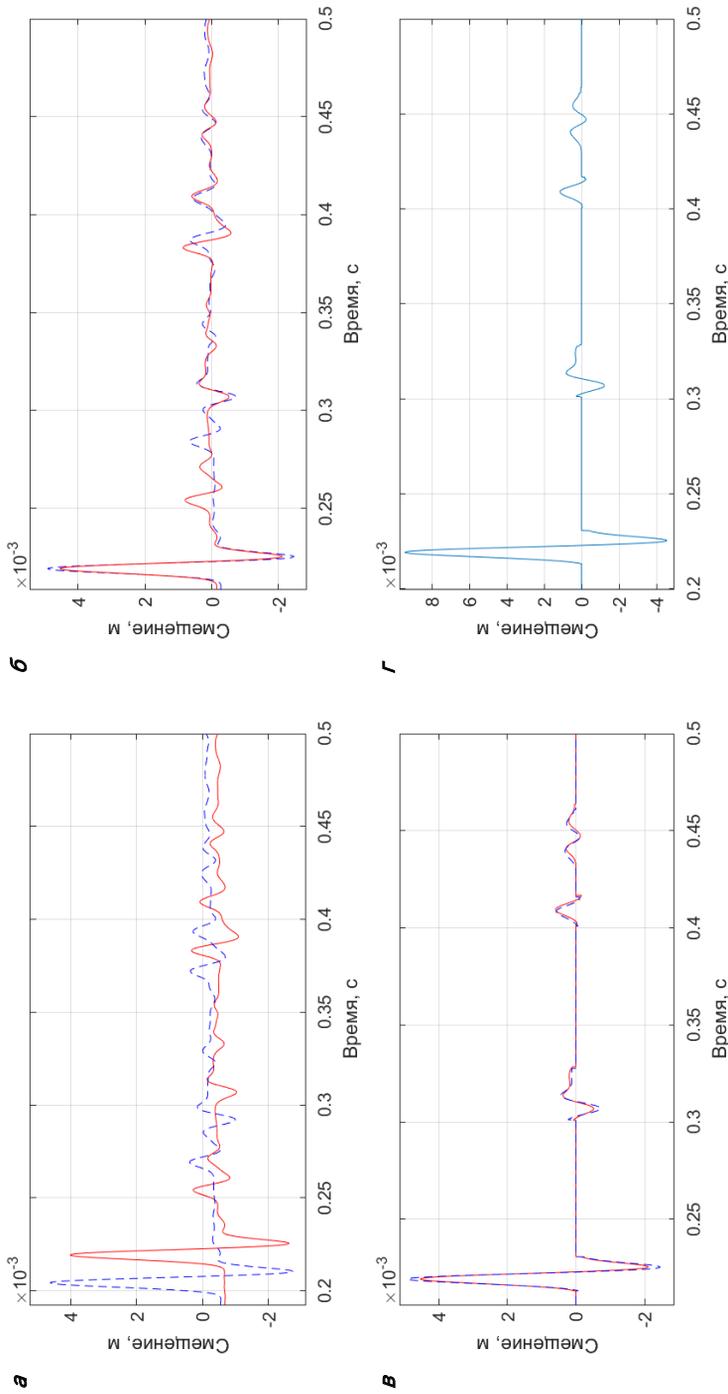
Результаты работы данной программы для структуры, параметры которой указаны на рис. 2, представлены на рис. 7. На графиках показаны участки сейсмограмм с момента прихода на приемники первого отраженного сигнала без входных импульсов для большей информативности.

Анализ результатов, представленных на рис. 7, показывает, что при смещении сейсмоимпульсов по времени на  $t_0$  на графиках имеются совпадающие и посторонние сигналы, которые приходят на приемники в различное время (рис. 7б). Так как сейсмоприемники расположены ниже ЗМС, то акустическая волна, распространяясь после отражений от нижележащих границ к поверхности, также отражается от слоя ЗМС и повторно приходит на датчики, образуя посторонние сигналы на сейсмограмме.

Алгоритм программы позволяет определить совпадающие максимумы и удалить посторонние импульсы, что представлено на рис. 7в.

Согласно параметрам геологического разреза горных пород, которые представлены на рис. 2, можно сделать вывод, что сохранились только импульсы, действительно соответствующие времени прихода акустического сигнала по вертикали.

Несмотря на то что модель включает восемь слоев (рис. 2), на итоговой сейсмограмме (рис. 7г) можно наблюдать только пять ярко выраженных импульсов. Причина наличия меньшего количества импульсов, чем границ раздела пород, заключается в том, что первый слой ЗМС, расположенный выше приемников, исключается из итоговой сейсмограммы, а также в том, что шестой и седьмой слой имеют малую толщину (20 и 8 м) по сравнению с основной длиной акустической волны (55 м). В связи с этим время прихода импульсов, отраженных от последних трех границ, практически не отличается в пределах длительности сейсмоимпульса. При отражении от границ с большим акустическим импедансом фаза отраженной волны изменяется на  $\pi$ , поэтому импульс, отраженный от шестой границы, имеет отрицательную полярность.



**Рис. 7.** Пример обработки сейсмограмм для нового метода сейсморазведки

**Примечание.** Пунктирной линией обозначены сейсмограммы с нижнего приемника, сплошной линией — с верхнего приемника; а — исходные сейсмограммы; б — смещение по времени сейсмограммы нижнего приемника к сейсмограмме верхнего; в — исключение посторонних импульсов; г — итоговая сейсмограмма.

**Fig. 7.** An example of processing seismicograms for a new seismic method

**Note.** The dashed line indicates the seismicograms from the lower receiver, the solid line — from the upper receiver; а — initial seismicograms; б — shift in time of the seismicogram of the lower receiver to the seismicogram of the upper one; в — exclusion of extraneous impulses; г — final seismicogram.

Расчеты времени прихода сигнала в режиме плоской волны на приемник Пр1, учитывающие только толщины слоев и скорость распространения акустической волны в породах, показывают, что время прихода импульсов от второй, третьей, четвертой, пятой, шестой и седьмой границ соответственно равно примерно 0,216, 0,304, 0,405, 0,440, 0,448 и 0,451 с.

Время импульсов, отраженных от последних трех границ, практически не отличается, что могло привести к слиянию нескольких импульсов вместе. Помимо этого, стоит учитывать, что при отражении от границ с большим акустическим импедансом фаза отраженной волны изменяется на  $\pi$ . Как видим, импульс волны, отраженной от шестой границы, присутствует на итоговой сейсмограмме, и его максимум расположен в отрицательной области между двумя соседними положительными импульсами.

Расчитанное время соответствует импульсам, которые сохранились в результате работы программы.

## Заключение

В настоящей работе рассмотрен метод математического моделирования и обработки сейсмограмм в геологическом разрезе, получаемых новым способом сейсморазведки, который заключается:

- 1) в использовании двух углубленных в горную породу приемников, расположенных на одной вертикальной линии один под другим на некотором известном расстоянии друг от друга;
- 2) применении нового алгоритма обработки зарегистрированных приемниками сейсмограмм с целью получения результирующей сейсмограммы, очищенной от посторонних (паразитных) импульсов.

Представленные результаты показывают, что новый способ расположения приемников и предложенный метод обработки сейсмограмм позволяют получить очищенную сейсмограмму, которая может быть использована для решения обратной задачи по определению параметров геологической среды с высокой точностью. Этому вопросу будет посвящена вторая часть данной работы.

## Список источников

- Акустика // COMSOL Multiphysics. <https://www.comsol.ru/acoustics-module> (дата обращения: 29.04.2020).
- Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. 1977. Методы статистической физики. М.: Наука. 111 с.
- Бреховских Л. М. 1973. Волны в слоистых средах. М.: Наука. 343 с.
- Вакуленко С. А., Понимаскин А. И., Токарев М. Ю., Горбачев С. В., Гурвич Л. А. 2021. Применение технологии многоканального анализа поверхностных волн (MASW) для решения задач оценки свойств придонных отложений по результатам 2D/3D сейсмической съемки с донным оборудованием на шельфе Печорского моря // Инженерная и рудная геофизика 2021: материалы 17-й научно-практической конференции и выставки (26–30 апреля 2021 г., Геленджик, Россия). 9 с. <https://doi.org/10.3997/2214-4609.202152188>

- Квеско Б. Б., Квеско Н. Г. 2018. Физика пласта: учеб. пос. М.: Инфра-Инженерия. 228 с.
- Конценебин Ю. П., Рыскин М. И., Балабанов В. Г., Михеев С. И., Коробова Л. А. 1999. Геофизическое моделирование ловушек нефти и газа // Труды научно-исследовательского института геологии Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского. Новая серия. Саратов: Колледж. 142 с.
- Симончик К. К., Тropicенко А. Ю., Хитров М. В. 2012. Цифровая обработка сигналов: учеб. пос. СПб.: СПбГУ ИТМО. 108 с.
- Урупов А. К. 1966. Изучение скоростей в сейсморазведке. М.: Недра. 224 с.
- Фонин А. А., Сучков С. Г., Михеев С. И., Николаевцев В. А., Сучков Д. С. 2020. Новый метод определения акустических параметров геологического разреза // Акустика океана: доклады XVII Школы-семинара им. акад. Л. М. Бреховских, совмещенной с XXXIII сессией Российского акустического общества (19–23 октября 2020 г., Москва, Россия). С. 286–293. <https://doi.org/10.29006/978-5-9901449-5-8-46>
- Bačić M., Librić L., Kačić D. J., Kovačević M. S. 2020. The usefulness of seismic surveys for geotechnical engineering in karst: Some practical examples // *Geosciences*. Vol. 10. No. 10. Article 406. <https://doi.org/10.3390/geosciences10100406>
- Bashir Ya., Babasafari A. A., Arshad A. R. M., Alashloo S. Ya. M., Latif A. H. A., Hamidi R., Rezaei Sh., Ratnam T., Sambo Ch., Ghosh D. 2022. *Seismic Imaging Methods and Applications for Oil and Gas Exploration*. Netherlands: Elsevier Science. 308 p. <https://doi.org/10.1016/C2021-0-00166-8>
- Di H., Gao D., AlRegib Gh. 2019. Developing a seismic texture analysis neural network for machine-aided seismic pattern recognition and classification // *Geophysical Journal International*. Vol. 218. No. 2. Pp. 1262–1275. <https://doi.org/10.1093/gji/ggz226>
- El-Raouf A. A., Iqbal I., Meister Ju., Abdelrahman K., Alzahrani H., Badran O. M. 2021. Earthflow reactivation assessment by multichannel analysis of surface waves and electrical resistivity tomography: A case study // *Open Geosciences*. Vol. 13. No. 1. Pp. 1328–1344. <https://doi.org/10.1515/geo-2020-0310>
- Ground Motion after Seismic Event: Scattering off a Small Mountain // COMSOL Multiphysics. <https://www.comsol.com/model/ground-motion-after-seismic-event-scattering-off-a-small-mountain-78241> (дата обращения: 08.07.2021).
- Isotropic-Anisotropic Sample: Elastic Wave Propagation // COMSOL Multiphysics. <https://www.comsol.com/model/isotropic-anisotropic-sample-elastic-wave-propagation-78231> (дата обращения: 08.07.2021).
- Monk D. J. 2020. *Survey Design and Seismic Acquisition for Land, Marine, and In-between in Light of New Technology and Techniques*. USA: Society of Exploration Geophysicists. 214 p. <https://doi.org/10.1190/1.9781560803713>
- Propagation of Seismic Waves through Earth // COMSOL Multiphysics. <https://www.comsol.com/model/propagation-of-seismic-waves-through-earth-90381> (дата обращения: 08.07.2021).
- Trofimov V. L., Khaziev F. F., Trofimova A. V. 2022. *Oil and Gas Reservoir Prospecting and Exploration: High-Resolution Seismic (HRS) Techniques and Technology*. Switzerland: Springer Nature Switzerland AG. XXIII, 419 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-84389-2>
- Wei X., Yang Z.-F., Yan X.-F. 2019. Multi-scale issue in seismic exploration and its research progress // *Progress in Geophysics*. Vol. 34. No. 6. Pp. 2353–2360. <https://doi.org/10.6038/pg2019DD0239>

## References

- COMSOL Multiphysics. (n.d.). Acoustics module. Retrieved April 29, 2020, from <https://www.comsol.ru/acoustics-module> [In Russian]
- Akhiyezer, A. I., & Peletminskiy, S. V. (1977). *Methods of statistical physics*. Nauka. [In Russian]
- Brekhovskikh, L. M. (1973). *Waves in layered structures*. Nauka. [In Russian]
- Vakulenko, S. A., Ponimaskin, A. I., Tokarev, M. Yu., Gorbachev, S. V., & Gurvich, L. A. (2021). MASW application for near-surface site characterization of 2D/3D OBN seismic survey on Pechora Sea shelf. *Proceedings of the Engineering and Mining Geophysics 2021* (April 26–30, 2021, Gelendzhik, Russia). <https://doi.org/10.3997/2214-4609.202152188> [In Russian]
- Kvesko, B. B., & Kvesko, N. G. (2018). *Physics of reservoir*. Infra-Inzheneriya. [In Russian]
- Kontsenebin, Yu. P., Ryskin, M. I., Balabanov, V. G., Mikheyev, S. I., & Korobova, L. A. (1999). Geophysical modeling of oil and gas traps. *Proceedings of the Research Institute of Geology of the Saratov State University. New Series*. Kolledzh. [In Russian]
- Simonchik, K. K., Tropchenko, A. Yu., & Khitrov, M. V. (2012). *Digital signal processing*. SPbGU ITMO. [In Russian]
- Urupov, A. K. (1966). *The study of velocities in seismic exploration*. Nedra. [In Russian]
- Fonin, A. A., Suchkov, S. G., Mikheev, S. I., Nikolaevtsev, V. A., & Suchkov, D. S. (2020). New method of geological profile acoustic parameters determination. *Acoustics of the Ocean*, 286–293. <https://doi.org/10.29006/978-5-9901449-5-8-46> [In Russian]
- Bačić, M., Librić, L., Kačunić, D. J., & Kovačević, M. S. (2020). The usefulness of seismic surveys for geotechnical engineering in karst: Some practical examples. *Geosciences*, 10(10), Article 406. <https://doi.org/10.3390/geosciences10100406>
- Bashir, Ya., Babasafari, A. A., Arshad, A. R. M., Alashloo, S. Ya. M., Latiff, A. H. A., Hamidi, R., Rezaei, Sh., Ratnam, T., Sambo, Ch., & Ghosh, D. (2022). *Seismic imaging methods and applications for oil and gas exploration*. Elsevier Science. <https://doi.org/10.1016/C2021-0-00166-8>
- Di, H., Gao, D., & AlRegib, Gh. (2019). Developing a seismic texture analysis neural network for machine-aided seismic pattern recognition and classification. *Geophysical Journal International*, 218(2), 1262–1275. <https://doi.org/10.1093/gji/ggz226>
- El-Raouf, A. A., Iqbal, I., Meister, Ju., Abdelrahman, K., Alzahrani, H., & Badran, O. M. (2021). Earthflow reactivation assessment by multichannel analysis of surface waves and electrical resistivity tomography: A case study. *Open Geosciences*, 13(1), 1328–1344. <https://doi.org/10.1515/geo-2020-0310>
- COMSOL Multiphysics. (n.d.). *Ground motion after seismic event: Scattering off a small mountain*. Retrieved July 8, 2021, from <https://www.comsol.com/model/ground-motion-after-seismic-event-scattering-off-a-small-mountain-78241>
- COMSOL Multiphysics. (n.d.). *Isotropic-anisotropic sample: Elastic wave propagation*. Retrieved July 8, 2021, from <https://www.comsol.com/model/isotropic-anisotropic-sample-elastic-wave-propagation-78231>
- Monk, D. J. (2020). *Survey design and seismic acquisition for land, marine, and in-between in light of new technology and techniques*. Society of Exploration Geophysicists. <https://doi.org/10.1190/1.9781560803713>
- COMSOL Multiphysics. (n.d.). *Propagation of seismic waves through Earth*. Retrieved July 8, 2021, from <https://www.comsol.com/model/propagation-of-seismic-waves-through-earth-90381>

Trofimov, V. L., Khaziev, F. F., & Trofimova, A. V. (2022). *Oil and gas reservoir prospecting and exploration: High-resolution seismic (HRS) techniques and technology*. Springer Nature Switzerland AG. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-84389-2>

Wei, X., Yang, Z.-F., & Yan, X.-F. (2019). Multi-scale issue in seismic exploration and its research progress. *Progress in Geophysics*, 34(6), 2353–2360. <https://doi.org/10.6038/pg-2019DD0239> [In Chinese]

## Информация об авторах

*Анатолий Александрович Фонин*, аспирант, кафедра геофизики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия  
[fonin.a@mail.ru](mailto:fonin.a@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5049-4243>

*Сергей Германович Сучков*, доктор физико-математических наук, профессор, руководитель научно-технологического центра «Микро- и нанoeлектроника», Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия  
[suchkov.s.g@mail.ru](mailto:suchkov.s.g@mail.ru)

*Виктор Андреевич Николаевцев*, кандидат физико-математических наук, ведущий инженер, научно-технологический центр «Микро- и нанoeлектроника», Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия  
[nikolaevcev@yandex.ru](mailto:nikolaevcev@yandex.ru)

*Сергей Иванович Михеев*, доктор геолого-минералогических наук, профессор, кафедра геофизики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия  
[s.mixeev@gmail.com](mailto:s.mixeev@gmail.com)

## Information about the authors

*Anatoly A. Fonin*, Postgraduate Student, Department of Geophysics, National Research Saratov State University, Saratov, Russia  
[fonin.a@mail.ru](mailto:fonin.a@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5049-4243>

*Sergey G. Suchkov*, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Scientific and Technological Center “Micro- and Nanoelectronics”, National Research Saratov State University, Saratov, Russia  
[suchkov.s.g@mail.ru](mailto:suchkov.s.g@mail.ru)

*Victor A. Nikolayevtsev*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lead Engineer, Scientific and Technological Center “Micro- and Nanoelectronics”, National Research Saratov State University, Saratov, Russia  
[nikolaevcev@yandex.ru](mailto:nikolaevcev@yandex.ru)

*Sergey I. Mikheyev*, Dr. Sci. (Geol.-Mineral.), Professor, Department of Geophysics, National Research Saratov State University, Saratov, Russia  
[s.mixeev@gmail.com](mailto:s.mixeev@gmail.com)

## Исследование влияния зашумленности исходных данных на точность определения коэффициентов взаимовлияния скважин методом линейной регрессии

Родион Михайлович Ганопольский✉

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

Контакт для переписки: [g.m.ganopolskij@utmn.ru](mailto:g.m.ganopolskij@utmn.ru)✉

**Аннотация.** Для прогнозирования работы добывающей скважины используются гидродинамические симуляторы. Их работа занимает много времени, поэтому постоянно появляются альтернативные упрощенные методы, например прокси-модели. Сначала эти модели настраиваются на исторические данные, а затем дают прогнозы. Но очень часто исходные данные недостаточно точны и полны. Необходимо изучить, насколько ошибка в каждом исходном параметре влияет на качество прогноза.

В статье построен алгоритм определения коэффициентов взаимовлияния скважин методом линейной регрессии. Проведено исследование устойчивости полученного решения к зашумлению исходных данных при различных условиях. Получен прогноз дебита на добывающей скважине, который далее сравнивается с точным значением. Проанализировано, в каких исходных данных погрешность больше всего влияет на ошибку прогноза. Предложены возможные варианты обеспечения устойчивости.

**Ключевые слова:** прогноз добычи, прокси-модели, объемно-резистивная модель CRM, коэффициенты взаимовлияния скважин, метод линейной регрессии, устойчивость к зашумленности данных

**Цитирование:** Ганопольский Р. М. 2023. Исследование влияния зашумленности исходных данных на точность определения коэффициентов взаимовлияния скважин методом линейной регрессии // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 1 (33). С. 107–115. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-107-115>

Поступила 20.02.2023; одобрена 27.03.2023; принята 31.03.2023

# Influence of noisy input data in accuracy of well interference coefficients by linear regression method

Rodion M. Ganopolskij✉

University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: r.m.ganopolskij@utmn.ru✉

**Abstract.** Hydrodynamic simulators are used to predict the operation of a production well. Their work demands high performance. Alternative simplified methods are appearing constantly, for example, proxy models. Firstly, these models are tuned to historical data and then they make predictions. The source data is quite inaccurate and incomplete often. It is necessary to study how an input parameter error affects quality of forecast.

This article shows an algorithm for determining the well interference coefficients by linear regression method. Study was made of the stability of the obtained solution to the noise of the initial data under various conditions. A production well forecast has been obtained, which is then compared with the exact value. The error in which initial data has the greatest impact on the forecast error is analyzed. Possible options for ensuring sustainability are proposed.

**Keywords:** production forecast, proxy models, capacity resistive model CRM, well interference coefficients, linear regression method, resistance to data noise

**Citation:** Ganopolskij, R. M. (2023). Influence of noisy input data in accuracy of well interference coefficients by linear regression method. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(1), 107–115. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-107-115>

Received February 20, 2023; Reviewed March 27, 2023; Accepted March 31, 2023

## Введение

Для оптимизации гидродинамической симуляции нефтегазового пласта используются различные методы. Одни из таких методов — семейство 0-мерных прокси-моделей CRM (capacity resistive model — объемно-резистивная модель), основанных на решении уравнения материального баланса [Sayagrou, 2008; Sayagrou и др., 2009; Yousef и др., 2006]:

$$q_{jk} = q_{j(k-1)} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}}\right) \sum_{i=1}^N f_{ij} I_{ik}, \quad (1)$$

где  $q_{jk}$  — дебит на добывающей скважине  $j$  в момент времени  $k$ ;  $I_{ik}$  — расход (приемистость) на нагнетательной скважине  $i$ ;  $N$  — количество нагнетательных скважин;  $\Delta t$  — шаг по времени; параметры  $f_{ij}$  — коэффициенты взаимовлияния скважин (их сумма не обязательно равна единице);  $\tau_j$  — временная константа, определяемая как  $\tau_j = cV/j$ , где  $c$  — коэффициент сжимаемости,  $V$  — поровый объем,  $J$  — коэффициент продуктивности.

Параметры  $f_{ij}$  показывают, какой вклад вносит приемистость нагнетающей скважины  $i$  в дебит добывающей скважины  $j$ . Константу  $\tau_j$  иногда называют временем запаздывания, учитывающим в модели изменение порового объема из-за давления или скорости распространения возмущения между скважинами. Этот параметр имеет диапазон значений от 0 до  $\infty$ .

Как правило, полная модель CRM учитывает больше физических параметров, например забойное давление и т. п. [Sayarroug, 2008; Sayarroug и др., 2009; Yousef и др., 2006]. Мы будем использовать формулу (1) для первоначальной оценки влияния зашумленности данных. Есть еще более простая модель, которая пренебрегает константами  $\tau_j$ , но в этом случае устойчивость метода возможно рассчитать аналитически.

Все параметры модели (1) можно определить для заданного месторождения только по известной истории закачки и добычи с помощью различных численных методов оптимизации. Один из таких способов — метод наименьших квадратов [Демиденко, 1981]. Найденные коэффициенты подставляются в формулу (1), затем рассчитывается прогноз добычи при известных приемистостях. Мы будем использовать метод линейной регрессии для поиска коэффициентов, но для этого сначала придется зависимость линеаризовать.

Известно, что исходные (промысловые) данные по месторождению даны с какой-то погрешностью, часто за какие-то дни данные отсутствуют. Рассмотрим, как неточность в этих данных влияет на погрешность параметров модели CRM и на дальнейшую ошибку прогноза.

## Линеаризация зависимости

Исходная зависимость (1) не является линейной от искомых параметров, поэтому преобразуем ее. Для удобства перейдем от коэффициента  $\tau$  к безразмерному параметру  $\gamma$ . В дальнейшем будем считать всё только для одной добывающей скважины, поэтому не будем использовать индекс  $j$ .

$$\gamma = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}}.$$

Новый коэффициент меняется в диапазоне значений от 0 до 1. Подставим его в формулу (1) и преобразуем полученное выражение:

$$q_k - q_{k-1} = -\frac{1}{\gamma} q_{k-1} + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^N f_i I_{ik}.$$

Введем обозначение  $\Delta q_k = q_k - q_{k-1}$  и преобразуем:

$$q_{k-1} = -\gamma \Delta q_k + \sum_{i=1}^N f_i I_{ik}. \quad (2)$$

В таком виде мы получаем линейную зависимость дебита в предыдущий момент времени от других значений. На самом деле, если нам известно изменение и предыдущее значение, то ничего больше для вычисления следующего значения не нужно. Но такая зависимость (2) позволяет найти коэффициенты взаимовлияния методом линейной регрессии из известной истории добычи, что нам и требуется. Метод линейной регрессии дает решение [Демиденко, 1981]:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b, \quad (3)$$

где  $x$  — вектор искоемых коэффициентов  $x = (f_{1'} \dots, f_{N'}, \gamma)$ ;  $A$  — матрица из строк, содержащих значения  $I_{ik}$  и  $\Delta q_k$ ;  $b$  — вектор значений дебита в предыдущий момент.

## Влияние зашумленности на расчет коэффициентов

Синтетические данные — семь нагнетательных скважин. Заданные истории нагнетательных скважин изображены на графиках на рис. 1.

Дебит на добывающей скважине определяется по формуле (1) с помощью коэффициентов, показанных в таблице 1. Результат расчета показан на рис. 2.

Далее с помощью метода линейной регрессии (3) из истории добывающей скважины на рис. 2 были получены значения параметров соотношения (2). Результат расчетов показан в таблице 2.

Отметим, что некоторые коэффициенты получились отрицательными, хотя и вблизи исходных. С помощью формулы (1) и рассчитанных коэффициентов был построен дебит добывающей скважины на весь период. График совпадает с графиком на рис. 2, обе линии сливаются.

Для проверки устойчивости метода сделаем равномерный случайный разброс в исходных данных (максимальные значения 3, 5 и 10%) с помощью формулы  $\tilde{x} = x(1 - \Delta x + 2 \text{rand}(\Delta x))$ , где  $\Delta x$  — максимальная заданная погрешность,  $x$  — исходное значение,  $\tilde{x}$  — зашумленная величина,  $\text{rand}$  — генератор случайных чисел от 0 до аргумента. Затем используем данные с внесенными погрешностями для определения коэффициентов взаимовлияния (3) и расчета прогноза по формуле (1).

На рис. 3 видно, как при увеличении зашумленности меняется прогноз.

Для выявления параметра, требующего больше точности, внесем погрешность разного порядка отдельно в данные по добывающей скважине и по нагнетательным. Из графиков на рис. 4 видно, что большее влияние имеет точность исходных данных по добывающей скважине: зашумленность значений нагнетательных скважин мало влияет на ошибку прогноза.

Стоит отметить, что даже при достаточно точном прогнозе полученные коэффициенты взаимовлияния и временная константа могут сильно отличаться от точных значений.

Для каждого заданных максимальных погрешностей были определены средние ошибки прогноза — дисперсия по всему временному периоду (таблица 3). Видно, что средняя ошибка больше коррелирует с максимальной погрешностью, вносимой в историю добывающей скважины. Но большие ошибки, накладываемые на данные по нагнетательным скважинам, тоже оказывают заметное влияние на дисперсию прогноза.

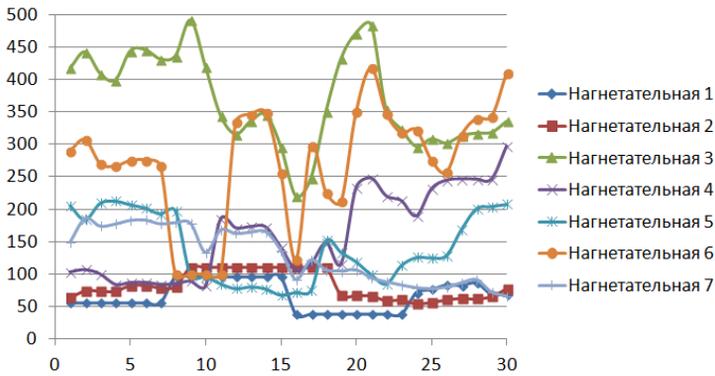


Рис. 1. История семи нагнетательных скважин

Fig. 1. History of seven injection wells

Таблица 1. Исходные коэффициенты CRM

Table 1. Initial CRM coefficients

$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
0	0	0,036	0,055
$f_5$	$f_6$	$f_7$	$\gamma$
0,023	0,132	0	3,96

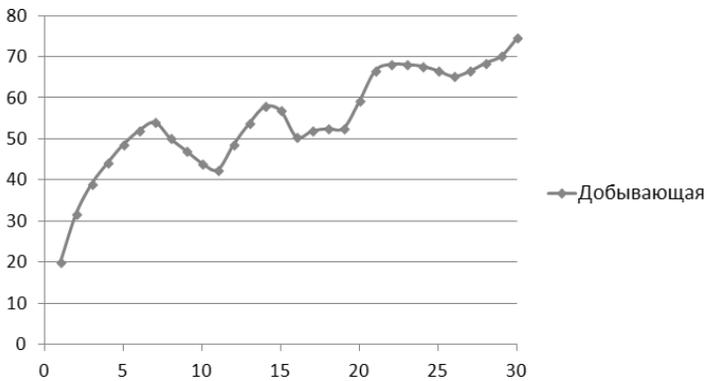


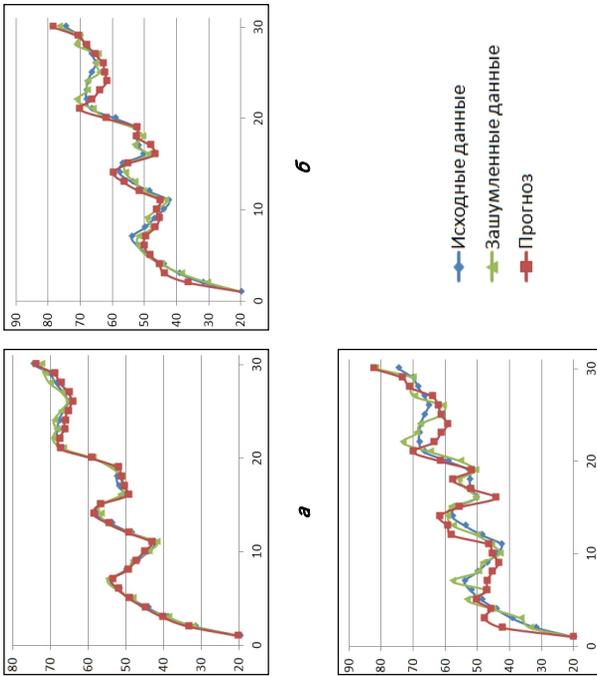
Рис. 2. Рассчитанный дебит добывающей скважины

Fig. 2. Calculated production well flow rate

Таблица 2. Коэффициенты CRM, определенные методом линейной регрессии

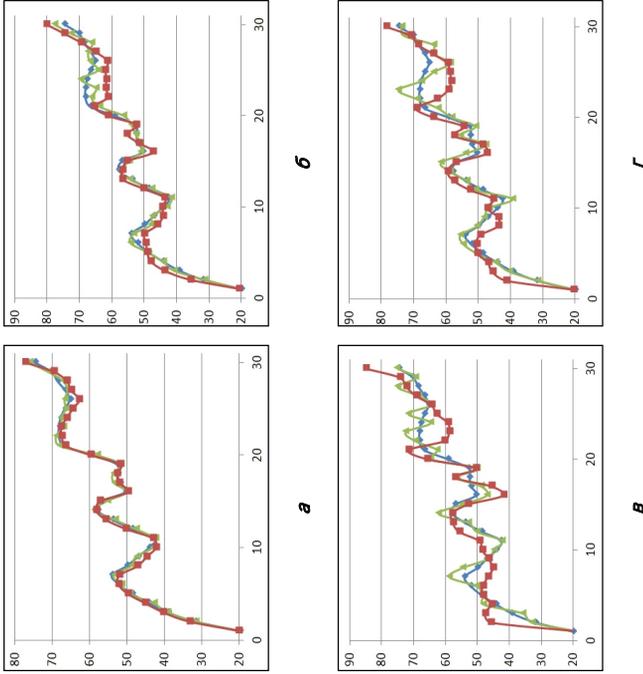
Table 2. CRM coefficients determined by linear regression

$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
-5,48867E-14	4,03566E-14	0,036456	0,055307
$f_5$	$f_6$	$f_7$	$\gamma$
0,023069	0,131548	-1,16573E-15	3,9556277



**Рис. 3.** Исходные и зашумленные данные (прогноз). Максимальный случайный разброс: а — 3%; б — 5%; в — 10%

**Fig. 3.** Initial and noisy data (the forecast). Maximum random spread: а — 3%; б — 5%; в — 10%



**Рис. 4.** Исходные и зашумленные данные (прогноз). Случайный разброс для нагнетательных-добывающей скважин: а — 10-3%; б — 10-5%; в — 0-10%; г — 5-10%

**Fig. 4.** Initial and noisy data (the forecast). Random spread for injection-production wells: а — 10-3%; б — 10-5%; в — 0-10%; г — 5-10%

**Таблица 3.** Средняя ошибка прогноза для разных погрешностей  
**Table 3.** Average forecast error for different errors

Максимальная погрешность, %		Средняя ошибка прогноза, %
Нагнетательные	Добывающая	
3	3	2,3
10	3	2,7
5	5	5,5
10	5	5,5
0	10	10,0
5	10	11,0
10	10	11,0

## Обсуждение

Прямое применение метода линейной регрессии иногда дает отрицательные коэффициенты взаимовлияния метода CRM, что не соответствует действительности. Это можно избежать модифицированным методом, вносящим ограничения в искомое решение [Данько и др., 2019; Демиденко, 1981; Ручкин и др., 2018; Степанов и др., 2020; Степанов и др., 2021].

Рис. 4 позволяет увидеть, что большее влияние на точность определения параметров метода CRM оказывает погрешность в данных истории добычи. Если данные дебита добывающей скважины достаточно точны, то зашумленность приемистости производит малый эффект. Отсюда следует, что и для других методов определения коэффициентов взаимовлияния будет проявляться похожая зависимость от погрешности исходных данных (например, метод наименьших квадратов, искусственные нейронные сети и др.), только, вероятно, другого порядка. Поэтому необходимо провести похожие проверки влияния погрешностей для других методов. В дальнейшем это позволит выбрать самый устойчивый метод и проверить его сначала на полной модели CRM, а затем на модификациях, в частности двухфазных [Olenchikov, Posvyanskii, 2019; Kim и др., 2012].

## Заключение

Необходимо отметить, что полученная оценка влияния справедлива для зависимостей (1) и (2), где для определения дебита в любой взятый момент времени используются приемистости за тот же промежуток и дебит за предыдущий период. Благодаря выражению (1) можно построить линейную зависимость, где используются данные по всем скважинам за несколько временных отметок, что позволит нивелировать погрешности. Тем не менее рекомендуется также применить другие способы линеаризации формулы (1), чтобы сравнить устойчивости разных подходов.

Сильно отличающиеся коэффициенты взаимовлияния, определенные с помощью метода линейной регрессии, дают очень близкие прогнозы. Этот результат, в свою очередь, дает возможности для преобразования выражения (1), введения новых численных комплексов и дальнейшей линеаризации.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- Данько М. Ю., Бриллиант Л. С., Завьялов А. С. 2019. Применение метода динамического материального баланса и CRM-метода (capacitance-resistive models) к подсчету запасов Ачимовских и Баженовских коллекторов // Недропользование XXI век. № 4 (80). С. 76–85.
- Демиденко Е. З. 1981. Линейная и нелинейная регрессия. М.: Финансы и статистика. 302 с.
- Ручкин А. А., Степанов С. В., Князев А. В., Степанов А. В., Кoryтов А. В., Авсянко И. Н. 2018. Исследование особенностей оценки взаимовлияния скважин на примере модели CRM // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 4. № 4. С. 148–168. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2018-4-4-148-168>
- Степанов С. В., Тырсин А. Н., Ручкин А. А., Поспелова Т. А. 2020. Использование энтропийного моделирования для анализа эффективности системы заводнения // Нефтяное хозяйство. № 6. С. 62–67. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2020-6-62-67>
- Степанов С. В., Бекман А. Д., Ручкин А. А., Поспелова Т. А. 2021. Сопровождение разработки нефтяных месторождений с использованием моделей CRM: монография. Тюмень: Экспресс. 298 с.
- Kim J. S., Lake L.W., Edgar T. F. 2012. Integrated capacitance-resistance model for characterizing waterflooded reservoirs // 2012 IFAC Workshop on Automatic Control in Offshore Oil and Gas Production (31 May — 1 June 2012, Trondheim, Norway). <https://doi.org/10.13140/2.1.2060.0964>
- Olenchikov D., Posvyanskii D. 2019. Application of CRM-like models for express forecasting and optimizing field development // SPE Russian Petroleum Technology Conference (22–24 October 2019, Moscow, Russia). <https://doi.org/10.2118/196893-MS>
- Sayarpour M. 2008. Development and Application of Capacitance-Resistive Models to Water/CO<sub>2</sub> Floods. Ph. D diss. The University of Texas at Austin. 236 p.
- Sayarpour M., Zuluaga E., Kabir C. S., Lake L. W. 2009. The use of capacitance-resistance models for rapid estimation of waterflood performance and optimization. Journal of Petroleum Science and Engineering. Vol. 69. No. 3–4. Pp. 227–238. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.09.006>
- Yousef A. A., Gentil P., Jensen J. L., Lake L. W. 2006. A capacitance model to infer interwell connectivity from production- and injection-rate fluctuations // SPE Reservoir Evaluation & Engineering. Vol. 9. No. 6. Pp. 630–646. SPE-10.2118. <https://doi.org/10.2118/95322-PA>

## References

- Danko, M. Yu., Brilliant, L. S., & Zavyzlov, A. S. (2019). Application of dynamic material balance method and CRM method (capacitance-resistive models) for reserves assessment in Achimov and Bazhenov reservoirs. *Nedropolzovanie XXI vek*, (4), 76–85. [In Russian]
- Demidenko, E. Z. (1981). *Linear and non-linear regression*. Finansy i statistika. [In Russian]
- Ruchkin, A. A., Stepanov, S. V., Knyazev, A. V., Stepanov, A. V., Korytov, A. V., & Avsyanko, I. N. (2018). Applying CRM model to study well interference. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 4(4), 148–168. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2018-4-4-148-168> [In Russian]

- Stepanov, S. V., Tyrsin, A. N., Ruchkin, A. A., & Pospeiova, T. A. (2020). Using entropy modeling to analyze the effectiveness of the waterflooding system. *Oil Industry*, (6), 62–67. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2020-6-62-67> [In Russian]
- Stepanov, S. V., Bekman, A. D., Ruchkin, A. A., & Pospelova, T. A. (2021). *Maintenance of oil field development using CRM models*. Express. [In Russian]
- Kim, J. S., Lake, L. W., & Edgar, T. F. (2012, May 31 – June 1). *Integrated capacitance-resistance model for characterizing waterflooded reservoirs* [Conference paper]. 2012 IFAC Workshop on Automatic Control in Offshore Oil and Gas Production, Trondheim, Norway. <https://doi.org/10.13140/2.1.2060.0964>
- Olenchikov, D., & Posvyanskii, D. (2019, October 22–24). *Application of CRM-like models for express forecasting and optimizing field development* [Conference paper]. SPE Russian Petroleum Technology Conference, Moscow, Russia. <https://doi.org/10.2118/196893-MS>
- Sayarpour, M. (2008). *Development and application of capacitance-resistive models to water/CO<sub>2</sub> floods* [Doctoral dissertation, The University of Texas at Austin].
- Sayarpour, M., Zuluaga, E., Kabir, C. S., & Lake, L. W. (2009). The use of capacitance-resistance models for rapid estimation of waterflood performance and optimization. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 69(3–4), 227–238. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.09.006>
- Yousef, A. A., Gentil, P., Jensen, J. L., & Lake, L. W. (2006). A capacitance model to infer interwell connectivity from production- and injection-rate fluctuations. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 9(6), 630–646. <https://doi.org/10.2118/95322-PA>

## Информация об авторе

Родион Михайлович Ганопольский, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой моделирования физических процессов и систем, Физико-технический институт, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия  
[r.m.ganopolskij@utmn.ru](mailto:r.m.ganopolskij@utmn.ru)

## Information about the author

Rodion M. Ganopolskij, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, Tyumen, Russia  
[r.m.ganopolskij@utmn.ru](mailto:r.m.ganopolskij@utmn.ru)

# Дифференциально-разностные системы в анализе слабой разрешимости начально-краевых задач с изменяющейся в сетеподобной области пространственной переменной

Ван Нгуен Хоанг<sup>✉</sup>, Вячеслав Васильевич Провоторов

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия  
Контакт для переписки: [fadded9x@gmail.com](mailto:fadded9x@gmail.com)<sup>✉</sup>

**Аннотация.** В работе указан подход и соответствующие ему методы, которые позволяют построить априорные оценки слабых решений дифференциально-разностной системы с пространственной переменной, изменяющейся в многомерной сетеподобной области. Такие оценки в пространствах суммируемых функций используются при поиске условий разрешимости краевых задач различного типа для дифференциально-разностных систем. Кроме того, априорные оценки используются для обоснования применения метода дискретизации по временной переменной (полудискретизации) к анализу слабой разрешимости начально-краевых задач и последующего построения приближений слабых решений. Аргументом для использования подхода является тот факт, что представление математических моделей процесса с помощью формализмов дифференциально-разностных систем является единственным инструментом эффективного решения задач переноса сплошных сред по сетеподобным носителям. К примеру, редукция дифференциальной системы (начально-краевой задачи) к соответствующей ей дифференциально-разностной дает возможность не только существенно упростить анализ задач оптимального управления дифференциальной системой (т. к. этот анализ сводится к изучению задачи оптимального управления системой эллиптических уравнений), но и с помощью классических методов теории управления эллиптическими системами алгоритмизировать исходную задачу. Используемая редукция зачастую существенно упрощает условия существования и единственности оптимального управления дифференциальной системой. Данным задачам посвящен достаточно большой спектр исследований

нестационарных сетеподобных гидродинамических процессов и потоковых явлений. В качестве иллюстрации используемого подхода приведен анализ разрешимости линеаризованной системы Навье — Стокса.

**Ключевые слова:** сетеподобная область, дифференциально-разностная система, априорные оценки слабых решений, начально-краевая задача, разрешимость

**Цитирование:** Хоанг В. Н., Провоторов В. В. 2023. Дифференциально-разностные системы в анализе слабой разрешимости начально-краевых задач с изменяющейся в сетеподобной области пространственной переменной // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 1 (33). С. 116–138. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-116-138>

Поступила 09.01.2023; одобрена 27.03.2023; принята 31.03.2023

## Differential-difference systems in the analysis of weak solvability of initial-boundary value problems with a spatial variable in a network-like domain

Van Nguyen Hoang , Vyacheslav V. Provotorov

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Corresponding author: [fadded9x@gmail.com](mailto:fadded9x@gmail.com) 

**Abstract.** In the work, the approach and the corresponding methods, which make it possible to construct a priori estimates of weak solutions of a differential-difference system with a spatial variable varying in a multidimensional network-like domain are indicated. Such estimates in spaces of summable functions are used to find solvability conditions for boundary value problems of various types for differential-difference systems. In addition, a priori estimates are used to justify the application of the method of discretization with respect to the time variable (semi-discretization) to the analysis of the weak solvability of initial-boundary value problems and the subsequent construction of approximations of weak solutions. The rationale for the approach used is the fact that in a fairly wide class applied analysis of the problems of transporting continuous media networks-like carriers, the representation of mathematical models of the process using the formalisms of differential-difference systems is the only tool for effectively solving these problems. For example, the reduction of a differential system

(initial-boundary value problem) to the corresponding differential-difference system makes it possible not only to significantly simplify the analysis of problems of optimal control of a differential system (since this analysis reduces to studying the problem of optimal control of a system of elliptic equations), but also, using classical methods of control theory for elliptic systems, algorithmize the original problem. The reduction used often facilitates establishing the conditions for the existence and uniqueness of optimal control of a differential system. These problems also include a fairly large range of studies of non-stationary network-like hydrodynamic processes and flow phenomena. As an illustration of the approach used and the results obtained, the analysis of the solvability of the linearized Navier–Stokes system is given and the ways of studying the nonlinear Navier–Stokes system are indicated.

**Keywords:** network-like domain, differential-difference system, a priori estimates of weak solutions, initial-boundary value problem, solvability

**Citation:** Hoang, V. N., & Provotorov, V. V. (2023). Differential-difference systems in the analysis of weak solvability of initial-boundary value problems with a spatial variable in a network-like domain. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(1), 116–138. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-116-138>

Received January 9, 2023; Reviewed March 27, 2023; Accepted March 31, 2023

## Введение

В работе развиваются идеи анализа дифференциально-разностных систем с пространственной переменной  $x$ , изменяющейся на графе, т. е. на совокупности одномерных отрезков [Baranovskii, 2016; Provotorov, Provotorova, 2017], только переменная  $x$   $n$ -мерная:  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  [Artemov и др., 2019; Baranovskii и др., 2021].

Связная область  $\mathcal{I}$  состоит: 1) из совокупности не пересекающихся между собой подобластей; 2) совокупности поверхностей, посредством которых эти подобласти примыкают друг к другу. Эти поверхности являются частями границ подобластей и называются поверхностями примыкания подобластей. Места примыкания подобластей — узловое места области  $\mathcal{I}$  [Artemov и др., 2019; Baranovskii и др., 2021].

Для анализа дифференциально-разностной системы строятся пространства суммируемых на  $\mathcal{I}$  функций, обладающих свойством, обусловленным определенными балансовыми соотношениями, которые задаются на всех поверхностях примыкания. В приложениях такие балансовые соотношения устанавливают закономерности перемещения потоков различного типа сплошных сред в местах ветвления носителей сплошных сред. К примеру, в местах ветвления сетевых газонефтепроводов балансовые соотношения — это математическое описание потоковых явлений. В связи с этим отметим, что представленный ниже подход и метод исследования достаточно часто

используется при анализе математических моделей нестационарных процессов гидродинамики при транспортировке жидкостей по сетеподобным носителям [Artemov, Baranovskii, 2019; Baranovskii, 2019; Baranovskii и др., 2021 и библиография там].

## Обозначения, основные понятия и определения

Ограниченная область  $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  ( $\partial\mathcal{J}$  — граница  $\mathcal{J}$ ), имеет в своем составе подобласти  $\mathcal{J}_l$  ( $\partial\mathcal{J}_l$  — границы  $\mathcal{J}_l$ ),  $l \in I_N = \{1, 2, \dots, N\}$ , которые связаны между собой определенным образом в  $M$ -узловых местах  $\omega_j$ ,  $j \in I_M = \{1, 2, \dots, M\}$  ( $1 \leq M \leq N - 1$ ):

$$\mathcal{J} = \hat{\mathcal{J}} \cup \hat{\omega}, \quad \text{где } \hat{\mathcal{J}} = \bigcup_{l=1}^N \mathcal{J}_l,$$

причем  $\hat{\omega} = \bigcup_{j=1}^M \omega_j$ ,  $\mathcal{J}_l \cap \mathcal{J}_{l'} = \emptyset$  ( $l \neq l'$ ),  $\omega_j \cap \omega_{j'} = \emptyset$  ( $j \neq j'$ ),  $\mathcal{J}_l \cap \omega_j = \emptyset$

для любых  $l \in I_N$ ,  $j \in I_M$  [Artemov и др., 2019; Baranovskii и др., 2021]. Связь подобластей  $\mathcal{J}_l$  в узловых местах  $\omega_j$  осуществляется посредством примыкания их частями своих границ  $\partial\mathcal{J}_l$ , что означает наличие общих частей границ у этих подобластей (далее — областей примыкания). А именно: пусть  $j$  ( $j \in I_M$ ) фиксировано, т. е. фиксировано узловое место  $\omega_j$ . Это означает, что фиксированы подобласти примыкания  $\mathcal{J}_{j_1}, \mathcal{J}_{j_2}, \dots, \mathcal{J}_{j_{m_j}}$  этого узлового места ( $m_j$  — число подобластей примыкания узлового места  $\omega_j$ ). Каждая подобласть  $\mathcal{J}_{j_s}$  ( $s = \overline{1, m_j}$ ) примыкает к  $\omega_j$  своей поверхностью примыкания  $S_{j_s} \subset \partial\mathcal{J}_{j_s}$ ,

причем 
$$S_{j_1} = \bigcup_{s=2}^{m_j} S_{j_s}.$$

Последнее означает, что поверхность  $S_j := S_{j_1} \subset \mathcal{J}_{j_1}$  характеризует структуру узлового места  $\omega_j$  и определяет его (далее  $S_j$  — поверхность примыкания узлового места  $\omega_j$ ). Таким образом, граница  $\partial\mathcal{J}$  области  $\mathcal{J}$  определяется соотношением

$$\partial\mathcal{J} = \bigcup_{l=1}^N \partial\mathcal{J}_l / \bigcup_{j=1}^M S_j.$$

Из сказанного следует, что область  $\mathcal{J}$  структурирована аналогично геометрическому графу-дереву [Baranovskii, 2016], причем произвольная связная подобласть области  $\mathcal{J}$  структурирована таким же образом. Везде далее предполагается, что поверхности  $S_j$  и  $S_{j_s}$  гладкие, каждая подобласть  $\mathcal{J}_l$  звездная относительно шара из  $\mathcal{J}_l$ .

В дальнейших рассуждениях используются классические пространства действительных измеримых по Лебегу функций  $u(x)$ , где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  принадлежит области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  [Ладыженская, 1973, с. 29];  $L_2(\Omega)$  — пространство, элементами которого являются функции  $u(x)$ , суммируемые с квадратом в области  $\Omega$ . Скалярное произведение  $(u, v)_\Omega$  определено соотношением

$$(u, v)_\Omega = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_\Omega = \sqrt{(u, u)_\Omega}, \quad (1)$$

где  $W_2^1(\Omega)$  — пространство, элементами которого являются функции  $u(x) \in L_2(\Omega)$ , имеющие обобщенные производные

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \in L_2(\Omega) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Скалярное произведение и норма определены соотношениями

$$(u, v)_\Omega^1 = \int_\Omega \left( u(x)v(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right) dx, \quad \|u\|_\Omega^1 = \sqrt{(u, u)_\Omega^1}. \quad (2)$$

Для сетеподобной области  $\mathcal{J}$  интеграл  $\int_{\mathcal{J}} u(x) dx$  определяется соотношением

$$\int_{\mathcal{J}} u(x) dx = \sum_{l=1}^N \int_{\mathcal{J}_l} u(x) dx.$$

Пространства  $L_2(\mathcal{J})$  и  $W_2^1(\mathcal{J})$  вводятся аналогично указанным выше, скалярные произведения и нормы пространств  $L_2(\mathcal{J})$  и  $W_2^1(\mathcal{J})$  определяются соотношениями

$$(u, v)_{\mathcal{J}} = \sum_{l=1}^N \int_{\mathcal{J}_l} u(x)v(x) dx, \quad \|u\|_{\mathcal{J}} = \sqrt{(u, u)_{\mathcal{J}}}, \quad (3)$$

$$(u, v)_{\mathcal{J}}^1 = \sum_{l=1}^N \int_{\mathcal{J}_l} \left( u(x)v(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right) dx, \quad (4)$$

$$\|u\|_{\mathcal{J}}^1 = \sqrt{(u, u)_{\mathcal{J}}^1} = \left( \sum_{l=1}^N \int_{\mathcal{J}_l} \left( u^2(x) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

вытекающими из соотношений (1), (2).

В дальнейшем будут введены пространства допустимых решений дифференциально-разностных систем со свойствами, описывающими условия примыкания в узловых местах  $\omega_j$ ,  $j = \overline{1, M}$ . Для этого необходимо получить условия продолжения функций  $u(x)$  с области  $\mathcal{J}$  на

$$\overline{\mathcal{J}} = \bigcup_{l=1}^N \overline{\mathcal{J}_l}.$$

Введем в рассмотрение множество  $C(\overline{\Omega})$  непрерывных в  $\overline{\Omega}$  функций. Считаем, что для функции  $u(x) \in C(\overline{\Omega})$  существует производная, непрерывная в замыкании  $\overline{\Omega}$  области  $\Omega$ , если эта производная продолжается по непрерывности с  $\Omega$  на  $\overline{\Omega}$  (топология на замыкании  $\overline{\Omega}$  определяется топологией  $\Omega$ ). Исходя из сказанного, можно считать, что введено множество  $C^1(\overline{\Omega})$  с элементами  $u(x)$ , для которых определены непрерывные производные

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ в } \overline{\Omega},$$

при этом соотношением (1) в  $C^1(\overline{\Omega})$  определяется скалярное произведение, а формулой (2) определяется норма.

Таким образом, для функций, определенных на замыкании  $\bar{\mathcal{J}}$  области  $\mathcal{J}$  сформированы следующие множества:

- $C(\bar{\mathcal{J}})$  — множество непрерывных в  $\bar{\mathcal{J}}$  функций  $u(x)$ , скалярное произведение и норма которых определяются соотношениями (3);
- $C^1(\bar{\mathcal{J}}_l) (l = \overline{1, N})$  — совокупность  $N$ -множеств функций  $u(x) \in C(\bar{\mathcal{J}})$ , имеющих непрерывные производные

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_l} \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

в  $\bar{\mathcal{J}}_l$  для любого  $l (l = \overline{1, N})$ ;

- $C^1(\bar{\mathcal{J}})$  — множество функций  $u(x) \in C^1(\bar{\mathcal{J}}_l) (l = \overline{1, N})$ , для которых скалярное произведение и норма определены соотношениями (4) и (5) соответственно.

В наших дальнейших рассуждениях будет использоваться дифференциальное выражение

$$Au := \sum_{\kappa, \iota=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left( a_{\kappa \iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right),$$

определенное на функциях  $u(x)$  некоторого подпространства пространства  $L_2(\mathcal{J})$ . Здесь  $a_{\kappa \iota}(x)$  — ограниченные функции из пространства  $L_2(\mathcal{J})$  (необходимые пояснения приведены ниже).

Обозначим через  $\tilde{C}^1(\bar{\mathcal{J}})$  множество функций  $u(x) \in C^1(\bar{\mathcal{J}})$ , которые на поверхностях примыкания  $S_j, S_{j_s} (s = \overline{2, m_j})$  всех  $\omega_j (j = \overline{1, M})$  связаны условиями примыкания

$$\int_{S_j} \frac{\partial u(x)}{\partial v_\Lambda} dS + \sum_{s=2}^{m_j} \int_{S_{j_s}} \frac{\partial u(x)}{\partial v_\Lambda} dS = 0, \quad j = \overline{1, M}, \quad (6)$$

где

$$\frac{\partial u(x)}{\partial v_\Lambda} = \sum_{\kappa, \iota=1}^n a_{\kappa \iota}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \cos(\bar{n}, x_\kappa)$$

на  $S_j$  или  $S_{j_s}$ ,  $\cos(\bar{n}, x_\kappa)$  —  $\kappa$ -й направляющий косинус внешней нормали  $\bar{n} := \bar{n}(x)$  к границе  $S_j \subset \partial \mathcal{J}_j$  или  $S_{j_s} \subset \partial \mathcal{J}_{j_s} (s = \overline{2, m_j})$  соответственно (используются обозначения, принятые в монографии [Лионс, 1972а, с. 32]).

**Определение 1.** Пространство  $\tilde{W}^1(\mathcal{J})$  — замыкание  $\tilde{C}^1(\bar{\mathcal{J}})$  в норме, определенной соотношением (5).

Из определения вытекает основное свойство элементов  $u(x) \in \tilde{W}^1(\mathcal{J})$ : сужение  $u(x)|_{\mathcal{J}_l}$  функции  $u(x)$  на подобласть  $\mathcal{J}_l$  является элементом  $W^1(\bar{\mathcal{J}}_l), l = \overline{1, N}$ . Кроме того, при учете  $\mathcal{J}_l \subset \mathcal{J} (l = \overline{1, N})$  из существования обобщенных производных

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}, \quad l = 1, 2, \dots, n,$$

в  $\mathcal{J}$  вытекает существование этих производных в  $\mathcal{J}_l$ .

Таким образом, элементы  $u(x) \in \tilde{W}^1(\mathcal{J})$  удовлетворяют условиям примыкания (6), и  $\tilde{W}^1(\mathcal{J})$  является пространством допустимых решений дифференциально-разностной системы. Пусть далее  $\tilde{C}_0^1(\mathcal{J})$  — множество элементов из  $\tilde{C}^1(\overline{\mathcal{J}})$ , равных нулю на границе  $\partial\mathcal{J}$ .

**Определение 2.** Пространство  $\tilde{W}_0^1(\mathcal{J})$  — замыкание  $\tilde{C}_0^1(\mathcal{J})$  в норме, определенной соотношением (5).

Пространства  $\tilde{W}_0^1(\mathcal{J}) \subset \tilde{W}^1(\mathcal{J})$  и  $\tilde{W}^1(\mathcal{J})$  являются пространствами допустимых решений дифференциально-разностной системы. При анализе дифференциально-разностной системы с краевыми условиями Дирихле используется пространство  $\tilde{W}_0^1(\mathcal{J})$ . Анализ той же системы с краевыми условиями общего типа осуществляется в пространстве  $\tilde{W}^1(\mathcal{J})$ .

### Дифференциально-разностная система

Определим дискретную сетку  $\{k\tau, k = \overline{1, K}\}$ ,  $\tau = T/K, K < \infty$ , для отрезка  $[0, T]$  и остановимся на анализе в пространстве  $\tilde{W}_0^1(\mathcal{J})$  дифференциально-разностной системы уравнений

$$\frac{1}{\tau} [y(k) - y(k-1)] - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( a_{k_1}(x) \frac{\partial y(k)}{\partial x_1} \right) + b(x)y(k) = f(k), \quad (7)$$

$$k = \overline{1, K}, \quad y(0) = \varphi(x);$$

где

$$y(k) := y(x; k),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( a_{k_1}(x) \frac{\partial y(k)}{\partial x_1} \right) := \sum_{k_1=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \left( a_{k_1}(x) \frac{\partial y(k)}{\partial x_1} \right),$$

$$f(k) := f(x; k),$$

$$k = 1, 2, \dots, K.$$

При каждом фиксированном  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) функция  $y(k) \in \tilde{W}_0^1(\mathcal{J})$  удовлетворяет краевому условию

$$y(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad (8)$$

коэффициенты  $a_{k_1}(x), b(x)$  — измеримые ограниченные функции:

$$a_{k_1}(x) = a_{1k_1}(x),$$

$$a_* \xi^2 \leq a_{k_1}(x) \xi_k \xi_l \leq a^* \xi^2,$$

$$a_{k_1}(x) \xi_k \xi_l = \sum_{k_1=1}^n a_{k_1}(x) \xi_k \xi_l, \quad (9)$$

$$\xi^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2, \quad |b(x)| \leq \beta, \quad x \in \mathcal{J},$$

постоянные  $a_*, a^*, \beta$  фиксированы,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , а также заданы исходные данные:

$$\varphi(x), f(k) \in L_2(\mathcal{J}). \quad (10)$$

Следует отметить, что двухслойная аппроксимация

$$\frac{1}{\tau} [y(k) - y(k-1)]$$

производной  $\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$  с погрешностью  $O(\tau)$  может быть заменена на любую из трех-слойных аппроксимаций, например

$$\frac{1}{\tau} \left[ \frac{3}{2} y(k+1) - 2y(k) + \frac{1}{2} y(k-1) \right]$$

с погрешностью  $O(\tau^2)$ .

Чтобы не утяжелять представляемый ниже анализ большими техническими сложностями, остановимся на дифференциально-разностной системе (7).

**Определение 3.** Если совокупность функций  $y(k) \in \tilde{W}_0^1(\mathcal{J})$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) удовлетворяет соотношениям

$$\int_{\mathcal{J}} y(k)_t \eta(x) dx + \ell(y(k), \eta) = \int_{\mathcal{J}} f(k) \eta(x) dx, \\ k = 1, 2, \dots, K,$$

для произвольной функции  $\eta(x) \in \tilde{W}_0^1(\mathcal{J})$ , то эта совокупность называется слабым решением системы (7), (8).

Здесь используются следующие обозначения:

$$y(k)_t = \frac{1}{\tau} [y(k) - y(k-1)],$$

$$\ell(y(k), \eta) = \int_{\mathcal{J}} \left( \sum_{\kappa=1}^n a_{\kappa 1}(x) \frac{\partial y(x; k)}{\partial x_1} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_{\kappa}} + b(x) y(x; k) \eta(x) \right) dx.$$

**Замечание 1.** Для фиксированного  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) соотношения (7), (8) описывают краевую задачу относительно  $y(k) \in \tilde{W}_0^1(\mathcal{J})$ .

**Теорема 1.** При достаточно малых  $\tau$  и при выполнении условий (9), (10) дифференциально-разностная система (7), (8) слабо разрешима в  $\tilde{W}_0^1(\mathcal{J})$ , решение ее единственно.

**Доказательство.** Имеет место свойство полноты и базисности системы обобщенных собственных функций оператора

$$\Lambda u := Au - b(x)u = \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} \left( a_{\kappa 1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - b(x)u$$

в пространстве  $\tilde{W}_0^1(\mathcal{J})$ . Собственные значения  $\Lambda$  вещественные и расположены по возрастанию модулей с учетом кратностей:  $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ ,  $\lambda_i \rightarrow -\infty$  при  $i \rightarrow \infty$ . Оператор  $\Lambda$  фредгольмов, т. е. для задачи  $\Lambda u = \lambda u + g$ ,  $g \in L_2(\Gamma)$ , в  $\tilde{W}_0^1(\mathcal{J})$  имеют место теоремы альтернативы Фредгольма. Доказательство этих утверждений почти дословно повторяет рассуждения монографии [Ладыженская, 1973, с. 96].

При  $k = 1$  в соотношении (7) и при  $0 < \tau < \tau_0$  ( $\tau_0$  — достаточно малое) краевая задача

$$\Delta y(1) = \frac{1}{\tau} y(1) - f(1) - \frac{1}{\tau} \varphi(x)$$

слабо разрешима относительно функции  $y(1) \in \tilde{W}_0^1(\mathcal{J})$ , притом единственным образом. Такое же утверждение остается, если  $k = 2$  в соотношении (7). Функция  $y(2)$  определится единственным образом как слабое решение задачи

$$\Delta y(2) = \frac{1}{\tau} y(2) - f(2) - \frac{1}{\tau} y(1)$$

по найденной выше  $y(1)$ . Полагая  $k = 3, 4, \dots, K$ , приходим к однозначному определению функций  $y(3), y(4), \dots, y(K)$ . Значение числа  $\tau_0$  указано в приведенных ниже утверждениях. Теорема доказана.

Получим оценки в  $L_2(\mathcal{J})$  норм

$$\|y(k)\|_{\mathcal{J}} \text{ и } \left\| \frac{\partial y(k)}{\partial x} \right\|_{\mathcal{J}} = \left( \int_{\mathcal{J}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y(x; k)}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

не зависящие от  $\tau$ . Введем обозначение

$$\|f(k)\|_{2,1,\mathcal{J}} = \tau \sum_{s=1}^k \|f(s)\|_{\mathcal{J}}.$$

**Теорема 2.** Если выполнены условия теоремы 1, то при  $\tau \leq \tau_0 < \frac{1}{4\beta}$  для функций  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , имеют место следующие оценки норм:

$$\|y(k)\|_{\mathcal{J}} \leq e^{4\beta T} \left( \|\varphi\|_{\mathcal{J}} + 2\|f(k)\|_{2,1,\mathcal{J}} \right), \quad k = 1, 2, \dots, K, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \|y(m)\|_{\mathcal{J}}^2 + 2a_* \tau \sum_{k=1}^m \left\| \frac{\partial y(k)}{\partial x} \right\|_{\mathcal{J}}^2 + \tau^2 \sum_{k=1}^m \|y(k)_t\|_{\mathcal{J}}^2 &\leq \\ &\leq C \left( \|\varphi\|_{\mathcal{J}}^2 + \|f(m)\|_{2,1,\mathcal{J}}^2 \right), \end{aligned} \tag{12}$$

$1 \leq m \leq K,$

$C > 0$  зависит только от заданных  $a_*, \beta, T$ .

**Доказательство.** Приведем рассуждения, аналогичные представленным в работе [Ладыженская, 1973, с. 189] (см. также [Лионс, 1972б]).

Несложные преобразования равенства  $\tau y(k)_t = y(k) - y(k-1)$  приводят к равенству

$$y(k-1)^2 = \left( y(k) - \tau y(k)_t \right)^2 = y(k)^2 + \tau^2 y(k)_t^2 - 2\tau y(k) y(k)_t,$$

из которого вытекает соотношение

$$2\tau y(k) y(k)_t = y(k)^2 + \tau^2 \left( y(k)_t \right)^2 - y(k-1)^2. \tag{13}$$

В интегральном соотношении определения 3 заменим  $\eta(x)$  на  $2\tau y(k)$ . В силу соотношений (9), (13) получим неравенство

$$\int_{\mathcal{J}} y(k)^2 dx - \int_{\mathcal{J}} y(k-1)^2 dx + \tau^2 \int_{\mathcal{J}} (y(k)_t)^2 dx + 2a_* \tau \int_{\mathcal{J}} \left( \frac{\partial y(k)}{\partial x} \right)^2 dx \leq \\ \leq -2\tau \int_{\mathcal{J}} b(x) y(k)^2 dx + 2\tau \int_{\mathcal{J}} f(k) y(k) dx,$$

учитывая представление нормы (3) в  $L_2(\mathcal{J})$ ,

$$\|y(k)\|_{\mathcal{J}}^2 - \|y(k-1)\|_{\mathcal{J}}^2 + \tau^2 \|y(k)_t\|_{\mathcal{J}}^2 + 2a_* \tau \left\| \frac{\partial y(k)}{\partial x} \right\|_{\mathcal{J}}^2 \leq \\ \leq \rho\tau \|y(k)\|_{\mathcal{J}}^2 + 2\tau \|f(k)\|_{\mathcal{J}} \|y(k)\|_{\mathcal{J}}, \quad (14)$$

где  $\rho = 2\beta$ . Из неравенства (14) следует

$$\|y(k)\|_{\mathcal{J}}^2 - \|y(k-1)\|_{\mathcal{J}}^2 \leq \rho\tau \|y(k)\|_{\mathcal{J}}^2 + 2\tau \|f(k)\|_{\mathcal{J}} \|y(k)\|_{\mathcal{J}}. \quad (15)$$

Исходя из равенства

$$\|y(k)\|_{\mathcal{J}}^2 - \|y(k-1)\|_{\mathcal{J}}^2 = \\ = (\|y(k)\|_{\mathcal{J}} - \|y(k-1)\|_{\mathcal{J}}) (\|y(k)\|_{\mathcal{J}} + \|y(k-1)\|_{\mathcal{J}}),$$

рассмотрим два случая.

**Случай 1.** Пусть  $\|y(k)\|_{\mathcal{J}} + \|y(k-1)\|_{\mathcal{J}} > 0$ . Поделив обе части (15) на выражение  $\|y(k)\|_{\mathcal{J}} + \|y(k-1)\|_{\mathcal{J}}$ , получим неравенство

$$\|y(k)\|_{\mathcal{J}} \leq \frac{1}{1-\rho\tau} \|y(k-1)\|_{\mathcal{J}} + \frac{2\tau}{1-\rho\tau} \|f(k)\|_{\mathcal{J}} \quad (16)$$

с условием, что  $\tau \leq \tau_0 < \frac{1}{2\rho}$ . При этом учитывается очевидное неравенство

$$\frac{\|y(k)\|_{\mathcal{J}}}{\|y(k)\|_{\mathcal{J}} + \|y(k-1)\|_{\mathcal{J}}} \leq 1.$$

**Случай 2.** Пусть  $\|y(k)\|_{\mathcal{J}} + \|y(k-1)\|_{\mathcal{J}} > 0$  при некоторых  $k$  из множества  $\{1, 2, \dots, K\}$ . Тогда из (15) вытекает  $0 \leq \rho\tau \|y(k)\|_{\mathcal{J}}^2 + 2\tau \|f(k)\|_{\mathcal{J}} \|y(k)\|_{\mathcal{J}}$ , что снова дает неравенство (16).

Свойство рекуррентности неравенства (16) приводит к неравенству

$$\|y(k)\|_{\mathcal{J}} \leq \frac{1}{1-\rho\tau} \|y(k-1)\|_{\mathcal{J}} + \frac{2\tau}{1-\rho\tau} \|f(k)\|_{\mathcal{J}} \leq \\ \leq \frac{1}{(1-\rho\tau)^k} \|y(0)\|_{\mathcal{J}} + 2\tau \sum_{s=1}^k \frac{1}{(1-\rho\tau)^{k-s+1}} \|f(s)\|_{2,\mathcal{J}},$$

а учитывая неравенства

$$\frac{\rho\tau}{1-\rho\tau}k \leq \frac{\rho T}{1-\rho\tau} \leq 2\rho T \text{ при } \tau < \frac{1}{2\rho} \text{ и } \frac{1}{(1-\rho\tau)^k} \leq e^{2\rho T},$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-\rho\tau)^k} \|y(0)\|_{\mathcal{J}} + 2\tau \sum_{s=1}^k \frac{1}{(1-\rho\tau)^{k-s+1}} \|f(s)\|_{2,\mathcal{J}} \leq \\ & \leq \frac{1}{(1-\rho\tau)^k} \left( \|y(0)\|_{\mathcal{J}} + 2\tau \sum_{s=1}^k \|f(s)\|_{\mathcal{J}} \right) \leq \\ & \leq e^{2\rho T} \left( \|y(0)\|_{\mathcal{J}} + 2\|f(k)\|_{2,1,\mathcal{J}} \right) \end{aligned}$$

и, в свою очередь, неравенство

$$\|y(k)\|_{\mathcal{J}} \leq e^{2\rho T} \left( \|y(0)\|_{\mathcal{J}} + 2\|f(k)\|_{2,1,\mathcal{J}} \right),$$

из которого вытекает оценка (11), т. к.  $\rho = 2\beta$  и  $y(0) = \varphi(x)$ .

Покажем справедливость оценки (12). Для этого просуммируем (14) по  $k$  от 1 до  $m \leq K$ , учитывая оценку (11), и получим неравенство

$$\begin{aligned} & \|y(m)\|_{\mathcal{J}}^2 + 2a_*\tau \sum_{k=1}^m \left\| \frac{\partial y(k)}{\partial x} \right\|_{\mathcal{J}}^2 + \tau^2 \sum_{k=1}^m \|y(k)_t\|_{\mathcal{J}}^2 \leq \\ & \leq C \left( \|\varphi\|_{\mathcal{J}}^2 + \|f(m)\|_{2,1,\mathcal{J}}^2 \right), \quad k=1, 2, \dots, K, \end{aligned}$$

где  $1 \leq m \leq K$ ,  $C > 0$  зависит только от заданных  $a_*$ ,  $\beta$ ,  $T$  и не зависит от  $\tau$ . Тем самым показано неравенство (12). Теорема доказана.

Следующее утверждение является следствием из теоремы 2.

**Теорема 3.** Если выполнены условия (9), (10), то при  $\tau \leq \tau_0 < \frac{1}{4\beta}$  слабое решение

системы (7), (8) непрерывно зависит в нормах пространств  $L_2(\mathcal{J})$  и  $W_2^1(\mathcal{J})$  от исходных данных  $\varphi(x), f(k)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ).

Доказательство слабой разрешимости дифференциальной системы (начально-краевой задачи), соответствующей дифференциально-разностной системе (7), (8), существенно опирается на результаты теорем 2 и 3.

## Дифференциальная система

Предварительно введем пространство состояний  $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathcal{J}_T)$  дифференциальной системы и вспомогательное пространство  $\tilde{W}_0^1(\mathcal{J}_T)$ ,  $\mathcal{J}_T = \mathcal{J} \times (0, T)$ ,  $T < \infty$ .

**Определение 4.** Пространство  $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathcal{J}_T)$  — замыкание в норме

$$\|y\|_{\mathcal{J}_T}^{1,0} = \left( \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{J}_k \times (0, T)} \left( y^2 + \sum_{i=1}^n y_{x_i}^2 \right) dx dt \right)^{1/2},$$

совокупности функций  $y(x, t)$  из  $L_2(\mathcal{J})$ , следы которых  $y(x, t_0) \in \tilde{W}_0^1(\mathcal{J})$ ,  $t_0 \in (0, T)$ , непрерывно зависят от  $t_0$  в норме  $\tilde{W}_2^1(\mathcal{J})$ .

**Определение 5.** Если в определении 4 норму  $\|y\|_{\mathcal{J}_T}^{1,0}$  заменить на норму

$$\|y\|_{\mathcal{J}_T}^1 = \left( \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{J}_k \times (0, T)} \left( y^2 + y_t^2 + \sum_{i=1}^n y_{x_i}^2 \right) dx dt \right)^{1/2},$$

то тем самым определим пространство  $\tilde{W}_0^1(\mathcal{J}_T)$ ;  $\tilde{W}_0^1(\mathcal{J}_T) \subset \tilde{W}_0^{1,0}(\mathcal{J}_T)$ .

В пространстве  $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathcal{J}_T)$ , учитывая условия (9), (10), будем искать решение  $y(x, t)$  дифференциальной системы (начально-краевой задачи):

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( a_{k1}(x) \frac{\partial y}{\partial x_1} \right) + b(x)y = f(x, t), \quad (17)$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad (18)$$

$$y|_{x \in \partial \Gamma_T} = 0, \quad (19)$$

где  $f(x, t) \in L_{2,1}(\mathcal{J}_T)$ .

Элементы  $u(x, t) \in L_{2,1}(\mathcal{J}_T)$  принадлежат

$$L_1(\mathcal{J}_T), \quad \|u\|_{2,1,\mathcal{J}_T} = \int_0^T \left( \int_{\mathcal{J}} u^2(x, t) dx \right)^{1/2} dt;$$

функции  $f(x; k)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) из (7) являются усреднениями  $f(x, t)$  в точках  $t = k\tau$  сетки  $\{k\tau, k = 1, K\}$ :

$$f(x; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x, t) dt \in L_2(\mathcal{J}), \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

**Определение 6.** Функция  $y(x, t) \in \tilde{W}_0^{1,0}(\mathcal{J}_T)$  называется слабым решением дифференциальной системы (17)–(19), если справедливо соотношение (интегральное тождество)

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{J}_T} y(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_T(y, \eta) = \\ & = \int_{\mathcal{J}} \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\mathcal{J}_T} f(x, t) \eta(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

при любой  $\eta(x, t) \in \tilde{W}_0^1(\mathcal{J}_T)$ ,  $\eta(x, T) = 0$ ,

$$\ell_T(y, \eta) = \int_{\mathcal{J}_T} \left( \sum_{k,i=1}^n a_{k1}(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x_1} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x_k} + b(x)y(x, t)\eta(x, t) \right) dx dt.$$

**Теорема 4.** Если выполнены условия (9), (10), то дифференциальная система (17)–(19) слабо разрешима в  $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathcal{J}_T)$ .

**Доказательство.** Очевидно, что дифференциально-разностная система (7), (8) является разностным аналогом дифференциальной системы (17)–(19), поэтому далее будут использованы решения системы (7), (8). Введем функцию  $y_K(x, t): y_K(x, t) = y(k), t \in ((k-1)\tau, k\tau], k = 1, 2, \dots, K, y_K(x, t) \in \tilde{W}_0^{1,0}(\mathcal{J}_T)$ , которая удовлетворяет неравенствам (11), (12) и, как следствие, имеет место неравенство

$$\|y_K\|_{\mathcal{J}_T} + \left\| \frac{\partial y_K}{\partial x} \right\|_{\mathcal{J}_T} \leq C^* \tag{20}$$

с независимой от  $\tau$  постоянной  $C^* > 0$ ,

$$\left\| \frac{\partial y_K}{\partial x} \right\|_{\mathcal{J}_T} = \left( \int_{\mathcal{J}_T} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y_K(x, t)}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Учитывая (20), из последовательности  $\{y_K(x, t)\}$  выделим подпоследовательность  $\{\tilde{y}_K(x, t)\}$ , которая будет слабо сходиться к  $y(x, t) \in \tilde{W}_0^{1,0}(\mathcal{J}_T)$ .

Покажем, что  $y(x, t)$  удовлетворяет тождеству определения б. Для этого  $f(x, t)$  представим в виде, подобном виду  $y_K(x, t): f_K(x, t) = f(x, k), t \in ((k-1)\tau, k\tau] (k = 1, 2, \dots, K)$ . Произвольные функции  $\eta(x, t)$  можно взять из пространства  $C^1(\mathcal{J}_{T+\tau})$  с условиями  $\eta|_{\partial\mathcal{J}_T} = 0, \eta|_{t \in [T, T+\tau]} = 0$ . По этим  $\eta(x, t)$  строятся  $\eta(k): \eta(k) = \eta(x, k\tau), k = 1, 2, \dots, K$ , и функции  $\eta_K(x, k) = \eta(k), t \in ((k-1)\tau, k\tau] (k = 1, 2, \dots, K)$ . Ясно, что  $\eta_K(x, t) \in \tilde{W}_0^1(\mathcal{J}_T)$ .

По  $\eta_K(x, t)$  строятся кусочно-непрерывные по  $t$  функции

$$\frac{\partial \eta_K(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial \eta_K(x, t)}{\partial t},$$

которые, как легко видеть, вместе с  $\eta_K(x, t)$  при  $K \rightarrow \infty$  сходятся к

$$\eta(x, t), \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t}$$

равномерно в  $\mathcal{J}_T$ .

Доказательство теоремы завершается заменой в тождестве определения б  $y(x, t), f(x, t), \eta(x, t)$  на  $y_K(x, t), f_K(x, t), \eta_K(x, t)$  с последующим переходом в этом тождестве к пределу по подпоследовательности  $\{\tilde{y}_K(x, t)\}$  (см. также [Ладыженская, 1973, с. 189]).

**Пример: линеаризованная система Навье — Стокса**

В качестве иллюстрации используемого подхода и результатов теорем 2 и 3 для вектор-функции

$$Y(x, t) = \{y_1(x, t), y_2(x, t), y_3(x, t)\},$$

$$x, t \in \mathcal{J}_T = \mathcal{J} \times (0, T),$$

$$\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^3 \left( \mathcal{J} = \bigcup_{l=1}^N \mathcal{J}_l \right), \quad x = \{x_1, x_2, x_3\},$$

рассмотрим линеаризованную систему Навье — Стокса (используются общепринятые в литературе обозначения, см. например, [Лионс, 1972а, с. 383] и библиографию там):

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \Delta Y + \text{grad } p = F(x, t), \quad (21)$$

$$\text{div} Y = 0 \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0 \right). \quad (22)$$

Условия примыкания подобластей  $\mathcal{J}_l, l = \overline{1, N}$ , между собой во всех узловых местах  $\omega_j, j = \overline{1, M}$ , описываются соотношениями

$$Y(x, t)|_{x \in S_{\mu} \subset S_j \subset \partial \mathcal{J}_l} = Y(x, t)|_{x \in S_{\mu} \subset \partial \mathcal{J}_l}, \quad s = \overline{2, m_j}, \quad (23)$$

$$\int_{S_j} \frac{\partial Y(x, t)}{\partial \bar{n}_j} dS + \sum_{s=2}^{m_j} \int_{S_{j_s}} \frac{\partial Y(x, t)}{\partial \bar{n}_{j_s}} dS = 0 \quad (24)$$

на поверхностях примыкания  $S_j$  и  $S_{j_s}, s = \overline{2, m_j}, j = \overline{1, M}$ , для произвольного  $t \in (0, T)$  (см. аналогичные условия (6) и пояснения для поверхностей  $S_j, S_{j_s}$ , приведенные в разделе 2);

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2},$$

через  $\bar{n}_j$  и  $\bar{n}_{j_s}$  обозначены внешние нормали к  $S_j$  и  $S_{j_s}, s = \overline{2, m_j}, j = \overline{1, M}, F(x, t) = \{F_1(x, t), F_2(x, t), F_3(x, t)\}$ .

Начальные и граничные условия

$$Y(x, t)|_{t=0} = Y_0(x), \quad x \in \mathcal{J}, \quad (25)$$

$$Y(x, t)|_{x \in \partial \mathcal{J}} = 0 \quad (26)$$

вместе с соотношениями (21)–(24) определяют начально-краевую задачу (21)–(26) для функций  $Y(x, t), p(x, t)$  (везде ниже дифференциальная система (21)–(26)) в замкнутой области  $\bar{\mathcal{J}}_T$ :

$$\bar{\mathcal{J}}_T = (\mathcal{J} \cup \partial \mathcal{J}) \times [0, T].$$

При математическом описании процессов транспортировки вязких жидкостей по сетевой или магистральной гидросистеме область  $\mathcal{J}$  является ограниченной областью евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  и определяет модель сетеподобного носителя гидравлического потока. Вектор скоростей гидравлического потока характеризуется функцией  $Y(x, t)$  эволюционной системы Навье — Стокса (21)–(24), моделирующей течение жидкости с вязкостью  $\nu > 0$  по сетеподобному носителю под влиянием внешних воздействий  $F(x, t)$ , при этом соотношения (23), (24) определяют свойства потоков жидкости при протекании ее по местам ветвления носителя (аналогичные условия приведены в работах [Artemov и др., 2019; Provotorov, Provotorova, 2017]). Функцией  $p(x, t)$  характеризуется давление в гидросистеме (во многих задачах прикладного характера задана; везде ниже считается принадлежащей классу непрерывных в  $\bar{\mathcal{J}}_T$  функций).

Анализ разрешимости дифференциальной системы (21)–(26) базируется на исследовании дифференциально-разностной системы вида:

$$\frac{1}{\tau}[Y(k)-Y(k-1)]-\nu\Delta Y(k)=F_{\tau}(k)-\operatorname{grad} p_{\tau}(k), \tag{27}$$

$$\operatorname{div} Y(k)=0, \quad k=1, 2, \dots, K, \quad Y(0)=Y_0(x),$$

$$Y(k)|_{x \in \partial \mathcal{J}}=0, \quad k=1, 2, \dots, K. \tag{28}$$

Использованы обозначения, аналогичные для систем (7), (8) и (17)–(19):

$$Y(k):=Y(x; k),$$

$$Y(k)_t := \frac{1}{\tau}[Y(k)-Y(k-1)],$$

$$F_{\tau}(k):=F_{\tau}(x; k)=\frac{1}{\tau} \int_{\tau(k-1)}^{k\tau} F(x, t) dt,$$

$$p(k):=p(x, k\tau),$$

$$k=1, 2, \dots, K.$$

Для анализа системы (27), (28) введем необходимые пространства, аналогичные выше использованным пространствам  $L_2(\mathcal{J})$ ,  $\tilde{W}_0^1(\mathcal{J})$ . Обозначим через  $L_2(\mathcal{J})^3$  лебегово пространство действительных вектор-функций

$$u(x)=\{u_1(x), u_2(x), u_3(x)\}, \quad x=(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

со скалярным произведением и нормой

$$(u, v) = \int_{\mathcal{J}} u(x)v(x) dx, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)} \text{ соответственно.}$$

Пусть  $D(\mathcal{J})^3$  — множество бесконечно дифференцируемых функций  $u(x)$  с компактными носителями в  $\mathcal{J}$ , для которых  $\operatorname{div} u = 0$ :  $\mathfrak{D}(\mathcal{J})^3 = \{u: u \in D(\mathcal{J})^3, \operatorname{div} u = 0\}$ , и пространство  $\mathcal{H}(\mathcal{J})^3$  — замыкание  $\mathfrak{D}(\mathcal{J})^3$  в  $L_2(\mathcal{J})^3$ . Пространство  $\mathcal{H}^1(\mathcal{J})^3$  определяется функциями  $u(x) \in \mathcal{H}(\mathcal{J})^3$ , имеющими обобщенные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} \in L_2(\mathcal{J})^3.$$

Скалярное произведение и норма в  $\mathcal{H}^1(\mathcal{J})$  определены соотношениями

$$(u, v)_1 = (u, v) + \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)_1} \text{ соответственно.}$$

Замыкание в  $\mathcal{H}^1(\mathcal{J})$  множества всех функций  $u \in D(\mathcal{J})^3$ , удовлетворяющих условиям

$$\int_{S_j} \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{n}_j} dS + \sum_{s=2}^{m_j} \int_{S_{js}} \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{n}_{js}} dS = 0$$

на поверхностях примыкания  $S_j$  и  $S_{js} \subset \partial \mathcal{J}_j$  ( $s = \overline{2, m_j}$ ) всех узловых мест  $\omega_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ), назовем пространством  $V_0^1(\mathcal{J})$ .

**Определение 7.** Совокупность  $\{Y(k) \in V_0^1(\mathcal{J}), k = 1, 2, \dots, K\}$ , для которой при каждом фиксированном  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, K - 1$ ) функция  $Y(k)$  удовлетворяет тождеству

$$\frac{1}{\tau}(Y(k)_t, \eta) + \nu \rho(Y(k), \eta) = (F_\tau(k), \eta), Y(0) = Y_0(x), \quad (29)$$

с произвольными элементами  $\eta(x)$  пространства  $V_0^1(\mathcal{J})$ , называется слабым решением дифференциально-разностной системы (27), (28). Здесь

$$\rho(Y(k), \eta) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathcal{J}} \frac{\partial Y_j(k)}{\partial x_i} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} dx.$$

Ниже представлены априорные оценки слабых решений дифференциально-разностной системы (27), (28), которые используются при получении условий слабой разрешимости системы (21)–(26). В основу анализа положен подход, отличающийся от представленного при доказательстве теоремы 2. А именно: используется метод Галеркина для представления функций  $Y(k) \in V_0^1(\mathcal{J}), k = 1, 2, \dots, K$ , в виде разложений по базису пространства  $V_0^1(\mathcal{J})$ , каковым является система обобщенных собственных функций  $\{U_i(x)\}_{i \geq 1}$  оператора

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2}.$$

Обобщенные собственные функции  $U(x) \in V_0^1(\mathcal{J})$  определяются спектральной задачей  $-\nu \Delta U = \lambda U, U|_{\partial \mathcal{D}} = 0$ , в слабой постановке, т. е. удовлетворяют интегральному тождеству

$$\nu \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) = \lambda(U, \eta)$$

при любой функции  $\eta(x) \in V_0^1(\mathcal{J})$  ( $\lambda$  — собственное значение, соответствующее обобщенной собственной функции  $U(x)$ ).

Определим приближения  $Y_m(k)$  для функций  $Y(k), k = 1, 2, \dots, K$ , слабого решения дифференциально-разностной системы (27), (28) в виде

$$Y_m(k) = \sum_{i=1}^m g_{im}^k U_i(x)$$

и, учитывая соотношение (29), рассмотрим систему

$$\frac{1}{\tau}(Y_m(k)_t, U_i) + \nu \rho(Y_m(k), U_i) = (F_\tau(k), U_i), \quad (30)$$

$$k = 1, 2, \dots, K, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (31)$$

$$Y_m(0) = Y_{0m}(x),$$

где  $Y_{0m}(x) = \sum_{i=1}^m g_{im}^0 U_i(x)$  ( $g_{im}^0$  — const),  $Y_{0m}(x) \rightarrow Y_0(x)$  в норме  $V_0^1(\mathcal{J})$ .

**Теорема 5.** Пусть  $Y_0(x) \in V_0^1(\mathcal{J})$ ,  $F_\tau(k) \in L_2(\mathcal{J})^n$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ). Для функций  $Y_m(K)$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , системы (30), (31) справедливы оценки:

$$1) \|Y_m(k)\| \leq \|Y_m(0)\| + 2\|F_\tau(k)\|'_{2,1}, \quad k = 1, 2, \dots, K;$$

$$2) \|Y_m(k)\|^2 + 2\tau\nu \sum_{k'=1}^k \left\| \frac{\partial Y_m(k')}{\partial x} \right\|^2 \leq C \left( \|Y_0\|^2 + \left( \|F_\tau(k)\|'_{2,1} \right)^2 \right), \quad k = 1, 2, \dots, K, \text{ с постоянной } C, \text{ не зависящей от } \tau;$$

$$\|F_\tau(k)\|'_{2,1} = \sum_{k'=1}^k \tau \|F_\tau(k')\|.$$

**Доказательство.** Аналогично рассуждениям, приведенным при доказательстве теоремы 2, учитывая соотношение  $2\tau(Y(k), Y(k)_t) = Y^2(k) + \tau^2 Y(k)_t^2 - Y^2(k-1)$ , умножим (30) на  $2\tau g_{i,m}^k$  и результат просуммируем по  $i$  от 1 до  $m$ . Получим

$$Y_m^2(k) - Y_m^2(k-1) + \tau^2 Y_m^2(k)_t + 2\tau\nu\rho(Y_m(k), Y_m(k)) = 2\tau(F_\tau(k), Y_m(k)),$$

$$k = 1, 2, \dots, K,$$

откуда вытекают неравенства

$$\|Y_m(k)\|^2 - \|Y_m(k-1)\|^2 + \tau^2 \|Y_m(k)_t\|^2 + 2\tau\nu \left\| \frac{\partial Y_m(k)}{\partial x} \right\|^2 \leq 2\tau \|F_\tau(k)\| \|Y_m(k)\|, \quad k = 1, 2, \dots, K, \tag{32}$$

а значит,

$$\|Y_m(k)\|^2 - \|Y_m(k-1)\|^2 \leq 2\tau \|F_\tau(k)\| \|Y_m(k)\|, \quad k = 1, 2, \dots, K. \tag{33}$$

Предположим, что  $\|Y_m(k)\| + \|Y_m(k-1)\| > 0$ , тогда разделив соотношение (33) на  $\|Y_m(k)\| + \|Y_m(k-1)\|$ , приходим к неравенствам

$$\|Y_m(k)\| - \|Y_m(k-1)\| \leq 2\tau \|F_\tau(k)\|, \quad k = 1, 2, \dots, K, \tag{34}$$

учитывая

$$\frac{\|Y_m(k)\|}{\|Y_m(k)\| + \|Y_m(k-1)\|} \leq 1.$$

В случае если  $\|Y_m(k)\| + \|Y_m(k-1)\| = 0$ , тогда из (33) получаем

$$0 \leq 2\tau \|F_\tau(k)\| \|Y_m(k)\|,$$

$$\|Y_m(k)\|^2 - \|Y_m(k-1)\|^2 \leq 2\tau \|F_\tau(k)\| \|Y_m(k)\|, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

что снова приводит к (34).

Суммируя (34) по  $k'$  от 1 до  $k$ , окончательно получим

$$\|Y_m(k)\| \leq \|Y_m(0)\| + 2 \sum_{k'=1}^k \tau \|F_\tau(k')\| = \|Y_0\| + 2\|F_\tau(k)\|'_{2,1},$$

$$k = 1, 2, \dots, K, \tag{35}$$

а значит, первое утверждение теоремы с учетом представления:

$$\|F_\tau(k)\|'_{2,1} = \sum_{k'=1}^k \tau \|F_\tau(k')\|.$$

Второе утверждение теоремы получим, если, используя (35), суммировать неравенства (32) по  $k'$  от 1 до  $k$ :

$$\begin{aligned} \|Y_m(k)\|^2 + 2\tau\nu \sum_{k'=1}^k \left\| \frac{\partial Y_m(k')}{\partial x} \right\|^2 &\leq \|Y_m(k)\|^2 + \tau^2 \sum_{k'=1}^k \|Y_m(k)_t\|^2 + \\ + 2\tau\nu \sum_{k'=1}^k \left\| \frac{\partial Y_m(k')}{\partial x} \right\| &\leq C \left( \|Y_0\|^2 + (\|F_\tau(k)\|'_{2,1})^2 \right), \quad k=1, 2, \dots, K, \end{aligned} \quad (36)$$

где не зависящая от  $\tau$  постоянная  $C$  зависит только от  $\nu$  и  $T$ .

Покажем, что оценки (35), (36) определяют условия разрешимости дифференциальной системы (21)–(26).

Пусть исходные данные  $Y_0(x)$ ,  $F(x, t)$  системы (21)–(26) принадлежат пространствам  $V_0^1(\mathcal{J})$ ,  $L_{2,1}(\mathcal{J}_T)^3$  соответственно. Элементы  $u \in L_{2,1}(\mathcal{J}_T)^3$  принадлежат  $L_1(\mathcal{J}_T)^3$ , при этом норма в  $L_{2,1}(\mathcal{J}_T)^3$  определяется формулой

$$\|u\|_{2,1} = \int_0^T \left( \int_{\mathcal{J}} \|u\|^2 dx \right)^{1/2} dt,$$

что означает принадлежность  $F_\tau(k)$  пространству  $L_2(\mathcal{J})^3$ .

Через  $W^{1,0}(\mathcal{J}_T)$  обозначим пространство, элементы которого  $u(x, t)$  и их обобщенные производные  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$  принадлежат

$$L_2(\mathcal{J}_T)^3, \quad \|u\|_{W^{1,0}(\mathcal{J}_T)} = \left( \|u\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть далее  $W^1(\mathcal{J}_T)$  — пространство, элементы которого  $u(x, t)$  и  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$  принадлежат

$$L_2(\mathcal{J}_T)^3, \quad \|u\|_{W^1(\mathcal{J}_T)} = \left( \|u\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Пространства  $W^{1,0}(\mathcal{J}_T)$  и  $W^1(\mathcal{J}_T)$  обладают следующими общими свойствами:

- 1) их элементы непрерывны по  $t$  в норме  $L_2(\mathcal{J})^3$ ;
- 2) следы их элементов на сечениях  $\mathcal{J}_T$  плоскостями  $t = t_0 \in (0, T)$  принадлежат  $L_2(\mathcal{J})^3$ .

Введем множества  $\Omega_1(\mathcal{J}_T) \subset W^{1,0}(\mathcal{J}_T)$  и  $\Omega_2(\mathcal{J}_T) \subset W^1(\mathcal{J}_T)$ , элементы которых принадлежат  $V_0^1(\mathcal{J})$  при фиксированном  $t \in (0, T)$ . Замыкания  $\Omega_1(\mathcal{J}_T)$  в  $W^{1,0}(\mathcal{J}_T)$  и  $\Omega_2(\mathcal{J}_T)$  в  $W^1(\mathcal{J}_T)$  обозначим через  $W_0^{1,0}(\mathcal{J}_T)$  и  $W_0^1(\mathcal{J}_T)$ .

**Определение 8.** Пара

$$\{Y(x, t), p(x, t): Y(x, t) \in W_0^{1,0}(\mathcal{J}_T), p(x, t) \in C(\mathcal{J}_T)\}$$

называется слабым решением дифференциальной системы Навье — Стокса (21)–(26), если для функции  $Y(x, t)$  справедливо тождество

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{J}_T} Y(x, \tau) \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau + \nu \int_0^T \rho(Y, \eta) d\tau = \\ & = (Y_0(x), \eta(x, 0)) + \int_{\mathcal{J}_T} F(x, \tau) \eta(x, \tau) dx d\tau \end{aligned} \tag{37}$$

при любой функции  $\eta(x, t)$  из  $W_0^1(\mathcal{J}_T)$ , причем  $\eta(x, T) = 0$ .

**Замечание 2.** Из определения 2 следует, что отыскание решения  $Y(x, t)$  системы (21)–(26) является первичным, для функции  $p(x, t)$  достаточно знать принадлежность ее классу  $C(\mathcal{J}_T)$ . Отметим также, что во многих прикладных задачах  $p(x, t)$  считается известной.

**Теорема 6.** Пусть  $Y_0(x) \in V_0^1(\mathcal{J})$ ,  $F(x, t) \in L_{2,1}(\mathcal{J}_T)^n$ . Эволюционная система Навье — Стокса (21)–(24) с условиями (25), (26) (т. е. начально-краевая задача (21)–(26)) слабо разрешима в пространстве  $W_0^{1,0}(\mathcal{J}_T)$ .

**Доказательство.** Используя приближения

$$Y_m(k) = \sum_{i=1}^m g_{i,m}^k U_i(x)$$

для функций  $Y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , введем функцию  $Y_K(x, t)$  вида  $Y_K(x, t) = Y_m(k)$ ,  $t \in ((k-1)\tau, k\tau]$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ ,  $Y_K(x, 0) = Y_0(x)$ . Ясно, что  $Y_K(x, t)$  принадлежит пространству  $W_0^{1,0}(\mathcal{J}_T)$ . Для функции  $Y_K(x, t)$  справедливы утверждения теоремы 3 (неравенства (35), (36)) и, следовательно, неравенство

$$\|Y_K\| + \left\| \frac{\partial Y_K}{\partial x} \right\| \leq C^* \tag{38}$$

с не зависящей от  $\tau$  постоянной  $C^* > 0$ . Аналогично  $Y_K(x, t)$  введем функцию  $F_K(x, t)$ , используя  $F_\tau(k) = F_\tau(x; k): F_K(x, t) = F_\tau(x; k)$ ,  $t \in ((k-1)\tau, k\tau]$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ . При  $K \rightarrow \infty$  ( $\tau \rightarrow 0$ ) получим последовательность  $\{Y_K(x, t)\}$ , из которой при учете (38) можно выделить подпоследовательность  $\{\tilde{Y}_K(x, t)\}$ , слабо сходящуюся к  $Y(x, t) \in W_0^{1,0}(\mathcal{J}_T)$ .

Остается показать, что  $Y(x, t)$  является слабым решением системы (21)–(26), для чего достаточно установить, что  $Y(x, t)$  удовлетворяет тождеству (37) для любой дифференцируемой на  $\mathcal{J}$  функции  $\eta(x, t)$ , которая удовлетворяет соотношениям

$$\int_{S_j} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial \bar{n}_j} dS + \sum_{s=2}^{m_j} \int_{S_{j_s}} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial \bar{n}_{j_s}} dS = 0$$

на поверхностях примыкания  $S_j = S_{j1} = \bigcup_{s=2}^{m_j} S_{j_s}$  и  $S_{j_s} \subset \partial \mathcal{J}_{j_s}$  ( $s = \overline{2, m_j}$ ) всех узловых мест

$\omega_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) при любых  $t \in (0, T)$  и условиях  $\eta|_{\partial \mathcal{J}_T} = 0$ ,  $\eta|_{t \in [T, T+\tau]} = 0$ .

По  $\eta(x, t)$  осуществляется построение функций

$$\eta(k) := \eta(x, k\tau), \quad \eta(k)_t := \frac{1}{\tau} [\eta(k+1) - \eta(k)], \quad k = 1, 2, \dots, K;$$

$\eta(K)_t = 0$ , т. к.  $\eta(K+1) = \eta(K) = 0$ . Затем, как и выше, строятся функции  $\eta_K(x, t)$ ,  $\eta_K(x, t)_t$ . Ясно, что

$$\eta_K(x, t), \quad \frac{\partial \eta_K(x, t)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \eta_K(x, t)_t}{\partial x_i}$$

равномерно сходятся к

$$\eta(x, t), \quad \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t}$$

при  $K \rightarrow \infty$  соответственно, и  $\eta_K(x, t)|_{t \in [T, T+\tau]} = 0$ .

Положим в интегральном тождестве (37)  $\eta(x) = \tau\eta(x) = \tau\eta(x; k)$  и просуммируем его по  $k$  от 1 до  $N$ . Получим

$$\begin{aligned} & -\tau \sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{J}} (Y(k)\eta k)_t dx dt - \int_{\mathfrak{J}} Y_0 \eta(1) dx + \\ & + \nu \sum_{k=1}^N \tau \rho(Y(k), \eta(k)) = \sum_{k=1}^N \tau \int_{\mathfrak{J}} F_\tau(k) \eta(k), \end{aligned} \quad (39)$$

учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \tau \sum_{k=1}^N Y(k)_t \eta(k) &= -\tau \sum_{k=1}^N Y(k) \eta(k)_t - Y(0) \eta(1), \\ \eta(N) &= \eta(N+1) = 0. \end{aligned}$$

Из соотношения (39) непосредственно следует

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathfrak{J}_T} Y_K(x, t) \eta_K(x, t)_t dx dt - \int_{\mathfrak{J}} Y_0(x, t) \eta(x, \tau) dx + \nu \int_0^T \rho(Y_K, \eta_K) dt = \\ & = \int_{\mathfrak{J}_T} F(x, t) \eta_K(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (40)$$

Переходя в (40) к пределу по подпоследовательности  $\{Y_K(x, t)\}$ , учитывая при этом непрерывность формы  $\rho(Y_K, \eta_K)$  по своим переменным, получим тождество (37) определения 8 слабого решения дифференциальной системы (21)–(26). Теорема доказана.

## Заключение

Представлены условия на исходные данные дифференциально-разностной системы (7), (8), при выполнении которых имеют место оценки норм слабого решения этой системы. Полезность таких оценок заключается в использовании их при доказательстве теоремы существования решения дифференциально-разностной системы (7), (8), формировании условий

единственности этого решения, а также условий, гарантирующих непрерывную зависимость решения от априорных данных системы. Важным результатом наличия априорных оценок является использование их при получении условий разрешимости начально-краевой задачи для параболической системы (17)–(19), а также разрешимости эволюционной системы Навье — Стокса (21)–(26). Тем самым получено обоснование метода полудискретизации [Ладыженская, 1973, с. 189] для указанных систем в классе суммируемых в сетеподобной области  $\mathcal{T}$  функций. Использование этого метода дает возможность построения эффективных алгоритмов отыскания приближений к слабым решениям эволюционных систем, описывающих математические модели процессов переноса многофазных сплошных сред в сетевых и магистральных носителях. Полученные результаты найдут свое место при анализе задач управления (оптимального управления) [Provotorov и др., 2021], стабилизации и устойчивости [Веремей, Сотникова, 2011; Aleksandrov, Zhabko, 2003; Kamachkin и др., 2020] дифференциальных систем, аналогичных (7), (8), (17)–(19), (21)–(26).

## Список литературы

- Веремей Е. И., Сотникова М. В. 2011. Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. № 1. С. 116–133.
- Ладыженская О. А. 1973. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 407 с.
- Лионс Ж.-Л. 1972а. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир. 414 с.
- Лионс Ж.-Л. 1972б. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир. 587 с.
- Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. 2003. On stability of solutions to one class of nonlinear difference systems // Siberian Mathematical Journal. Vol. 44. No. 6. Pp. 951–958. <https://doi.org/10.1023/B:SIMJ.0000007470.46246.bd>
- Artemov M. A., Baranovskii E. S. 2019. Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions // Mathematics. Vol. 7. No. 7. Article 611. <https://doi.org/10.3390/math7070611>
- Artemov M. A., Baranovskii E. S., Zhabko A. P., Provotorov V. V. 2019. On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1203. Article 012094. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012094>
- Baranovskii E. S. 2016. Mixed initial-boundary value problem for equations of motion of Kelvin–Voigt fluids // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 56. No. 7. Pp. 1363–1371. <https://doi.org/10.1134/S0965542516070058>
- Baranovskii E. S. 2019. Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip // Communications on Pure and Applied Analysis. Vol. 18. No. 2. Pp. 735–750. <https://doi.org/10.3934/cpaa.2019036>
- Baranovskii E. S., Provotorov V. V., Artemov M. A., Zhabko A. P. 2021. Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: Existence results // Symmetry. Vol. 13. Article 1300. <https://doi.org/10.3390/sym13071300>
- Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafiyeva V. V. 2020. Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // International Journal of Control. Vol. 93. No. 4. Pp. 763–770. <https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1562221>

- Provotorov V. V., Provotorova E. N. 2017. Optimal control of the linearized Navier–Stokes system in a netlike domain // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. Vol. 13. No. 4. Pp. 431–443. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.409>
- Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N. 2021. Point control of a differential-difference system with distributed parameters on the graph // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. Vol. 17. No. 3. Pp. 277–286. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.305>

## References

- Veremey, E. I., & Sotnikova, M. V. (2011). Plasma stabilization on the base of model predictive control with the linear closed-loop system stability. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, (1), 116–133. [In Russian]
- Ladyzhenskaya, O. A. (1973). *Boundary value problems of mathematical physics*. Science. [In Russian]
- Lyons, J. L. (1972a). *Optimal control of systems described by partial differential equations*. Mir. [In Russian]
- Lyons, J. L. (1972b). *Some methods for solving nonlinear boundary value problems*. Mir. [In Russian]
- Aleksandrov, A. Yu., & Zhabko, A. P. (2003). On stability of solutions to one class of nonlinear difference systems. *Siberian Mathematical Journal*, 44(6), 951–958. <https://doi.org/10.1023/B:SIMJ.0000007470.46246.bd>
- Artemov, M. A., & Baranovskii, E. S. (2019). Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions. *Mathematics*, 7(7), Article 611. <https://doi.org/10.3390/math7070611>
- Artemov, M. A., Baranovskii, E. S., Zhabko, A. P., & Provotorov, V. V. (2019). On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network. *Journal of Physics: Conference Series*, 1203, Article 012094. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012094>
- Baranovskii, E. S. (2016). Mixed initial-boundary value problem for equations of motion of Kelvin–Voigt fluids. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 56(7), 1363–1371. <https://doi.org/10.1134/S0965542516070058>
- Baranovskii, E. S. (2019). Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 18(2), 735–750. <https://doi.org/10.3934/cpaa.2019036>
- Baranovskii, E. S., Provotorov, V. V., Artemov, M. A., & Zhabko, A. P. (2021). Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: Existence results. *Symmetry*, 13, Article 1300. <https://doi.org/10.3390/sym13071300>
- Kamachkin, A. M., Potapov, D. K., & Yevstafyeva, V. V. (2020). Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay. *International Journal of Control*, 93(4), 763–770. <https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1562221>
- Provotorov, V. V., & Provotorova, E. N. (2017). Optimal control of the linearized Navier–Stokes system in a netlike domain. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 13(4), 431–443. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.409>
- Provotorov, V. V., Sergeev, S. M., & Hoang, V. N. (2021). Point control of a differential-difference system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 17(3), 277–286. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.305>

## Информация об авторах

*Ван Нгуен Хоанг*, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия  
fadded9x@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6970-2770>

*Вячеслав Васильевич Провоторов*, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия  
wwprov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8761-7174>

## Information about the authors

*Van Nguyen Hoang*, Postgraduate Student, Department of Partial Differential Equations and Probability Theory, Voronezh State University, Voronezh, Russia  
fadded9x@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6970-2770>

*Vyacheslav V. Provotorov*, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Professor of the Department of Partial Differential Equations and Probability Theory, Voronezh State University, Voronezh, Russia  
wwprov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8761-7174>

## Композиционное строение магниевого шарового элемента клапана для буровой скважины

Юрий Николаевич Логинов<sup>1, 2</sup>, Юлия Валентиновна Замараева<sup>2, 3</sup>✉

<sup>1</sup> Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup> Институт физики металлов им. М. Н. Михеева УрО РАН, Екатеринбург, Россия

<sup>3</sup> Каменск-Уральский металлургический завод, Каменск-Уральский, Россия  
Контакт для переписки: zamaraeva@imp.uran.ru ✉

**Аннотация.** В нефтяной промышленности шары применяются в процессе гидравлического разрыва пласта (ГРП). Материалом, удовлетворяющим основным требованиям к шарам для ГРП, является магний. Растворимые магниевые шары предназначены для активации муфт ГРП. При достижении седла муфты, во время прокачки жидкости ГРП, шар временно перекрывает проходное сечение внутри колонны-хвостовика, что обеспечивает возможность для создания избыточного давления и открытия окон муфты ГРП. Однако поскольку магний обладает малой плотностью, то в бурильных растворах, имеющих высокую плотность, возможен негерметичный контакт шара с седлом клапана вследствие недостаточной силы гравитации. Это может привести к утечкам рабочей жидкости. Цель работы — создание и исследование способа изготовления шара, нацеленного на его утяжеление.

Описан разработанный способ изготовления двухслойного шарового элемента клапана методом штамповки. Двухслойный шар состоит из магниевой оболочки, в которую помещен стальной шар. В магниевый цилиндрический стакан с дном опускается стальной шар, стакан закрывается крышкой из магния. Полученную композиционную сборку деформируют, подвергая сжатию двумя пуансонами с торцами в виде полусфер до плотного смыкания торцов цилиндрического стакана. В качестве варианта исполнения оболочки шара предложен магний марки Mg90. Теоретически установлено, что масса биметаллического шара в 2,74 раза больше магниевого шара. Смоделирована штамповка композиционной заготовки с целью установить возможность получения

шара по предложенному способу. Рассмотрено напряженно-деформированное состояние композиционной заготовки в процессе формоизменения. Успешное компьютерное моделирование процесса дает основание рекомендовать предложенный способ для осуществления в условиях реального эксперимента. Также установлено наименьшее значение соотношения толщины стенки цилиндра к его высоте, обеспечивающее сохранение устойчивости стенки цилиндра в процессе деформации.

**Ключевые слова:** скважина, растворяющийся металл, шаровой клапан, магний, напряжения, деформации, метод конечных элементов

**Благодарности:** работа выполнена в рамках государственного задания по теме «Давление» (№ АААА-А18-118020190104-3).

**Цитирование:** Логинов Ю. Н., Замараева Ю. В. 2023. Композиционное строение магниевое шарового элемента клапана для буровой скважины // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 1 (33). С. 139–152. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-139-152>

Поступила 22.11.2022; одобрена 20.03.2023; принята 31.03.2023

## Composite structure of the magnesium ball valve element for a drilling well

Yuriy N. Loginov<sup>1,2</sup>, Yuliya V. Zamaraeva<sup>2,3</sup>✉

<sup>1</sup> Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia

<sup>2</sup> M. N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia

<sup>3</sup> Kamensk-Uralsky Metallurgical Works, Kamensk-Uralsky, Russia  
Corresponding author: zamaraeva@imp.uran.ru✉

**Abstract.** In the oil industry, balls are used in the process of hydraulic fracturing (HF). The material that meets the basic requirements for HF balls is magnesium. Soluble magnesium balls are designed to activate HF couplings. When the coupling seat is reached, during the pumping of HF fluid, the ball temporarily blocks the passage section inside the shank column, which makes it possible to create excess pressure and open the windows of the HF coupling. However, since magnesium has a low density, in drilling fluids with a high density, leaky contact of the ball with the valve seat is possible due to insufficient gravity. This may lead to leakage of the working

fluid. The purpose of the work is to create and study a method of manufacturing a ball aimed at weighing it down.

The developed method of manufacturing a two-layer ball valve element by stamping is described. The two-layer ball consists of a magnesium shell, inside which a steel ball is placed. A steel ball is placed in a magnesium cylindrical glass with a bottom, the glass is closed with a magnesium lid. The resulting composite assembly is deformed by being compressed with two punches with ends in the form of hemispheres until the ends of the cylindrical cup are tightly closed. As a variant, the shell of the ball is proposed to be made of Mg90 grade magnesium. It is theoretically established that the mass of a bimetallic ball is 2.74 times larger than a magnesium ball. Modeling of stamping of a composite billet is performed in order to establish the possibility of obtaining a ball according to the proposed method. The stress-strain state of a composite billet in the process of shaping is considered. Successful computer simulation of the process gives grounds to recommend the proposed method for implementation in a real experiment. The smallest value of the ratio of the cylinder wall thickness to its height is also established, which ensures the stability of the cylinder wall during deformation.

**Keywords:** well, dissolving metal, ball valve, magnesium, stresses, deformations, finite element method

**Acknowledgements:** the research was carried out within the state assignment on the subject "Pressure" (No. AAAA-A18-118020190104-3).

**Citation:** Loginov, Yu. N., & Zamaraeva, Yu. V. (2023). Composite structure of the magnesium ball valve element for a drilling well. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(1), 139–152. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-139-152>

Received November 22, 2022; Reviewed March 20, 2023; Accepted March 31, 2023

## Введение

Гидравлический разрыв пласта (ГРП) является актуальным и эффективным методом воздействия на призабойную зону скважины с помощью жидкости под давлением [Яркеева и др., 2019; Miao, Zhao, 2017; Hu и др., 2022].

Для соответствия основным эксплуатационным требованиям материал шаров для ГРП должен обладать высокими прочностными характеристиками и высокой скоростью растворения в бурительных растворах. Из-за своей низкой способности к разложению стали и алюминий не рассматриваются, в связи с чем в нефтяной промышленности актуален поиск материала, сочетающего в себе высокие механические свойства и высокую скорость деградации в химических растворах. Больше всего этим требованиям удовлетворяет магний [Fripp, Walton, 2017; Zhang и др., 2018; Zhang и др., 2019]. Химический состав сплавов магния подбирается с учетом необходимой скорости растворения [Xiao и др., 2015].

Изготавливаемые разнообразными методами [Буркин и др., 2001; Liu и др., 2017; Yu и др., 2017] растворимые магниевые шары предназначены для активации муфт ГРП. При достижении седла муфты, во время прокачки жидкости ГРП, шар временно перекрывает проходное сечение внутри колонны-хвостовика, что обеспечивает возможность для создания избыточного давления и открытия окон муфты ГРП.

Поскольку магний обладает малой плотностью, то в бурильных растворах, имеющих высокую плотность, возможен негерметичный контакт шара с седлом клапана вследствие недостаточной силы гравитации. Таким образом, актуален поиск способов, обеспечивающих возможность плотного прижатия шара к седлу клапана и сохранения герметичности. Часть исследований направлены на создание и исследование сплавов магния, обладающих высокими механическими свойствами [Tan и др., 2021; Wang и др., 2020; Zhang и др., 2017].

Сохранение герметичности также предлагается достигать посредством утяжеления шара, изготовленного в виде двухслойного тела [Junjie и др., 2015]. Так, в работе [Duogong и др., 2019] представлен шаровой элемент клапана, состоящий из полый и герметичной оболочки, выполненной из магния или магниевых сплавов. В стенке шаровой оболочки высверливается отверстие и через него помещается внутрь недеградируемый материал-утяжелитель, в рассматриваемом случае сыпучий. Затем отверстие закрывается пробкой из деградируемого материала.

У данного способа есть несколько недостатков. Материал-утяжелитель необходимо изготавливать сыпучим. Обратим внимание, что плотность материала в сыпучем виде ниже, чем в исходном состоянии, а значит, сила гравитации сыпучего материала также будет изначально понижена. Проблематичным является также создание полый оболочки, в частности внутренней сферической поверхности внутри шара. Кроме того, из-за пробки поверхность оболочки потеряет форму правильной сферы, что приведет к утечкам рабочей жидкости вследствие отсутствия герметичности между шаром и седлом клапана.

Следует отметить, что магниевые шары часто изготавливают путем отливки цилиндрической заготовки и вытачиванием шара, поэтому разрабатываемый способ должен быть направлен не только на утяжеление шара, но и на снижение стоимости его производства.

## Предлагаемый принцип и способ его реализации

Большее утяжеление шара возможно в случае заполнения оболочки не сыпучим, а компактным материалом. Нами предложен способ получения двухслойного шарового элемента клапана методом штамповки. Двухслойный шар состоит из магниевой оболочки, в которую помещен стальной шар.

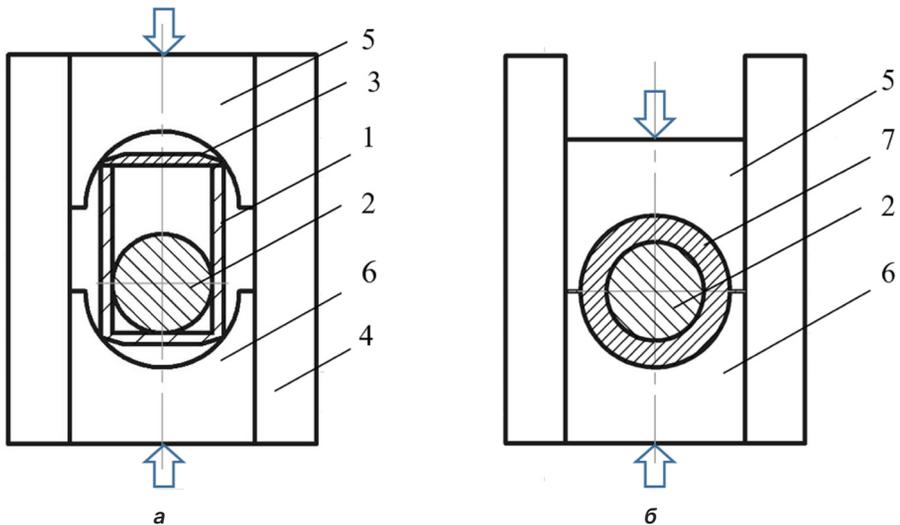
В магниевый цилиндрический стакан с дном опускается стальной шар, стакан закрывается крышкой из магния. Полученную композиционную сборку деформируют методом штамповки, подвергая сжатию двумя пуансонами с торцами в виде полусфер до плотного смыкания торцов цилиндрического стакана. Соединение крышки и стакана достигается за счет диффузионной сварки давлением, пример описания которой

представлен в статье [Логинов и др., 2012]. Отметим, что магний обладает пониженной пластичностью, и с целью ее увеличения деформация при комнатной температуре осуществляется в условиях высоких сжимающих напряжений [Логинов, Замараева, 2021a]. Поэтому стальной шар, помещенный внутрь цилиндрического стакана с дном, в исследуемом случае играет роль оправки и улучшает схему напряженного состояния, а также формирует внутреннюю поверхность магниевой оболочки.

Для изготовления крышки можно прибегнуть к вырубке из листовой заготовки, а для создания цилиндрического стакана с дном — либо к тому же методу с последующей глубокой вытяжкой, либо к обратному выдавливанию из сплошной цилиндрической заготовки.

Стальной шар можно получить методом поперечной винтовой прокатки. Высокая производительность — преимущество данного метода, но у него также есть недостаток — вероятно отклонение изделия от правильной сферической формы. В нашем случае отмеченный недочет является незначительным, т. к. стальной шар помещен в оболочку, которая создаст условия для получения необходимой сферической формы. Для получения сферической формы, близкой к идеальной, можно применить метод объемной штамповки.

Общая схема процесса штамповки композиционной сборки, состоящей из стального шара и магниевой оболочки, представлена на рис. 1.



**Рис. 1.** Общая схема процесса получения двухслойного шара: а — до деформации, б — после деформации при идеализированной картине трения; 1 — магниева оболочка, 2 — стальной шар, 3 — крышка, 4 — контейнер, 5 — верхний пуансон, 6 — нижний пуансон, 7 — полый шар

**Fig. 1.** The general scheme of the process of obtaining a two-layer ball: а — before deformation, б — after deformation with an idealized friction pattern; 1 — magnesium shell, 2 — steel ball, 3 — lid, 4 — container, 5 — upper punch, 6 — lower punch, 7 — hollow ball

В качестве примера рассчитаем массу шара из магния марки Mg90 (плотность  $1\,740\text{ кг/м}^3$ ) диаметром 20 мм и массу композиционной сборки, состоящей из стального шара диаметром 16,2 мм (сталь 10, плотность  $7\,856\text{ кг/м}^3$ ) и магниевой оболочки толщиной 1,9 мм (Mg90). Здесь диаметры шаровых поверхностей выбраны условно, важно только соотношение между ними. В первом случае масса равна 0,0073 кг, а во втором — 0,02 кг. Таким образом, масса композиционной сборки в 2,74 раза больше массы магниевого шара.

Чтобы проверить возможность осуществления штамповки композиционной заготовки по данной схеме, смоделировали данный процесс с помощью метода конечных элементов. Этот метод ранее уже был применен, в частности, в работе [Логинов, Замараева, 2021б] для расчета работы шарового клапана.

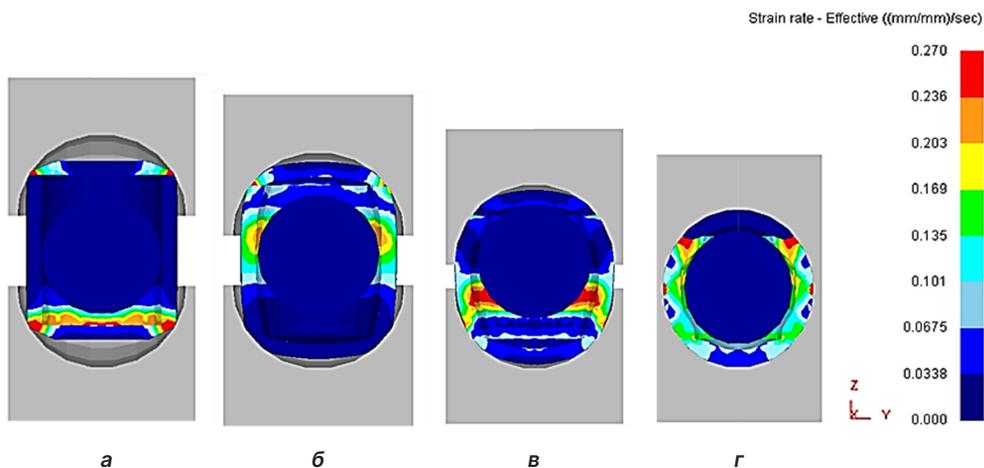
## Постановка задачи и результаты решения

Моделирование формоизменения композиционной заготовки осуществили в программном комплексе DEFORM 3D. Для вычислительного эксперимента использован магний марки Mg90 по ГОСТ 804—93. Постановка задачи включала в себя создание геометрии очага деформации в первичном состоянии, описание физических и пластических свойств на основе справочных данных.

Заготовка имеет вид цилиндрического стакана с дном. Наружный диаметр цилиндра  $d_1 = 20\text{ мм}$ , толщина стенки цилиндра  $s_1 = 1,9\text{ мм}$ , высота цилиндра  $h_1 = 22,2\text{ мм}$ , 1 фаска ( $3 \times 25^\circ$ ). Крышка имеет диаметр  $d_2$ , равный наружному диаметру цилиндра  $d_1$ , толщина крышки  $s_2$  равна толщине стенки цилиндра  $s_1$ , 1 фаска ( $3 \times 25^\circ$ ). Диаметр стального шара  $D_1$  равен внутреннему диаметру цилиндрического стакана. В задаче трение описывается законом Кулона ( $\mu = 0,2$ ). Температура инструмента, магниевой заготовки и крышки, а также стального шара равна  $20\text{ }^\circ\text{C}$ . Моделирование осуществлялось при изотермических условиях. Скорость движения инструмента равна  $1,5\text{ мм/с}$ .

Распределение скорости деформации в продольном сечении композиционной заготовки с отображением четырех этапов деформации показано на рис. 2.

На первом этапе формоизменения максимум скорости деформации находится в области контакта композиционной заготовки с поверхностью верхнего и нижнего пуансона (рис. 2а). На втором этапе очаг деформации имеет две локализации — в области соединения крышки и оболочки и в зоне контакта оболочки и стального шара (рис. 2б). Далее металл заполняет верхний и нижний купол штампа (третий этап), при этом максимум скорости деформации находится в нижней области оболочки (рис. 2в). На четвертом этапе деформации внешний контур композиционной заготовки сформирован в виде правильной сферы, в результате чего получен двухслойный шар (рис. 2г). Следует отметить, что в конце деформации стальной шар сохранил свою исходную форму. На данном этапе первая локализация скорости деформации расположена в области соединения крышки и оболочки, вторая — в центральной зоне боковой поверхности оболочки на контакте с поверхностью штампа.



**Рис. 2.** Порядок изменения поля скорости деформации в продольном разрезе очага деформации в плоскости YZ и его перемещение по ходу процесса штамповки: а — первый этап; б — второй этап; в — третий этап; г — четвертый этап

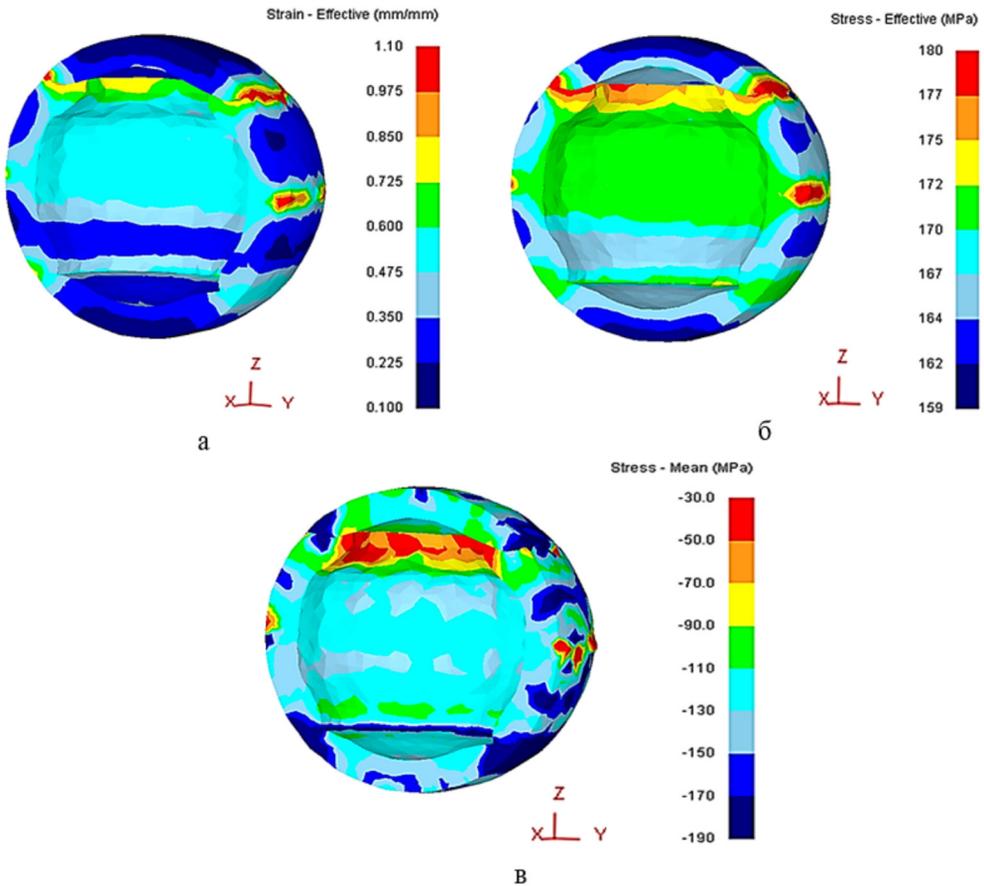
**Fig. 2.** The order of change of the deformation velocity field in the longitudinal section of the deformation focus in the YZ plane and its movement during the stamping process: а — the first stage; б — the second stage; в — the third stage; г — the fourth stage

На рис. 3 представлен продольный разрез двухслойного шара (штамп и стальной шар не показаны) с отображением поля степени деформации (рис. 3а), интенсивности напряжений (рис. 3б) и среднего напряжения (рис. 3в). Максимум степени деформации в конце процесса деформации (рис. 3а) расположен в зоне соединения крышки и оболочки и в центральной зоне боковой поверхности оболочки на контакте с поверхностью штампа. Минимум степени деформации — в зоне контакта двухслойного шара с верхним и нижним пуансоном.

Из рис. 3б видно, что локализация максимумов интенсивности напряжений двухслойного шара соответствует максимумам степени деформации, при этом свое минимальное значение интенсивность напряжений имеет в зонах затрудненной деформации, расположенных на контакте с поверхностями верхнего и нижнего пуансона.

На повышенные показатели пластичности металла в процессе штамповки указывают отрицательные значения среднего нормального напряжения (рис. 3в). Достаточно высокие по модулю значения среднего напряжения должны гарантировать минимальную вероятность разрушения композиционной заготовки.

Компьютерное моделирование композиционной сборки оказалось успешным, а значит, предложенный способ можно рекомендовать для осуществления в условиях реального эксперимента. Однако следует отметить важность подбора соотношения толщины стенки цилиндра к его высоте ( $s_1/h_1$ ). Например, в нашем случае при толщине стенки цилиндра  $s_1 = 1,3$  мм и высоте цилиндра  $h_1 = 22,2$  мм ( $s_1/h_1 = 1,3/22,2 = 0,058$ ) произошла потеря устойчивости стенки цилиндра и образование ее прогиба (рис. 4).



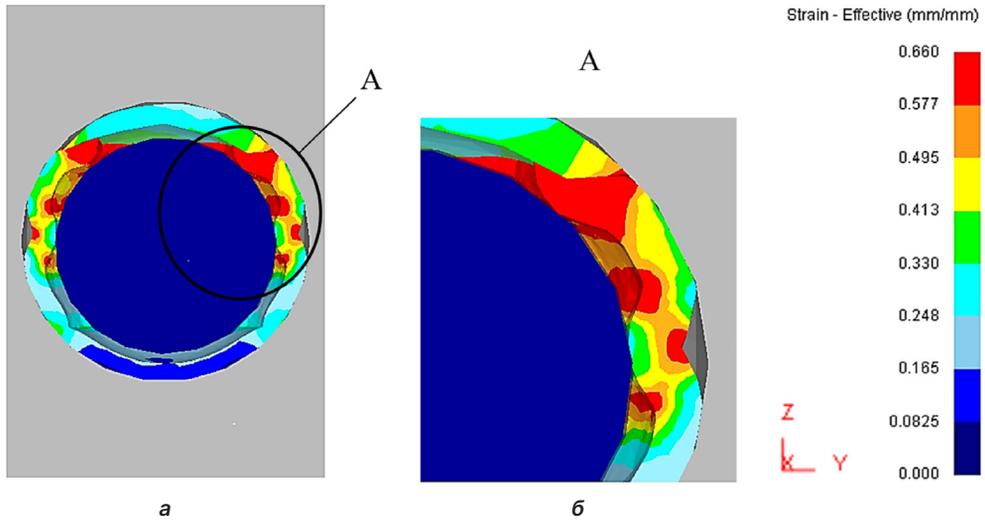
**Рис. 3.** Распределение степени деформации (а), интенсивности напряжений (б) и среднего напряжения (в) в конце процесса деформации в продольном разрезе двухслойного шара

**Fig. 3.** Distribution of the degree of deformation (а), stress intensity (б) and average stress (в) at the end of the deformation process in the longitudinal section of a two-layer ball

Из рис. 4 видно, что наибольшего значения степень деформации достигает в зоне соединения крышки и оболочки. Вторая локализация — в зоне прогиба стенки оболочки (рис. 4б).

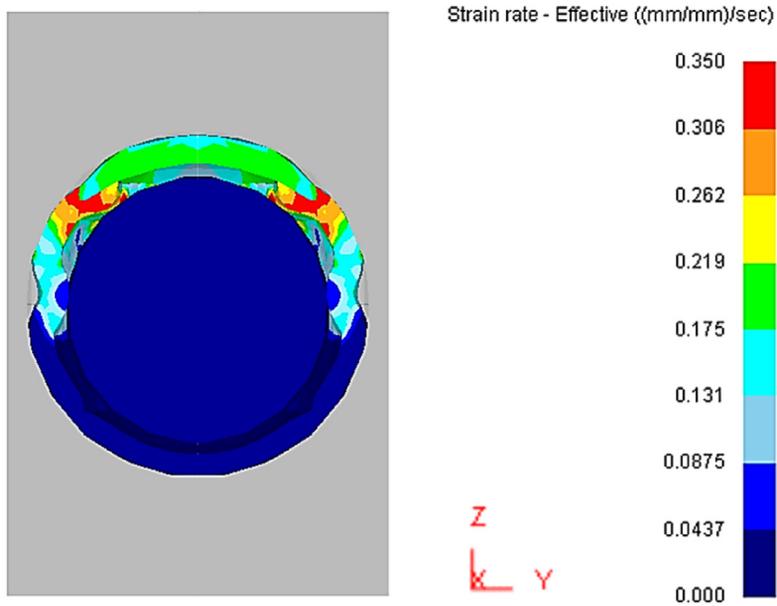
Также распределение скорости деформации в продольном сечении двухслойного шара при значении  $s_1/h_1 = 0,058$  демонстрирует состояние мгновенного очага деформации (рис. 5). Здесь видно, что очаг деформации локализован в зоне соединения крышки и оболочки.

На рис. 6 отображено поле среднего напряжения в продольном разрезе двухслойного шара при значении  $s_1/h_1 = 0,058$ . Несмотря на прогиб стенки оболочки, значения среднего напряжения оболочки имеют отрицательные значения.



**Рис. 4.** Распределение степени деформации в продольном разрезе двухслойного шара в плоскости YZ при  $s_1/h_1 = 0,058$  (а), зона А (б)

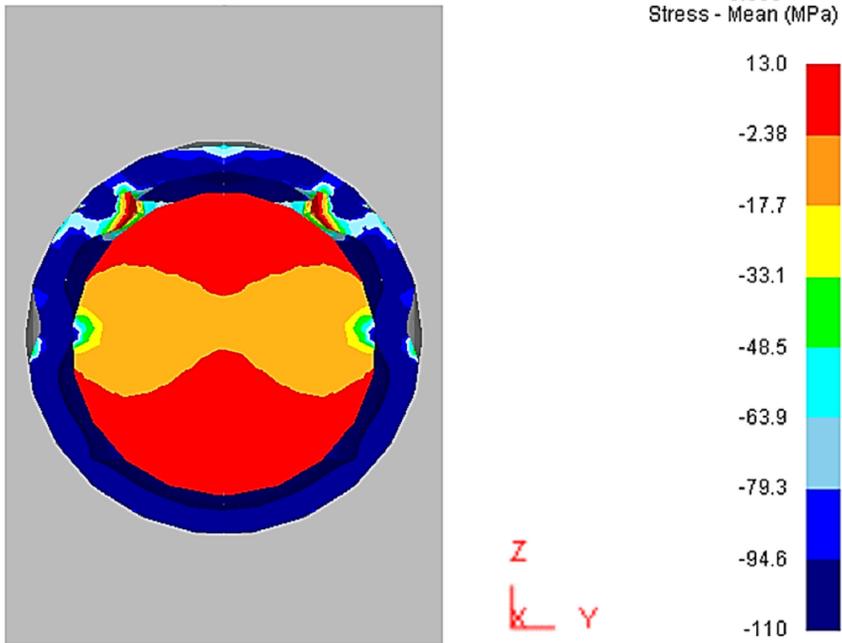
**Fig. 4.** Distribution of the degree of deformation in the longitudinal section of a two-layer ball in the YZ plane at  $s_1/h_1 = 0.058$  (a), zone A (б)



**Рис. 5.** Распределение скорости деформации в продольном разрезе двухслойного шара в плоскости YZ при  $s_1/h_1 = 0,058$

**Fig. 5.** The distribution of the strain rate in the longitudinal section of a two-layer ball in the YZ plane at  $s_1/h_1 = 0.058$

Так как сталь имеет более высокие прочностные характеристики по сравнению с магнием, прогиб стенки магниевой оболочки не повлиял на форму стального шара.



**Рис. 6.** Распределение среднего напряжения в продольном разрезе двухслойного шара в плоскости YZ при  $s_1/h_1 = 0,058$

**Fig. 6.** Distribution of the average stress in the longitudinal section of a two-layer ball in the YZ plane at  $s_1/h_1 = 0.058$

По результатам дополнительных расчетов установлено, что для получения биметаллического шара наружным диаметром 20 мм и наружной поверхностью в виде правильной сферы соотношение толщины стенки цилиндра к его высоте ( $s_1/h_1$ ) должно превышать 0,08.

## Заключение

Разработан способ, направленный на утяжеление шара. Шар предложено изготавливать методом штамповки в виде двухслойного тела — стального шара в магниевой оболочке. Стальной шар, помимо утяжеления, создает дополнительные напряжения сжатия в схеме деформации, что положительно влияет на пластичность материала оболочки. За счет замены цветного металла в центре двухслойного шара на черный, стоимость которого намного ниже цветного, достигается снижение стоимости по сравнению с шарами, полностью изготовленными из магния. Кроме того, установлено наименьшее значение соотношения толщины стенки цилиндра к его высоте, обеспечивающее сохранение устойчивости стенки цилиндра в процессе деформации.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- Буркин С. П., Логинов Ю. Н., Разинкин А. В., Сапунжи В. В. 2001. Высокопроизводительная технология изготовления магниевых заготовок под закрытую штамповку // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. № 1. С. 11–15.
- Логинов Ю. Н., Замараева Ю. В. 2021а. Инвариантные показатели напряженного состояния при кузнечной осадке магния в оболочке // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). Том 23. № 1. С. 79–88. <https://doi.org/10.17212/1994-6309-2021-23.1-79-88>
- Логинов Ю. Н., Замараева Ю. В. 2021б. Напряженно-деформированное состояние сферического клапана в буровой скважине // Оборудование и технологии для нефтегазового комплекса. № 2 (122). С. 43–47. [https://doi.org/10.33285/1999-6934-2021-2\(122\)-43-47](https://doi.org/10.33285/1999-6934-2021-2(122)-43-47)
- Логинов Ю. Н., Илларионов А. Г., Кляева С. Ю., Иванова М. А. 2012. Деформации и структура металла при холодной стыковой сварке медных заготовок // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. № 1. С. 37–44.
- Яркева Н. Р., Хусаинов Б. И., Самушкова Э. С. 2019. Анализ проведения гидравлического разрыва пласта по технологии Slug Frac // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. № 4 (120). С. 58–64. <https://doi.org/10.17122/ntj-oil-2019-4-58-64>
- Duorong L., Lin L., Baofeng P., Bing Y., Dongmei Y., Wenyaow W., Jia T., Zhixin L. 2019. Soluble pressure building ball: pat. 208934677 CN: MPK E21B43/26 / applicant and patent holder China Petroleum & Chemical Corporation, Sinopec Southwest Oil & Gas Company. No. 201821641602U; applied 10 Oct. 2018; published 4 June 2019.
- Fripp M. L., Walton Z. W. 2017. Subterranean formation operations using degradable wellbore isolation devices: pat. 2542095 UK: MPK E21B33/12, E21B33/128, E21B34/06, C22C23/02, C22C23/04 / applicant and patent holder Halliburton Energy Services Inc. No. 20170000605; applied 13 Aug. 2015; published 8 Mar. 2017.
- Hu D., Ren L., Li Z., Zhao J., Lin R., Jiang T. 2022. Simulation of fracture control during temporary plugging at fracture openings in deep and ultra-deep shale-gas horizontal wells // Natural Gas Industry B. Vol. 9. No. 5. Pp. 487–496. <https://doi.org/10.1016/j.ngib.2022.10.002>
- Junjie X., Weigang Z., Tianyu X., Tianyue X., Shouquan Y., Chuanbing H., Rongli L. 2015. Self-dissolution fracturing ball for oil and gas well fracturing technology: pat. 204371293 CN: MPK E21B43/267. No. 201420813510U; applied 18 Dec. 2014; published 3 June 2015.
- Liu Y., Wang W., Li Y., Han Z., Hao M. 2017. Manufacturing method of soluble alloy fracturing ball for oil and gas exploitation: pat. 107385245 CN: MPK C22C1/03, C22C23/00, E21B43/26 / applicant and patent holder Xian University of Technology. No. 201710430332; applied 9 June 2017; published 24 Nov. 2017.
- Miao W., Zhao L. 2017. Development status and prospect of staged fracturing technology in horizontal wells // Electronic Journal of Geotechnical Engineering. Vol. 22. No. 13. Pp. 5107–5118.
- Tan W., Li T., Li S., Fang D., Ding X., Sun J. 2021. High strength-ductility and rapid degradation rate of as-cast Mg-Cu-Al alloys for application in fracturing balls // Journal of Materials Science & Technology. Vol. 94. Pp. 22–31. <https://doi.org/10.1016/j.jmst.2021.04.010>
- Wang J., Gao S., Liu X., Peng X., Wang K., Liu S., Jiang W., Guo S., Pan F. 2020. Enhanced mechanical properties and degradation rate of Mg–Ni–Y alloy by introducing LPSO phase

- for degradable fracturing ball applications // *Journal of Magnesium and Alloys*. Vol. 8. No. 1. Pp. 127–133. <https://doi.org/10.1016/j.jma.2019.11.010>
- Xiao D. H., Geng Z. W., Chen L., Wu Z., Diao H. Y., Song M., Zhou P. F. 2015. Effects of alloying elements on microstructure and properties of magnesium alloys for tripling ball // *Metallurgical and Materials Transactions A*. Vol. 46. No. 10. Pp. 4793–4803. <https://doi.org/10.1007/s11661-015-3053-7>
- Yu S., Ji Z., Xiong W., Liu E., Jiang Q., Zhao Y. 2017. Soluble magnesium alloy composite fracturing ball and preparation method thereof: pat. 107099712 CN: MPK C09K8/62, C09K8/70, C22C1/06, C22C1/10, C22C23/02, C22C32/00, C25D11/30 / applicant and patent holder China University of Petroleum. No. 201710381832; applied 26 May 2017; published 29 Aug. 2017.
- Zhang C., Wu L., Huang G., Chen L., Xia D., Jiang B., Atrens A., Pan F. 2019. Effects of Fe concentration on microstructure and corrosion of Mg-6Al-1Zn-xFe alloys for fracturing balls applications // *Journal of Materials Science & Technology*. Vol. 35. No. 9. Pp. 2086–2098. <https://doi.org/10.1016/j.jmst.2019.04.012>
- Zhang Y., Wang X., Kuang Y., Liu B., Zhang K., Fang D. 2017. Enhanced mechanical properties and degradation rate of Mg-3Zn-1Y based alloy by Cu addition for degradable fracturing ball applications // *Materials Letters*. Vol. 195. Pp. 194–197. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2017.02.024>
- Zhang Y., Yu L., Ren Y., Yang D., Zhang Y., Feng D. 2018. A new type of degradable setting ball for fracturing packers // *Well Testing*. Vol. 27. No. 2. Pp. 53–58.

## References

- Burkin, S. P., Loginov, Yu. N., Razinkin, A. V., & Sapunzhi, V. V. (2001). High-performance technology for manufacturing magnesium blanks for closed stamping. *Kuznechno-shtampovochnoe proizvodstvo. Obrabotka materialov davleniem*, (1), 11–15. [In Russian]
- Loginov, Yu. N., & Zamaraeva, Yu. V. (2021a). Invariant stress state parameters for forging upsetting of magnesium in the shell. *Metal Working and Material Science*, 23(1), 79–88. <https://doi.org/10.17212/1994-6309-2021-23.1-79-88> [In Russian]
- Loginov, Yu. N., & Zamaraeva, Yu. V. (2021b). Stress-strain condition of a spherical valve in a drilling well. *Equipment and Technologies for Oil and Gas Complex*, (2), 43–47. [https://doi.org/10.33285/1999-6934-2021-2\(122\)-43-47](https://doi.org/10.33285/1999-6934-2021-2(122)-43-47) [In Russian]
- Loginov, Yu. N., Illarionov, A. G., Klyueva, S. Yu., & Ivanova, M. A. (2012). Deformations and structure of metal during cold butt-seam welding of copper blanks. *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*, 53(1), 45–53. <https://doi.org/10.3103/S1067821212010154>
- Yarkeeva, N. R., Khusainov, B. I., & Samushkova, E. S. (2019). Analysis of hydraulic fracturing technology Slug Frac. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefi i nefteproduktov*, (4), 58–64. <https://doi.org/10.17122/ntj-oil-2019-4-58-64> [In Russian]
- Duorong, L., Lin, L., Baofeng, P., Bing, Y., Dongmei, Y., Wenyao, W., Jia, T., & Zhixin, L. (2019). *Soluble pressure building ball* (Chinese Patent No. 208934677). China Petroleum & Chemical Corporation, Sinopec Southwest Oil & Gas Company.
- Fripp, M. L., & Walton, Z. W. (2017). *Subterranean formation operations using degradable wellbore isolation devices* (U.K. Patent No. 2542095). Halliburton Energy Services Inc.

- Hu, D., Ren, L., Li, Z., Zhao, J., Lin, R., & Jiang, T. (2022). Simulation of fracture control during temporary plugging at fracture openings in deep and ultra-deep shale-gas horizontal wells. *Natural Gas Industry B*, 9(5), 487–496. <https://doi.org/10.1016/j.ngib.2022.10.002>
- Junjie, X., Weigang, Z., Tianyu, X., Tianyue, X., Shouquan, Y., Chuanbing, H., & Rongli, L. (2015). *Self-dissolution fracturing ball for oil and gas well fracturing technology* (Chinese Patent No. 204371293).
- Liu, Y., Wang, W., Li, Y., Han, Z., & Hao, M. (2017). *Manufacturing method of soluble alloy fracturing ball for oil and gas exploitation* (Chinese Patent No. 107385245). Xian University of Technology.
- Miao, W., & Zhao, L. (2017). Development status and prospect of staged fracturing technology in horizontal wells. *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 22(13), 5107–5118.
- Tan, W., Li, T., Li, S., Fang, D., Ding, X., & Sun, J. (2021). High strength-ductility and rapid degradation rate of as-cast Mg-Cu-Al alloys for application in fracturing balls. *Journal of Materials Science & Technology*, 94, 22–31. <https://doi.org/10.1016/j.jmst.2021.04.010>
- Wang, J., Gao, S., Liu, X., Peng, X., Wang, K., Liu, S., Jiang, W., Guo, S., & Pan, F. (2020). Enhanced mechanical properties and degradation rate of Mg–Ni–Y alloy by introducing LPSO phase for degradable fracturing ball applications. *Journal of Magnesium and Alloys*, 8(1), 127–133. <https://doi.org/10.1016/j.jma.2019.11.010>
- Xiao, D. H., Geng, Z. W., Chen, L., Wu, Z., Diao, H. Y., Song, M., & Zhou, P. F. (2015). Effects of alloying elements on microstructure and properties of magnesium alloys for tripling ball. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 46(10), 4793–4803. <https://doi.org/10.1007/s11661-015-3053-7>
- Yu, S., Ji, Z., Xiong, W., Liu, E., Jiang, Q., & Zhao, Y. (2017). *Soluble magnesium alloy composite fracturing ball and preparation method thereof* (Chinese Patent No. 107099712). China University of Petroleum.
- Zhang, C., Wu, L., Huang, G., Chen, L., Xia, D., Jiang, B., Atrens, A., & Pan, F. (2019). Effects of Fe concentration on microstructure and corrosion of Mg-6Al-1Zn-xFe alloys for fracturing balls applications. *Journal of Materials Science & Technology*, 35(9), 2086–2098. <https://doi.org/10.1016/j.jmst.2019.04.012>
- Zhang, Y., Wang, X., Kuang, Y., Liu, B., Zhang, K., & Fang, D. (2017). Enhanced mechanical properties and degradation rate of Mg-3Zn-1Y based alloy by Cu addition for degradable fracturing ball applications. *Materials Letters*, 195, 194–197. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2017.02.024>
- Zhang, Y., Yu, L., Ren, Y., Yang, D., Zhang, Y., & Feng, D. (2018). A new type of degradable setting ball for fracturing packers. *Well Testing*, 27(2), 53–58.

## Информация об авторах

Юрий Николаевич Логинов, доктор технических наук, профессор кафедры обработки металлов давлением, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия; ведущий научный сотрудник, Институт физики металлов им. М. Н. Михеева УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
[j.n.loginov@urfu.ru](mailto:j.n.loginov@urfu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7222-2521>

*Юлия Валентиновна Замараева*, кандидат технических наук, научный сотрудник, Институт физики металлов им. М. Н. Михеева УрО РАН, Екатеринбург, Россия; начальник отдела, Каменск-Уральский металлургический завод, Каменск-Уральский, Россия  
zamaraeva@imp.uran.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2620-7064>

## Information about the authors

*Yuriy N. Loginov*, Dr. Sci. (Tech.), Professor, Department of Metal Working, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia; Leading Researcher, M. N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia  
j.n.loginov@urfu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7222-2521>

*Yuliya V. Zamaraeva*, Cand. Sci. (Tech.), Researcher, M. N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia; Head of the Department, Kamensk-Uralsky Metallurgical Works, Kamensk-Uralsky, Russia  
zamaraeva@imp.uran.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2620-7064>

## Содержание за 2022 год

### Том 8. № 1 (29)

#### Теплофизика и теоретическая теплотехника

- 8 Экспериментальное исследование термогидродинамических процессов при фильтрации водонефтяной эмульсии  
*Асылгареев А. А., Шарафутдинов Р. Ф., Валиуллин Р. А., Космылин Д. В.*
- 23 Методика определения термодинамических и фильтрационных параметров для гидродинамических композиционных моделей  
*Гильманов А. Я., Михайлин И. А., Шевелёв А. П.*
- 40 Алгоритм решения задачи о разложении гидрата метана в замкнутой гидратосодержащей области пористой среды  
*Мусакаев Н. Г., Бородин С. А., Бельских Д. С.*

#### Механика жидкости, газа и плазмы

- 58 Сопоставление эффективности полимер-дисперсных обработок нагнетательных скважин различной конструкции  
*Выдьши И. В., Федоров К. М., Анурьев Д. А.*
- 75 Особенности модернизации петрофизического исследовательского комплекса для осуществления возможности фильтрации газа совместно с водонефтяными флюидами  
*Кузина О. А., Поточняк И. Р., Пульдас А. А.*
- 88 Цифровая кластерная модель порового пространства при течении трехфазного потока в пористой среде  
*Шабаров А. Б., Игошин Д. Е., Ростенко П. М., Садыкова А. П.*

#### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Информационные технологии

- 109 Вариационно-сеточный подход к построению литологических моделей клиноформных отложений  
*Сидоров А. А.*
- 126 Имитационное моделирование и оптимизация работы параллельного сервера с отказами в среде AnyLogic  
*Сенкевич А. Б., Сабитов М. А.*
- 144 Моделирование транспортных пересечений городских улиц с адаптивным регулированием дорожного движения  
*Андронов Р. В., Леверенц Е. Э., Мальцева Т. В.*

## Том 8. № 2 (30)

### Теплофизика и теоретическая теплотехника

- 10 Сравнительный анализ расчета термодинамических циклов приводных газотурбинных двигателей  
*Аксёнов А. Н., Култышев А. Ю., Пульдад А. А.*
- 32 Влияние некоторых геометрических параметров на теплоотдачу в осевых системах охлаждения радиоэлектронного оборудования, выполненных на основе разрезного оребрения  
*Габдуллина Р. А., Лопатин А. А., Биктагирова А. Р., Терентьев А. А.*
- 52 Повышение эффективности способа получения парафина из асфальтосмолопарафиновых отложений и его аппаратурное оформление  
*Марышева М. А., Нугманов А. Х.-Х., Алексанян И. Ю., Шишкин Н. Д., Алексанян А. И.*

### Механика жидкости, газа и плазмы

- 77 Гидродинамическое моделирование лабораторных экспериментов по вытеснению нефти термополимерным раствором  
*Степанов А. В., Зубарева И. А., Волгин Е. Р.*
- 101 Анизотропия проницаемости в модельных пористых средах, образованных периодическими кубическими структурами  
*Кусайко Г. Н., Игошин Д. Е., Губкин А. С.*
- 115 Гидродинамическая модель воронки от взрыва заглубленным зарядом  
*Бубенчиков А. М., Бразовский Е. Б.*
- 129 Использование машинного обучения для восстановления поля проницаемости элемента разработки нефтяного пласта в двумерной постановке  
*Косяков В. П., Легостаев Д. Ю.*

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Информационные технологии

- 150 Математическое моделирование процессов маршрутизации сигналов логической матрицей, а также кодирования и декодирования информации в биоморфном нейропроцессоре  
*Писарев А. Д.*
- 165 Конвейерный метод для распознавания комплексных действий объектов в системах видеонаблюдения  
*Егоров Ю. А., Захарова И. Г.*
- 183 Математическое моделирование вынужденных колебаний манометрических трубчатых пружин  
*Пирогов С. П., Черенцов Д. А.*
- 198 Математическое моделирование резистивного переключения в мемристоре на основе полной модели процессов массопереноса кислородных вакансий и ионов  
*Ибрагим А. Х. А., Бусыгин А. Н., Удовиченко С. Ю.*

## Том 8. № 3 (31)

### Теплофизика и теоретическая теплотехника

- 10 Влияние биополимеров на образование гидратов метана в дисперсном льду  
*Драчук А. О., Кибкало А. А., Кривень Д. В., Молокитина Н. С., Новиков Н. С., Плетнева К. А.*
- 23 Изменение теплофизических и теплотехнических характеристик отходов мукомольного производства в процессе медленного пиролиза  
*Шаненков И. И., Астафьев А. В., Гайдабрус М. А., Табакаев Р. Б.*
- 44 Математическое моделирование топочных процессов при факельном сжигании твердого топлива  
*Гиль А. В., Мальцев К. И., Заворин А. С., Старченко А. В.*

### Механика жидкости, газа и плазмы

- 59 Методика численного моделирования волновых процессов в неоднородной гидратосодержащей пористой среде  
*Губайдуллин А. А., Болдырева О. Ю., Дудко Д. Н.*
- 72 Исследование прогностической способности аналитической модели материального баланса CRM в рамках ретроспективного теста на реальном месторождении  
*Шевцов Н. О., Корытов А. В.*
- 85 Применение инструментов прокси-моделирования для оценки коэффициента полезной закачки для нефтяного месторождения  
*Косяков В. П., Мусакаев Э. Н., Гайдамак И. В.*
- 106 Снижение вязкости нефти с добавлением графеновых нанопластинок  
*Шабиев Ф. К., Пахаруков Ю. В., Сафаргалиев Р. Ф., Ездин Б. С., Васильев С. А.*

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Информационные технологии

- 126 Форма воронки от взрыва заряда в плане имеющего конфигурацию прямоугольника  
*Бубенчиков А. М., Бразовский Е. Б., Коньков Н. С.*
- 140 Моделирование и расчет ремонтируемого участка трубопровода на основе композитно-муфтовой технологии  
*Донкова И. А., Якубовский Ю. Е., Колосов В. И.*
- 155 Графовые нейронные сети для прокси-моделирования гидродинамики пласта  
*Умановский А. В.*

### Юбилей, научные события, рецензии

- 178 К 75-летию профессора Амира Анваровича Губайдуллина

## Том 8. № 4 (32)

### Теплофизика и теоретическая теплотехника

- 8 Исследование термодинамических условий для пиролиза моносилана в циклическом реакторе сжатия  
*Ездин Б. С., Каляда В. В., Васильев С. А., Шабиев Ф. К., Пахаруков Ю. В., Сафаргалиев Р. Ф.*
- 21 Расчет расходных характеристик теплоносителя в стволе скважины с учетом режимов течения  
*Гильманов А. Я., Шевелёв А. П., Родионова А. В.*
- 40 Массоперенос фаз при течении нефтегазовой смеси в масштабе керна  
*Шабаров А. Б., Игошин Д. Е., Ростенко П. М., Садькова А. П.*
- 66 Разработка установки для изучения течения жидкости в микрокапиллярах  
*Велижанин А. А., Григорьев Б. В., Никулин С. Г., Важенин Д. А., Вахнина Д. В.*

### Механика жидкости, газа и плазмы

- 81 Экспериментальное исследование колебательного процесса в цилиндрических трубах, заполненных газопузырьковой жидкостью  
*Зарипов Ф. А., Павлов Г. И., Накоряков П. В., Ситников О. Р.*
- 95 Анализ теоретических методов интерпретации экспериментальных данных по вязкости неьютоновских жидкостей  
*Семихина Л. П., Коровин Д. Д., Семихин Д. В.*
- 111 Поле давления в пласте и скважине с учетом динамического уровня при отборе и последующей остановке  
*Филиппов А. И., Ахметова О. В., Зеленова М. А.*

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Информационные технологии

- 125 Улучшение качества картирования пластового давления за счет регуляризации задачи адаптации модели CRMP-TM  
*Бекман А. Д.*
- 144 О применении LET-модели для аппроксимации керновых относительных фазовых проницаемостей  
*Дубровин М. Г., Вокина В. Р., Ядрышникова О. А.*
- 163 Алгоритмы для построения и моделирования работы больших электрических цепей с мемристорно-диодными кроссбрами в биоморфном нейропроцессоре  
*Ибрагим А. Х. А., Удовиченко С. Ю.*

### Юбилей, научные события, рецензии

- 179 Памяти профессора В. М. Дерябина (22.09.1922-28.02.2009).  
К 100-летию со дня рождения

## Contents for 2022

### Vol. 8. No. 1 (29)

#### Thermal physics and thermology

- 8 Experimental investigation of thermohydrodynamic processes during filtration of water-oil emulsions  
*Asylgareev, A. A., Sharafutdinov, R. F., Valiullin, R. A., & Kosmylin, D. V.*
- 23 Method of determination of thermodynamic and filtration parameters for hydrodynamic compositional models  
*Gilmanov, A. Ya., Mikhaylin, I. L., & Shevelev, A. P.*
- 40 Algorithm for solving the problem of methane hydrate decomposition in a closed hydrate-containing region of a porous medium  
*Musakaev, N. G., Borodin, S. L., & Belskikh, D. S.*

#### Fluid, plazma, and gas mechanics

- 58 Comparison of the suspension stabilized by polymer treatment efficiency for injection wells of various completions  
*Vydysh, I. V., Fedorov, K. M., & Anuriev, D. A.*
- 75 Features of the modernization of the petrophysical research complex for the implementation of the possibility of gas filtration together with water-oil fluids  
*Kuzina, O. A., Potochnyuk, I. R., & Puldak, L. A.*
- 88 Digital cluster model of pore space at flow of three-phase flow in porous medium  
*Shabarov, A. B., Igoshin, D. E., Rostenko, P. M., & Sadykova, A. P.*

#### Mathematical modeling, numerical methods, and software systems. Information technologies

- 109 Variational gridding approach to the lithological modeling of clinoform-type deposits  
*Sidorov, A. A.*
- 126 Simulation modeling and optimization of the operation of a parallel server with failures in AnyLogic  
*Senkevich, L. B., & Sabitov, M. A.*
- 144 Modeling transport intersections of city streets with adaptive traffic control  
*Andronov, R. V., Leverents, E. E., & Maltseva, T. V.*

**Vol. 8. No. 2 (30)****Thermal physics and thermology**

- 10 Comparative analysis of turboshaft engines thermodynamic cycles calculation  
*Aksyonov, A. N., Kultyshev, A. Yu., & Puldas, L. A.*
- 32 The influence of some geometric parameters on heat transfer in axial cooling systems of electronic equipment made on the basis of split fins  
*Gabdullina, R. A., Lopatin, A. A., Biktagirova, A. R., & Terentiev, A. A.*
- 52 Increasing the efficiency of the method for obtaining paraffin from asphalt-resin-paraffin deposits and its hardware design  
*Marysheva, M. A., Nugmanov, A. Kh.-Kh., Aleksanyan, I. Yu., Shishkin, N. D., & Aleksanyan, A. I.*

**Fluid, plazma, and gas mechanics**

- 77 Hydrodynamic modeling of laboratory experiments related to oil displacement with thermopolymer solution  
*Stepanov, A. V., Zubareva, I. A., & Volgin, E. R.*
- 101 Permeability anisotropy in model porous media formed by periodic cubic structures  
*Kusayko, G. N., Igoshin, D. E., & Gubkin, A. S.*
- 115 Hydrodynamic model of a funnel from an explosion of a buried charge  
*Bubenchikov, A. M., & Brazovskiy, E. B.*
- 129 Using elements of machine learning to solve the inverse problem of reconstructing the hydraulic conductivity field for a filtration problem  
*Kosyakov, V. P., & Legostaev, D. Yu.*

**Mathematical modeling, numerical methods, and software systems. Information technologies**

- 150 Mathematical modeling of the processes of signal routing by logic matrix, information encoding and decoding in the biomorphic neuroprocessor  
*Pisarev, A. D.*
- 165 Pipeline for complex actions recognition in video surveillance systems  
*Egorov, Yu. A., & Zakharova, I. G.*
- 183 Mathematical modeling of forced oscillations of manometric tubular springs  
*Pirogov, S. P., & Cherentsov, D. A.*
- 198 Mathematical modeling of memristor resistive switching based on mass transfer full model of oxygen vacancies and ions  
*Ebrahim, A. H. A., Busygin, A. N., & Udovichenko, S. Yu.*

## Vol. 8. No. 3 (31)

### Thermal physics and thermology

- 10 Effects of biopolymers on methane hydrate formation in dispersed ice  
*Drachuk, A. O., Kibkalo, A. A., Kreven, D. V., Molokitina, N. S., Novikov, N. S., & Pletneva, K. A.*
- 23 Changes in thermophysical and thermotechnical characteristics of flour-milling waste in the process of slow pyrolysis  
*Shanenkova, I. I., Astafiev, A. V., Gajdabrus, M. A., & Tabakaev, R. B.*
- 44 Mathematical simulation of furnace processes during fired pulverized coal  
*Gil, A. V., Maltsev, K. I., Zavorin, A. S., & Starchenko, A. V.*

### Fluid, plazma, and gas mechanics

- 59 Technique of numerical simulation of wave processes in a heterogeneous hydrate-containing porous medium  
*Gubaidullin, A. A., Boldyreva, O. Yu., & Dudko, D. N.*
- 72 Study of the predictive ability of the CRM analytical material balance model as a part of a retrospective test on a real field  
*Shevtsov, N. O., & Korytov, A. V.*
- 85 Applying proxy-modeling tools to estimate the effective injection factor for an oil field  
*Kosyakov, V. P., Musakaev, E. N., & Gaydamak, I. V.*
- 106 Use of nanofluids based on carbon nanoparticles to displace oil from the porous medium model  
*Shabiev, F. K., Pakharukov, Yu. V., Safargaliev, R. F., Yezdin, B. S., & Vasiliev, S. A.*

### Mathematical modeling, numerical methods, and software systems. Information technologies

- 126 The shape of the funnel from the explosion of the charge in the plan having the configuration of a rectangle  
*Bubenchikov, A. M., Brazovskiy, E. B., & Konkov, N. S.*
- 140 Modeling and calculation of a pipeline section repaired on the basis of composite-coupling technology  
*Donkova, I. A., Yakubovskiy, Yu. E., & Kolosov, V. I.*
- 155 Proxy modeling of reservoir hydrodynamics with graph neural networks  
*Umanovskiy, A. W.*

### Anniversaries, scientific events, reviews

- 178 To the 75<sup>th</sup> anniversary of Professor Amir Anvarovich Gubaidullin

**Vol. 8. No. 4 (32)****Thermal physics and thermology**

- 8 Research on the thermodynamic conditions for the pyrolysis of monosilane in a cyclic compression reactor  
*Yezdin, B. S., Kalyada, V. V., Vasiliev, S. A., Shabiev, F. K., Pakharukov, Yu. V., & Safargaliev, R. F.*
- 21 Calculation of the flow characteristics of the heat carrier in the well considering the flow modes  
*Gilmanov, A. Ya., Shevelev, A. P., & Rodionova, A. V.*
- 40 Mass transfer of phases in the flow of oil-water-gas mixture on the core scale  
*Shabarov, A. B., Igoshin, D. E., Rostenko, P. M., & Sadykova, A. P.*
- 66 Development of an installation for studying the flow of liquid in microcapillaries  
*Velizhanin, A. A., Grigorev, B. V., Nikulin, S. G., Vazhenin, D. A., & Vakhnina, D. V.*

**Fluid, plazma, and gas mechanics**

- 81 Experimental study of the oscillatory process in cylindrical pipes filled with gas-bubble liquid  
*Zaripov, F. A., Pavlov, G. I., Nakoryakov, P. V., & Sitnikov, O. R.*
- 95 Analysis of theoretical methods for interpretation the non-Newtonian fluids viscosity experimental data  
*Semikhina, L. P., Korovin, D. D., & Semikhin, D. V.*
- 111 Pressure field in the reservoir and well, taking into account the dynamic level during the selection and subsequent shutdown  
*Filippov, A. I., Akhmetova, O. V., & Zelenova, M. A.*

**Mathematical modeling, numerical methods, and software systems. Information technologies**

- 125 Improving the quality of reservoir pressure gridding by regularizing the CRMP-TM history matching problem  
*Beckman, A. D.*
- 144 On the application of the LET-model for the approximation of core relative phase permeabilities  
*Dubrovin, M. G., Vokina, V. R., & Yadryshnikova, O. A.*
- 163 Algorithms for building and operation modeling of large electrical circuits with memristor-diode crossbars in a biomorphic neuroprocessor  
*Ebrahim, A. H. A., & Udovichenko, S. Yu.*

**Anniversaries, scientific events, reviews**

- 179 To the memory of Professor V. M. Deryabin (22.09.1922-28.02.2009). A dedication to the 100<sup>th</sup> birthday

Научное издание



ВЕСТНИК ТЮМЕНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика  
2023. Том 9. № 1 (33)

Редактор	<i>Т. П. Сербин</i>
Перевод	<i>М. О. Сафонова</i>
Компьютерная верстка	<i>Т. П. Сербин</i>
Дизайн обложки	<i>Г. Ф. Бикмулина</i>
Печать	<i>А. Е. Котлярова, А. В. Башкиров, В. В. Торопов</i>

Подписано в печать 14.04.2023  
Формат 70 × 108/16. Бумага Xerox Perfect Print  
Обложка Stromcard LI. Гарнитура Arno Pro  
Печать электрографическая. 14,18 усл. печ. л., 11,34 уч.-изд. л.  
Тираж 500 экз. Заказ № 216